

13

RÉDUCTION

I. ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{K}[X]$

Propriété 53 (Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$)

- Soient P et Q deux polynômes (l'un au moins non nul). Il existe un unique polynôme G unitaire tel que $(P) + (Q) = (G) = \{UP + VQ, (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$. Il est appelé pgcd de P et Q et noté $\text{pgcd}(P, Q)$ ou $P \wedge Q$.
- P et Q sont premiers entre eux lorsque $P \wedge Q = 1$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , P et Q sont premiers entre-eux si et seulement si ils n'ont pas de racine complexe commune.
- **théorème de Bézout** : P et Q sont premiers entre eux si et seulement si il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.
- **lemme de Gauss** : si $A|BC$ et $A \wedge B = 1$ alors $A|C$.
- Si A est premier avec B et C alors il est premier avec BC .
- Généralisation à plusieurs polynômes : on appelle pgcd de P_1, \dots, P_k (non tous nuls) l'unique polynôme unitaire G qui engendre l'idéal engendré par P_1, \dots, P_k . Les polynômes sont premiers entre eux (dans leur ensemble) lorsque leur pgcd est 1 (cela équivaut à l'existence de U_1, \dots, U_k tels que $\sum_{i=1}^k U_i P_i = 1$).
- Un polynôme P de degré au moins 1 est irréductible lorsqu'il n'admet aucun diviseur strict (non constant et non multiple constant de P).
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ (\mathbb{K} corps quelconque). On peut factoriser P par $(X - a)$ si et seulement si $P(a) = 0$. Notamment un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$ possède au maximum n racines dans K .
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Ceux de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 avec un discriminant strictement négatif.
- Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ se décompose de façon unique (à l'ordre près) sous la forme $\alpha P_1 \dots P_k$ où α est scalaire et les P_i sont irréductibles unitaires.

Remarque : on n'est pas obligé d'imposer un pgcd unitaire. On parle alors d'un pgcd de P et Q

II. ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

Propriété 54 (Éléments propres)

- si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un \mathbb{K} -ev, on appelle
 - **valeur propre** de u : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$,
 - **vecteur propre** de u : tout $x \in E$ non nul tel qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$,
 - **espace propre** de u pour λ : le sous-espace $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$
- on a l'équivalence, pour $x \neq 0$
 - x est un vecteur propre,
 - $(x, u(x))$ est une famille liée,
 - $D = \text{Vect}(x)$ est une droite stable par u
- en dimension finie, on a l'équivalence
 - λ est une valeur propre de u ,
 - l'endomorphisme $u - \lambda \text{Id}$ est non injectif (ou non bijectif),
 - $\det(u - \lambda \text{Id}) = 0$
- si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes :
 - les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe,
 - si x_i est un vecteur non nul de E_{λ_i} pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ alors la famille (x_1, \dots, x_p) est libre.

Proposition 55 (Sous-espaces vectoriels stables)

- si u et v commutent alors $\ker v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u .
- c'est notamment le cas lorsque v est un polynôme en u : $\ker u, \text{Im } u, E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id})$ et $F_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id})^p$ sont stables par u .

III. ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

Définition 30

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$:

- **valeur propre** de A : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$,
- **vecteur propre** de A : tout $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ *non nul* tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$,
- **espace propre** de A pour λ : le sous-espace $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\}$

Propriété 56 (Matrices et valeurs propres)

- si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors A et A^T ont mêmes valeurs propres et $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^T)$.
- si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et les espaces propres associés sont de même dimension.

IV. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Propriété 57 (Polynôme caractéristique)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A ,
- on a $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$
- $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$,
- $\dim E_\lambda(A) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$
- si λ est de multiplicité $k \geq 1$ dans χ_A alors $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq k$
- $\chi_A = \chi_{A^T}$

V. POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES, POLYNÔMES ANNULATEURS

Propriété 58 (Polynômes annulateurs)

soit $u \in \mathcal{L}(E)$,

- l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
- en dimension finie, l'ensemble des polynômes annulateurs de u est l'ensemble des multiples d'un unique polynôme unitaire (de degré minimal), appelé *polynôme minimal de u* et noté μ_u .
- **théorème de Cayley-Hamilton** : le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur (et notamment $\mu_u | \chi_u$).

Propriété 59 (Lien avec les valeurs propres)

- si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
- Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u ou celles de μ_u .
- si P est un polynôme annulateur de u alors les valeurs propres de u sont parmi les racines de P .

Théorème 15 (Décomposition des noyaux)

- Si P et Q sont premiers entre eux alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.
- Si P_1, \dots, P_k sont 2 à 2 premiers entre eux alors $\ker(P_1 \dots P_k)(u) = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(u)$.

Proposition 60 (Polynômes d'endomorphismes)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre entre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ et $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$.
- On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$,
- si $d = \deg \mu_u$, alors la famille $(\text{Id}, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{d-1}[u]$.

VI. RÉDUCTION EN DIMENSION FINIE

DIAGONALISATION

Propriété 61 (Diagonalisation)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence

- u est diagonalisable (il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale),
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$,
- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = \dim E$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence entre

- A est diagonalisable (c'est-à-dire A est semblable à une matrice diagonale),
- il existe une base (X_1, \dots, X_n) de $M_{n1}(\mathbb{K})$ avec $AX_i = \lambda_i X_i$,
- $M_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_{\lambda}(A)$,
- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_{\lambda}(A) = n$.

Proposition 62 (Critère de diagonalisabilité avec le polynôme caractéristique)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur \mathbb{K} et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_{\lambda}(u) = n_{\lambda}$ où n_{λ} est la multiplicité de λ dans χ_u .

Remarques :

- lorsque χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable et chacun des n sous-espaces propres est de dimension 1,
- lorsque χ_u admet une unique racine λ , alors u est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda \text{Id}$.

Proposition 63 (Critère de diagonalisabilité avec les polynômes annulateurs)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence

- u est diagonalisable,
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples,
- le polynôme minimal de u est scindé à racines simples,
- le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur

Proposition 64 (Endomorphisme induit)

Si u est diagonalisable et F est stable par u , alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

TRIGONALISATION

Définition 31 (Endomorphisme trigonalisable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Propriété 65 (Caractérisations)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence

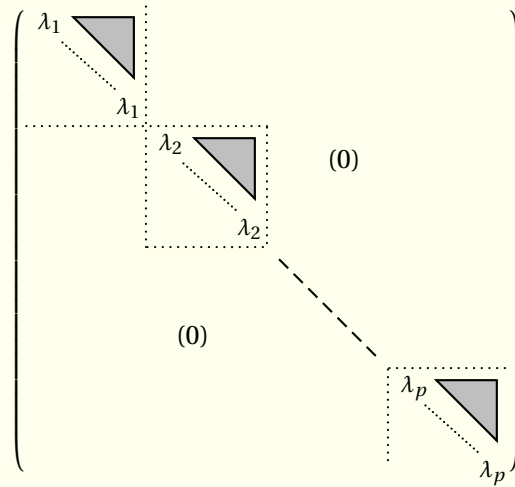
- u est trigonalisable,
- le polynôme caractéristique χ_u est scindé,
- u admet un polynôme annulateur scindé.

Proposition 66 (Trigonalisation)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors

- $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ où F_k est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur F_k est $u|_{F_k} = \lambda_k \text{Id} + v_k$ où v_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
- la dimension de F_k est égale à la multiplicité de λ_k dans χ_u ,

→ il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

**VII. EXERCICES****POLYNÔMES****Exercice 1**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1.$$

Exercice 2

Soit $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

1. Décomposer P en facteurs premiers sur $\mathbb{C}[X]$ (calculer en 1 et -1).
2. Décomposer Q en facteurs premiers sur $\mathbb{C}[X]$ (calculer en -2).
3. Dédurrez-en qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$. Indiquez une méthode pour déterminer deux polynômes U et V en utilisant l'algorithme d'euclide.

Exercice 3

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ où $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Exercice 4 (Mines MP)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, non nul, tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que les racines de P sont de module 1.
2. Trouver ces racines.
3. Trouver P .

Exercice 5 (Mines MP)

Soit $P = a_0 + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples sur \mathbb{R} .

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x)P(x) - P'(x)^2 < 0$.
2. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$, montrer que $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 6 (Mines MP)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, z_1, \dots, z_n les racines de $X^n + 1$.

On pose, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $F_k = \frac{X^k}{X^n + 1}$.

- Décomposer F_k en éléments simples.
- Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer : $XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$.
- Si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $\|Q\|_\infty = \max_{|z| \leq 1} |Q(z)|$.
- Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\|_\infty \leq n \|P\|_\infty$.

Exercice 7 (Mines MP)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$.

RECHERCHE D'ÉLÉMENTS PROPRES, POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES ET ANNULATEURS**Exercice 8 (TPE MP)**

Soit $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$ si $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 9 (Mines MP)

Soient A, B dans $M_n(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique en fonction de ceux de $A + B$ et $A - B$.

Exercice 10 (CCINP 93)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle et $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E .

- Montrer que $\text{Im } u \oplus \ker u = E$.
- (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
(b) En déduire que $\text{Im } u = \ker(u^2 + u + \text{Id})$.
- On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Exercice 11

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie qui commutent. Montrer qu'ils admettent un vecteur propre commun.

Exercice 12 (Mines MP)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ et $P(f) = 0$. Montrer que $E = \ker f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 13

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = I$ et (I, A, \dots, A^{n-1}) est libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 14

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et T l'endomorphisme de E qui à f associe F définie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que T est un endomorphisme de E .
- Déterminer ses éléments propres.

Exercice 15 (Mines MP)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.

RÉDUCTION MATRICIELLE

Exercice 16 (CCINP 73)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 17

Montrer que la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante est diagonalisable et la réduire, sans calculer son polynôme caractéristique :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (CCINP 91)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
- La matrice A est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?
- Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

Exercice 19 (Mines MP)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On note M la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec $M_{i,j} = b$ si $i \neq j$ et $M_{i,i} = a$.

- Déterminer les valeurs propres de M . La matrice est-elle diagonalisable?
- Déterminer les (a, b) pour lesquels M est inversible. Calculer alors M^{-1} .
- Déterminer M^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 20

Soit

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser J_n dans $M_n(\mathbb{C})$ et en déduire le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 (CCINP MP)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur.

- Exprimer $\det(\text{Id}_E + \lambda p)$ en fonction de $\text{rg } p$ et λ . On pose $V = (a_1, \dots, a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $B = V^T V$.
- Déterminer $\text{rg } B$.
- Montrer que B est diagonalisable. Calculer ses valeurs propres et la dimension de ses espaces propres.
- On pose M la matrice avec $m_{ij} = 1 + a_i^2$ si $i = j$ et $m_{ij} = a_i a_j$ sinon. Trouver $\det M$.

Exercice 22 (Mines MP)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

1. Que dire de u si sa matrice dans toute base est diagonale?
2. Que dire de u s'il a même matrice dans toute base?

Exercice 23 (Trigonalisation)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis dans \mathbb{Z} (en fonction de P).

Exercice 24 (sous-espaces stables)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quels sont les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par M ?
2. Un sous-espace de \mathbb{R}^3 stable par M admet-il toujours un supplémentaire stable par M ?

Exercice 25 (Mines MP)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES**Exercice 26 (CCINP 72)**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .
2. f est-il diagonalisable? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 27

Soit f un endomorphisme tel que $(f + id)^3 \circ (f + 2id) = 0$ et $(f + id)^2 \circ (f + 2id) \neq 0$. f est-il diagonalisable?

Exercice 28

Soient $n \geq 2$ et ϕ l'endomorphisme qui à toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\text{tr}(M)I_n - M$.

1. Calculer ϕ^2 et en déduire que ϕ est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de ϕ .
3. Calculer la trace et le déterminant de ϕ .
4. Calculer le polynôme caractéristique de ϕ .
5. Montrer que ϕ est inversible et déterminer ϕ^{-1} .

Exercice 29 (CCINP MP)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M + 2^t M$

1. Donner les valeurs et les espaces propres de f .
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Calculer sa trace et son déterminant.

Exercice 30

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et p un projecteur de E de rang r . On considère l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ suivant :

$$\phi : f \mapsto p \circ f + f \circ p.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable? Quels sont ses éléments propres? On pourra travailler dans une base adaptée à p .

Exercice 31 (produit tensoriel - exemple)

Soit A une matrice diagonalisable et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ est aussi diagonalisable - on cherchera des vecteurs propres sous la forme $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 32

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, et φ l'endomorphisme de E défini par

$$P \mapsto (X^2 - 1)P' - 2nXP.$$

Montrer que φ est bien un endomorphisme de E . Déterminer les éléments propres de φ . L'endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 33

Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que M^{-1} est un polynôme en M .

Exercice 34

Soit u un endomorphisme non nul de \mathbb{R}^3 qui vérifie $u^3 + u = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 35

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 36

Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix}$.

1. Relier les sous-espaces propres de V à ceux de U .
2. Donner une CNS sur U pour que V soit diagonalisable

Exercice 37

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & v \circ u \end{cases}$$

Montrer que Φ_u est diagonalisable si et seulement si u l'est.

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES - EXERCICES DIVERS**Exercice 38**

Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension n . On suppose que tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u . Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 39 (Mines MP)

Soient n, p dans \mathbb{N}^* , A, B_1, \dots, B_p dans $M_n(\mathbb{C})$, b_1, \dots, b_p des complexes distincts. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $A^k = \sum_{i=1}^p b_i^k B_i$.

1. Montrer que pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $B_i \in \mathbb{C}[A]$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 40 (Réduction de la comatrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et B la transposée de la comatrice. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B . On envisagera trois cas en fonction du rang de A .

Exercice 41

1. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence :

$$Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset \iff \chi_A(B) \text{ est inversible.}$$

2. On suppose qu'il existe $P \neq 0$ tel que $A.P = P.B$. Exprimer $A^k P$ en fonction de B et P . Montrer alors que A et B ont une valeur propre commune.
3. Réciproquement, on suppose que A et B ont une valeur propre commune λ . Montrer que λ est valeur propre de B^T , en déduire qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle, telle que $AP = PB$.

Exercice 42 (Mines MP)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f est nilpotent (on pourra utiliser l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $h \mapsto h \circ g - g \circ h$).
2. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.
3. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 43

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.

1. Justifier que A admet un polynôme annulateur P , scindé à racines simples et tel que $P(0) = 0$. En déduire que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable :
2. A quelle condition la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 44 (Centrale MP)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}_2[X]$ sans racine réelle, annulateur de $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que $\dim E$ est paire.
2. Soit $x \neq 0$ et $y = f(x) + ax$. Montrer que $\text{Vect}(x, y)$ est un plan stable par f .
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tous les blocs étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Exercice 45 (Mines MP)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^2 - 2A$ est diagonalisable et que 1 n'est pas valeur propre de A . Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 46 (Mines MP)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(A)$.
2. Quelle condition imposer au degré de P pour avoir unicité ?

Exercice 47

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in E$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(A^{2p+1})$.
2. Soit A, B deux matrices diagonalisables dans E telles que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.
3. Le résultat est-il vrai lorsque la puissance est paire?

Exercice 48

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. A est nilpotente,
2. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle,
3. pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 49 (Mines MP)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E . On suppose que f est inversible et g de rang 1. Montrer que $f + g$ est inversible si et seulement si $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Exercice 50 (Mines MP)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Exercice 51 (Mines MP)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice dont les coefficients a_{ij} valent 1 lorsque $i \geq j$ et $i = 1, j = n$ et 0 sinon.

1. Quel est le polynôme caractéristique de A_n ?
2. Montrer que A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]1, +\infty[$.
3. Montrer que $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2 \ln n}$.

Exercice 52 (Mines MP)

Soit $n \geq 3$ un entier, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et C la matrice de permutation associée au n -cycle $(12 \dots n)$.

1. Quel est le sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par B et C ?
2. Quels sont les éléments de G diagonalisables sur \mathbb{R} ?

Exercice 53 (Mines MP)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $\mathcal{C}(M) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. Montrer l'équivalence entre

1. M possède n valeurs propres distinctes,
2. $\dim \mathcal{C}(M) = n$,
3. pour tout $A \in \mathcal{C}(M)$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, $A = P(M)$.
4. pour tout $A, B \in \mathcal{C}(M)$, $AB = BA$.

Exercice 54 (Centrale MP)

Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ qui lui est canoniquement associé.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{B}_u(x) = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. On note $F = \text{Vect} \mathcal{B}_u(x)$. Montrer que $\mathcal{B}_u(x)$ est une base de F et que F est stable par u . Donner la matrice J_p , dans la base $\mathcal{B}_u(x)$, de l'endomorphisme induit par u sur F .
3. Montrer qu'il existe une forme linéaire ϕ sur E telle que $\phi(u^{p-1}(x)) \neq 0$. Montrer que $(\phi \circ u^k)_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.
4. On note $G = \bigcap_{0 \leq k \leq p-1} \ker(\phi \circ u^k)$. Montrer que G est stable par u et que $F \oplus G = E$.
5. Montrer que N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme J_r , puis que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\lambda I_r + J_r$.

Exercice 55 (Centrale MP)

On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie la propriété (P) si $A + \text{Com}(A)^T$ est une matrice scalaire.

1. Traiter le cas $n = 2$. Dans toute la suite on pose $n > 2$.
2. Rappeler le lien entre comatrice et inverse de A lorsque A est inversible.
3. Pour $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$.
4. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifie (P) alors les matrices semblables à A vérifient également (P).
5. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ non scalaire n'ayant qu'une seule valeur propre. Montrer que A vérifie (P) si et seulement si il existe N telle que $N^2 = 0$ et μ une racine $(n-2)$ -ième de l'unité telles que $A = \mu I_n + N$.
6. On suppose que A vérifiant (P) possède au moins deux valeurs propres distinctes. Montrer que A est diagonalisable et conclure.

Exercice 56 (Polytechnique)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. À quelle condition A est-elle diagonalisable?

Exercice 57 (D'après ENS MP)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que toute droite est stable par A . Montrer que A est une homothétie.
2. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On suppose que tout sous-espace vectoriel de dimension k est stable par A . Montrer que A est une matrice scalaire.
3. Déterminer les matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.