

# 11

# CONVERGENCE DOMINÉE INTÉGRALES À PARAMÈTRE

## I. THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

### Théorème 5 (convergence dominée)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continue par morceaux sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si

- **convergence** : la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ,
- **régularité** : la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- **domination** : il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n| \leq \varphi$ ,

alors

- les fonctions  $f_n$ , la fonction  $f$  sont intégrables sur  $I$ ,

$$\rightarrow \text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt.$$

## II. THÉORÈMES POUR LES INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

### Théorème 6 (Continuité)

Soit  $h : (x, t) \in A \times I \rightarrow h(x, t) \in \mathbb{K}$ . Si

- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $A$ ,
- il existe  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall x \in A, t \in I, |h(x, t)| \leq \varphi(t)$ ,

alors  $F : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

### Théorème 7 (Dérivation)

Soit  $h : (x, t) \in A \times I \rightarrow h(x, t) \in \mathbb{K}$ . Si

- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  et intégrable sur  $I$
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ ,
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$
- il existe  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall x \in A, t \in I, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$ ,

alors  $F : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$ ,  $F'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$ .

### Théorème 8 (Limite)

Soit  $h : (x, t) \in A \times I \rightarrow h(x, t) \in \mathbb{K}$  et  $a$  adhérent à  $A$  (éventuellement  $\pm\infty$ ). Si

- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- pour tout  $t \in I$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x, t) = g(t)$
- il existe  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall x \in A, t \in I, |h(x, t)| \leq \varphi(t)$ ,

alors  $\lim_{x \rightarrow a} \int_I h(x, t) dt = \int_I g(t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} h(x, t) dt$ .

**Remarque** : les propriétés de continuité et dérivabilité étant locale (il suffit de pouvoir le faire au voisinage de chaque point - ou sur chaque segment de  $A$ ), on sera fréquemment amené à appliquer ces théorèmes sur un domaine  $K \subset A$ .

**Théorème 9** (Dérivation d'ordre  $n$ )

Soit  $h : (x, t) \in A \times I \mapsto h(x, t) \in \mathbb{K}$ . Si

→ pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $A$ ,

→ pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  et intégrable sur  $I$ ,

→ pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$

→ il existe  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall x \in A, t \in I, \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \psi(t)$ ,

alors  $F : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$  et  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) dt$ .

**Remarque :** la domination porte uniquement sur la dernière dérivée. Sur les dérivées précédentes, on a simplement besoin d'une intégrabilité à  $x$  fixé. Assez fréquemment, lorsqu'on doit montrer que  $F$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , on est toutefois amené à déterminer une telle fonction dominante pour chaque dérivée (afin d'obtenir le résultat par récurrence sur  $n$ )

**III. EXERCICES****Exercice 1**

Déterminer la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de

a)  $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n} + x^n + 1}} dx$

d)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx$

**Exercice 2**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  bornée. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$ .

**Exercice 3 (Mines MP 2010)**

Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{n+1}}$ .

- Déterminer la nature de la suite  $(a_n)$ .
- Déterminer un équivalent de  $a_n$ .

**Exercice 4**

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $1 < (1+1/n)^n < e$ .
- En déduire que, si  $f$  est continue et intégrable sur  $[1, e[$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx.$$

**Exercice 5 (Mines MP 2021)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose  $f_n(x) = \int_1^{1+x/n} nf(t^n) dt$ . Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 6**

Soit  $I_n = \int_0^1 \ln(1-t^n) dt$ . Déterminer la limite  $\ell$  de  $I_n$ , puis un équivalent de  $I_n - \ell$ .

**Exercice 7**

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée. On pose  $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx} dx$ .

- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ , puis  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .
- On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , de dérivée bornée et telle que  $f'(0) \neq 0$ . Déterminer un équivalent simple de  $nI_n - L$ .

**Exercice 8**

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

3. on rappelle la formule de Wallis :  $\int_0^{\pi/2} \sin^p(t) dt \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$ . En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

**Exercice 9 (très classique)**

Soient  $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$  et  $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et déterminer leur dérivée.

2. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ .

3. En déduire  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

**Exercice 10**

On définit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , calculer  $f''$  et en déduire  $f$ .

**Exercice 11 (Mines MP)**

Soit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} dt$ . Donner son domaine de définition, calculer sa dérivée et donner une expression simple de  $f$ .

**Exercice 12**

1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} dt$  est définie.
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et donner une expression simple pour  $f'(x)$ .
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \pi \ln x)$ .
5. En déduire une expression simple pour  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 13**

On note  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + t^2} dt$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , étudier sa continuité, sa parité et montrer que  $f$  est bornée sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $xf(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1 + t^2)^2} dt$ .
3. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $f'' = f$ .
4. En déduire une expression simple pour  $f$ .
5. Simplifier  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2 + t^2} dt$ .

**Exercice 14 (Centrale MP)**

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ .

1. Étudier le domaine de définition de  $f$ . Montrer que  $f$  est continue sur son domaine de définition.
2. Donner un équivalent de  $f$  en 0.
3. Montrer que  $x = 1/2$  est axe de symétrie du graphe de  $f$ .

**Exercice 15 (Mines MP)**

Soit  $g$  continue sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs réelles telle que  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$  converge et vaut  $\ell$ . Montrer que  $f(x) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .

**Exercice 16**

On définit, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2 + \frac{x^2}{t^2})} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par  $f$  (on utilisera un changement de variable).
4. En déduire une expression simple de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 17 (Intégrale de Fresnel)**

1. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ . En déduire la valeur de ces intégrales (*indic* : effectuer un changement de variable  $u = x - \frac{1}{x}$  au bon endroit).
2. On définit  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$ . Montrer que  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Déterminer la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
3. Justifier que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , déterminer et simplifier sa dérivée (on pourra utiliser  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ).
4. Montrer que  $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$  converge et donner sa valeur.

**EXERCICES EN VRAC****Exercice 18 (Mines MP/MPI 2023)**

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|e^{iu} - 1| \leq |u|$ .
2. En déduire que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis simplifier l'expression de  $f$ .

**Exercice 19 (Mines MP 2021)**

Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_1^{+\infty} f$  converge.

1. Montrer, si  $x \in \mathbb{R}^+$ , la convergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^x} dt$ , dont on note  $F(x)$  la valeur.
2. Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 20 (Mines MP 2021)**

Déterminer un équivalent de  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} |\cos t| dt$ .