

12 SÉRIES DE FONCTIONS

I. CONVERGENCES

Définition 29 (Notations et convergences)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{K} . On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ (somme partielle de la série de fonctions)

- la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** sur A lorsque la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur A . Cela revient à dire que, pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. On note alors, pour tout $x \in A$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $R_n = S - S_n$ ce qui donne, pour tout $x \in A$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
- la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur A lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur A . Cela revient à dire qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $S - S_n = R_n$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_{\infty, A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, A} = 0$.
- la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur A lorsqu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in A$, $|f_n(x)| \leq a_n$ avec $\sum a_n$ convergente. Cela revient à dire que $\sum \|f_n\|_{\infty, A}$ converge.
- la série de fonctions $\sum f_n$ **converge absolument** sur A lorsque, pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

Remarques :

- la convergence normale entraîne toutes les autres convergences ; on n'a pas de lien entre la convergence uniforme et la convergence absolue
- si $\sum f_n$ converge simplement, on peut écrire $f_n = R_{n-1} - R_n$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty, I} = 0$.

II. PROPRIÉTÉS

CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ...

Propriété 40 (Continuité, limites)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers \mathbb{K} .

- **continuité** : si $\sum f_n$ converge uniformément sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A (resp. en $a \in A$) alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A (resp. en $a \in A$).
- **permutation des limites** : si $a \in \bar{A}$, $\sum f_n$ converge uniformément sur A - on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ - et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$ en a alors la série $\sum \ell_n$ converge et $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Propriété 41 (Intégration/dérivation)

Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} .

- **dérivation** : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I , si $\sum f_n$ converge simplement sur I , avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et si $\sum f'_n$ converge uniformément sur I alors S est de classe \mathcal{C}^1 sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.
- **intégration** : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, alors $\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$.



INTÉGRATION TERME À TERME

Théorème 10 (Intégration terme à terme)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Si

→ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ,

→ $\sum f_n$ converge simplement sur I , avec $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,

→ la fonction somme S est continue par morceaux sur I ,

→ la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge,

alors

→ S est intégrable sur I ,

→ on a $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right)$

→ et également $\int_I |S(t)| dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n(t)| dt \right)$

**MÉTHODE - PERMUTATION SOMME-INTÉGRALE**

Pour obtenir une permutation $\sum - \int$:

→ on utilise le théorème d'intégration terme à terme (hypothèse forte : convergence de $\sum \|f_n\|_1$),

→ on utilise le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles (hypothèse forte : domination indépendante de n des sommes partielles $|S_n(t)|$),

→ moins fréquent : on écrit $S = S_n + R_n$, puis $\int_I S(t) dt = \int_I S_n(t) dt + \int_I R_n(t) dt$ et on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I R_n(t) dt = 0$

III. EXERCICES

Exercice 1

Étudier les convergences simple, uniforme, normale des séries de fonctions suivantes :

a) $\sum x^n \ln^2 x$.

b) $\sum x^n \ln x$.

c) $\sum \frac{nx^2}{1+n^3x}$

d) $\sum \frac{nx}{n^4+x^2}$

Exercice 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto nx e^{-nx^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}^* . On note S sa somme. Montrer que S est impaire.

2. Soit $a > 0$. Calculer pour $x > 0$, $\int_a^x S(t) dt$ et en déduire S .

Exercice 3

Démontrer les relations suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$ où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) $\int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1-x} dx = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

**Exercice 4**

On pose $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 + n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . Étudier la parité de f .
2. Étudier la continuité de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. La convergence de la série est-elle uniforme sur \mathbb{R}^+ ?
5. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$. On veut étudier la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que la série converge simplement sur \mathbb{R} et que sa somme S est continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et étudier les variations de S .
3. Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6

1. Soit $r \in]-1, 1[$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$. Vérifier que f est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $r \in]-1, 1[$, $g(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$, déterminer une expression simple $g(r)$ pour $r \in]-1, 1[$.
3. En déduire $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$.

Exercice 7

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p$. Justifier l'existence de $I_{n,p}$ et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$. En déduire la valeur de $\int_0^1 x^n (\ln x)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Prouver l'égalité $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 8

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
5. Montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$.
6. Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

**Exercice 10 (Mines MP 2021)**

On définit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} en posant $f_0 = 1$ et, si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt$.

1. Montrer que les f_n sont polynomiales.
2. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f et que $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq e^x$.
3. Montrer que $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0, 1/2]$, puis que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur cet intervalle.
4. Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, que dire de $f_n(x) + f_n(1 - x)$? Qu'en déduit-on sur f ?
5. Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

Exercice 11

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}$.

1. Montrer l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner la limite ℓ de I_n .
2. Donner un équivalent de $I_n - \ell$ en l'infini.
3. Prouver l'existence de $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ et exprimer sa somme sous forme d'une série.
4. En déduire un développement asymptotique de I_n à trois termes.

Exercice 12

On appelle S la fonction définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

1. Préciser sur quel intervalle cette fonction est définie, continue, dérivable, et donner son sens de variation.
2. Donner les limites en 0 et $+\infty$, ainsi qu'un équivalent en 0.
3. En calculant $S(x+1) + S(x)$, donner un équivalent en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(1+e^{-t})}} dt$$

on pourra utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 13

Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout $[a, +\infty[$ (ou $a > 0$) mais pas sur \mathbb{R}^+ .
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .
4. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ .
5. Montrer que S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 14

Soit $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ avec $g(0) = 0$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. On notera $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ la somme de la série. Montrer que h est continue sur $[0, 1]$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telles que, pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - f(x/2)$. Montrer que les fonctions obtenues sont de classe \mathcal{C}^1 .

**Exercice 15 (Mines MP)**

Pour $x \in]-1, 1[$, soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-x^n)}$.

1. Justifier la définition de f et étudier sa continuité.
2. Si $x \in]-1, 1[$, montrer que $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \ln(1+x^p)$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ en 1^- , puis trouver un équivalent.

Exercice 16 (Centrale MP/MPI 2023)

1. Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Exprimer P'/P à l'aide des racines de P .
3. Soit $r > 0$. On suppose que P ne s'annule pas sur le cercle $C(0, r)$ du plan complexe. On pose $N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it} dt$. Montrer que $N_r(P)$ est égal au nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans le disque $D(0, r)$.

Exercice 17 (ENS MP 2021 (PLSR) - corrigé)

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_n - n^2| \leq Cn$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{\lambda_n}\right)$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^{+*} .
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.