

# 14

# FAMILLES SOMMABLES

## I. DÉNOMBRABILITÉ

### PARTIES DE $\mathbb{N}$

#### Définition 32 (Parties finies et infinies de $\mathbb{N}$ )

- On définit  $[[1; n]] = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$  - valable pour  $n = 0$  avec  $[[1; 0]] = \{n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq 0 \leq 0\} = \emptyset$ .
- S'il existe une bijection entre  $[[1; n]]$  et  $[[1; m]]$ , alors  $m = n$ .
- Une partie de  $\mathbb{N}$  est finie lorsqu'elle est en bijection avec un ensemble  $[[1; n]]$ . Son cardinal est alors  $n$  (unique)
- Une partie de  $\mathbb{N}$  qui n'est pas finie est dite infinie.
- Toute partie infinie de  $\mathbb{N}$  est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Démonstration :** si  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{N}$ , on peut construire une bijection entre  $A$  et  $\mathbb{N}$  à l'aide de la suite  $(a_n)$  définie par  $a_0 = \min A$  puis  $a_n = \min\{x \in A, x > a_{n-1}\}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

#### Définition 33 (Ensemble (au plus) dénombrable)

On dit que  $E$  est

- fini lorsqu'il est en bijection avec une partie finie de  $\mathbb{N}$ ,
- dénombrable lorsqu'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ ,
- au plus dénombrable lorsqu'il est fini ou dénombrable, c'est-à-dire lorsqu'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

Afin de ne pas avoir à distinguer les deux situations (fini ou dénombrable), on donne les caractérisations suivantes qui permettent de montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable.

#### Proposition 67 (Caractérisations pratiques)

- Un ensemble  $E$  est au plus dénombrable si et seulement si il existe une **injection** de  $E$  dans  $\mathbb{N}$  (ou dans un ensemble dénombrable).
- Un ensemble non vide  $E$  est au plus dénombrable si et seulement si il existe une **surjection** de  $\mathbb{N}$  (ou d'un ensemble dénombrable) sur  $E$ .

#### EXEMPLE - ENSEMBLES DÉNOMBRABLES USUELS

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  sont dénombrables
- $\mathbb{N}^2$  est dénombrable,  $\mathbb{Z}^2, \mathbb{N}^p$  et  $\mathbb{Z}^p$  également ( $p \in \mathbb{N}^*$ ).

**Remarque :** pour  $\mathbb{N}^2$ , on peut compter « en diagonale », mais la bijection n'est pas simple à écrire explicitement. On peut aussi utiliser l'unicité de la décomposition d'un entier non nul sous la forme  $n = 2^p(2q + 1)$  et considérer la bijection

$$(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^p(2q + 1) \in \mathbb{N}^*.$$

#### Propriété 68 (Opérations sur les ensembles finis ou dénombrables)

- si  $B \subset A$  et  $A$  est au plus dénombrable, alors  $B$  est au plus dénombrable. Il en est de même si  $B$  s'injecte dans  $A$ .
- si  $A$  et  $B$  sont au plus dénombrables alors  $A \times B$  aussi.
- un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
- si  $I$  est un ensemble au plus dénombrable, si pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  est une partie au plus dénombrable d'un ensemble  $E$  alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est une partie de  $E$  au plus dénombrable.

#### Démonstration :

- si  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$  est une injection alors la restriction de  $\varphi$  à  $B$  est encore injective dans  $\mathbb{N}$ . Si  $\psi$  est une injection de  $B$  dans  $A$ , on considère  $\varphi \circ \psi$ .
- si  $\varphi_A : A \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\varphi_B : B \rightarrow \mathbb{N}$  sont injectives alors  $\theta : A \times B \rightarrow \mathbb{N}^2$  telle que  $\theta((a, b)) = (\varphi_A(a), \varphi_B(b))$  est injective. Par récurrence, on généralise à tout produit fini de parties au plus dénombrables.
- soit, pour  $i \in I$ , une surjection  $f_i : \mathbb{N} \rightarrow A_i$  (si  $A_i$  est vide, on le supprime de la liste). L'application  $\varphi : (i, n) \in I \times \mathbb{N} \mapsto f_i(n)$  est une surjection de  $I \times \mathbb{N}$  (qui est dénombrable) sur la réunion considérée.

**TECHNIQUES PLUS ÉVOLUÉES**

**EXEMPLE - PAR RÉUNION : ENTIERS ÉLÉGRIQUES**

on dit que  $x \in \mathbb{R}$  est un entier algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul de  $\mathbb{Z}[X]$ .

- si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$  et  $a_n \neq 0$ , on note  $\varphi(P) = n + \sum_{k=0}^n |a_k|$ . Pour  $q \in \mathbb{N}^*$  donné, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes  $P$  tels que  $\varphi(P) = q$ . Chaque polynôme  $P$  vérifiant  $\varphi(P) = q$  est de degré strictement inférieur à  $q$  et a donc au maximum  $q$  racines. On note alors  $E_q = \{x \in \mathbb{R}, \exists P \in \mathbb{Z}[X], P(x) = 0 \text{ et } \varphi(P) = q\}$ . Cet ensemble est fini.
- si  $x$  est un entier algébrique alors il est dans l'un de ces ensembles. La réunion de tous ces ensembles est au plus dénombrable (et comme  $\mathbb{Z}$  est dedans, l'ensemble est finalement dénombrable).

**EXEMPLE - UTILISATION DE  $\mathbb{Q}$**

- Si  $(O_i)_{i \in I}$  est une réunion d'ouverts non vides 2 à 2 disjoints de  $\mathbb{R}$  alors  $I$  est au plus dénombrable. La démonstration est assez simple. Pour tout  $i \in I$ , il existe un rationnel  $p_i \in O_i$  (ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ ). Si  $i \neq j$ , alors  $p_i \neq p_j$  puisque les ouverts sont deux à deux disjoints. L'application  $i \in I \mapsto p_i \in \mathbb{Q}$  est donc injective.
- Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable :
  - version 1 : on note  $M = f(b) - f(a)$ . Si  $x$  est dans  $[a, b]$ , on note  $f(x^+)$  et  $f(x^-)$  les limites à droite et à gauche de  $f$  (sauf aux bords où on note  $f(b^+) = f(b)$  et  $f(a^-) = f(a)$ ). On note  $A_n = \{x \in ]a, b[, f(x^+) - f(x^-) \geq M/n\}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $f$  est croissante,  $A_n$  contient au plus  $n$  éléments. Si  $x$  est un point de discontinuité de  $f$  alors il est dans l'un des  $A_n$ . La réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$  est au plus dénombrable.
  - version 2 : comme dans l'exemple précédent, si  $x$  est un point de discontinuité de  $f$  alors  $]f(x^-), f(x^+)[$  est un ouvert non vide donc il contient un rationnel. On construit ainsi une injection de l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  dans  $\mathbb{Q}$ .

**ENSEMBLES NON DÉNOMBRABLES**

Partie plus difficile, donnée en complément

**Proposition 69**

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

**Démonstration :**

- par procédé diagonal et développement décimal,
- avec le résultat suivant : si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels, alors il existe un réel  $\ell$  qui n'est pas un terme de la suite. Pour ce résultat, on construit une suite de segments emboîtés  $[a_n, b_n]$  de sorte que  $u_n \notin [a_n, b_n]$  en coupant  $[a_n, b_n]$  en trois morceaux pour être certain que l'un des trois ne contient pas  $u_n$  (un dichotomie simple ne suffit pas, car le point milieu pourrait être  $u_n$ ). On montre alors que la limite  $\ell$  de  $a_n$  et  $b_n$  n'est pas l'un des termes de la suite puisque  $\ell \in [a_n, b_n]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_n \notin [a_n, b_n]$ .

**Proposition 70 (Théorème de Cantor)**

Il n'existe pas de bijection entre un ensemble  $E$  et l'ensemble de ses parties  $\mathcal{P}(E)$ .

**Démonstration :** supposons qu'il existe une bijection  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ . On considère  $X = \{x \in E, x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$ . soit  $y$  un antécédent de  $X = f(y)$ . Si  $y \in X$  alors  $y \notin f(y) = X$  ce qui donne une contradiction, mais si  $y \notin X = f(y)$  alors  $y \in X$  d'où une nouvelle contradiction.

**Proposition 71**

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  n'est pas dénombrable
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est isomorphe à  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Ils sont tous les deux en bijection avec  $\mathbb{R}$ .
- de façon générale,  $\mathcal{P}(E)$  est isomorphe à  $\{0, 1\}^E$  (avec  $A \subset E \mapsto \chi_A$ )
- $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  sont non dénombrables et non isomorphes.

**Remarque :** À partir de  $\mathbb{N}$ , on obtient des ensembles infinis de plus en plus gros (dans le sens où il y a une injection mais pas de bijection)  $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \dots$

**II. FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS POSITIFS**

**Important :** dans cette partie,  $(u_i)_{i \in I}$  désigne une famille de réels **positifs ou nuls** indexée par un ensemble  $I$  dénombrable.

**Définition 34** (Famille sommable)

- On dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, lorsqu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que, pour toute partie finie  $J \subset I$ ,  $\sum_{j \in J} u_j \leq M$
- on note alors  $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{J \subset I, J \text{ fini}} \left( \sum_{j \in J} u_j \right)$ .

**Propriété 72** (familles sommables à termes positifs)

- Si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable et  $I' \subset I$ , alors  $(u_i)_{i \in I'}$  est sommable (de somme inférieure).
- Si, pour tout  $i \in I$ ,  $0 \leq v_i \leq u_i$  et  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(v_i)_{i \in I}$  est sommable et  $0 \leq \sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} u_i$ .

**Proposition 73** (Lien avec les séries)

Soit  $\sum a_n$  est une série à termes positives :

- la famille  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si  $\sum a_n$  converge,
- et dans ce cas  $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ .

**Théorème 16** (Somme par paquets)

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. On suppose que  $I$  est réunion disjointe d'ensembles  $I_\lambda$  pour  $\lambda \in \Lambda$  avec  $\Lambda$  au plus dénombrable. On a **équivalence** entre

- $(u_i)_{i \in I}$  est sommable
- pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $(u_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable de somme  $s_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} u_i$ , et la famille  $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est sommable

On a alors  $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)$ .

**Remarque :** le cas usuel est d'avoir  $\Lambda = \mathbb{N}$  et une partition  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

**Démonstration :**

- sens réciproque : soit  $J$  une sous-famille finie de  $I$ . Il existe un nombre fini d'indices  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que cette famille soit contenue dans  $\bigcup_{i=1}^k I_{\lambda_i}$ .

On note alors  $J_i = I_{\lambda_i} \cap J$ . On a

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j \in I_{\lambda_i}} u_j \right) \leq \sum_{i=1}^k s_{\lambda_i} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda.$$

Ce dernier terme étant constant, on a prouvé que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable et que  $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)$ .

- sens direct : Puisque  $I_\lambda \subset I$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_\lambda}$  est évidemment sommable. Il reste à montrer que les sommes finies des  $s_\lambda$  sont majorées. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  un ensemble fini de ces indices (dans  $\Lambda$ ). On veut montrer que  $\sum_{i=1}^p s_{\lambda_i} \leq \sum_{i \in I} u_i$ . Puisque chaque terme  $s_{\lambda_i}$  peut contenir une infinité de termes de la famille des  $u_i$ , ce n'est pas immédiat. Considérons alors des sous-ensembles finis quelconques  $J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_p}$  d'indices avec  $J_{\lambda_i} \subset I_{\lambda_i}$ .

Pour toutes ces familles finies, la réunion  $\bigcup_{i=1}^p J_{\lambda_i}$  est finie donc

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i \in J_{\lambda_j}} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

Fixons les indices 1 à  $p-1$  :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i \in J_{\lambda_j}} u_i = \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{i \in J_{\lambda_j}} u_i \right) + \sum_{i \in J_{\lambda_p}} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

Cette relation est valable pour toute sous-famille  $J_{\lambda_p} \subset I_{\lambda_p}$ . En passant à la borne supérieure lorsqu'on décrit les parties finies de  $I_{\lambda_p}$ , on a

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{i \in J_{\lambda_j}} u_i \right) + s_{\lambda_p} \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

On fait de même pour les autres termes et on obtient  $\sum_{j=1}^p s_{\lambda_j} \leq \sum_{i \in I} u_i$ . Finalement, la famille  $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est sommable et sa somme est majorée par  $\sum_{i \in I} u_i$ .

Lorsque l'une des deux conditions est vérifiée, les deux le sont et on obtient les deux inégalités donc l'égalité entre les deux sommes.

### III. FAMILLES SOMMABLES

#### Définition 35 (Famille sommable)

- On dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, lorsque la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$  est sommable
- Si  $u_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $i \in I$ , on note  $u_i^+ = \max(0, u_i)$  et  $u_i^- = \max(0, -u_i)$ . Les familles  $(u_i^+)_{i \in I}$  et  $(u_i^-)_{i \in I}$  sont sommables et on pose

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

- Si  $u_j \in \mathbb{C}$  pour tout  $j \in I$ , les familles de réels  $(\operatorname{Re}(u_j))_{j \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(u_j))_{j \in I}$  sont sommables et on pose

$$\sum_{j \in I} u_j = \sum_{j \in I} \operatorname{Re}(u_j) + i \sum_{j \in I} \operatorname{Im}(u_j).$$

On a cette proposition qui indique qu'il existe une certaine partie finie qui permet de bien approcher la somme de la famille. On a plusieurs versions du résultat :

#### Proposition 74

Soit  $((u_i)_{i \in I})$  une famille sommable et  $s$  sa somme.

- *version au programme* : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J \subset I$  telle que  $\left| \sum_{i \in J} u_i - s \right| < \varepsilon$ ,

- *version améliorée* : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J \subset I$  telle que, pour toute partie finie  $K$  qui contient  $J$ ,  $\left| \sum_{i \in K} u_i - s \right| < \varepsilon$

**Remarque :** la version améliorée revient à dire que les termes de  $I \setminus J$  donnent des sommes petites. On le démontre en considérant une partie finie  $J$  telle que

$$\sum_{i \in I} |u_i| - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} |u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

et ainsi  $\sum_{i \in I \setminus J} |u_i| \leq \varepsilon$ . Si  $K$  est finie et contient  $J$  alors  $I \setminus K \subset I \setminus J$  et ainsi  $\sum_{i \in I \setminus K} |u_i| \leq \varepsilon$ .

On utilise par exemple ce résultat dans la démonstration du théorème de sommation par paquets (afin de se ramener à des sommes finies, la contribution restante étant petite).

#### Propriété 75 (Familles sommables quelconques)

- linéarité
- si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable et  $\sigma : I \rightarrow I$  est une bijection alors  $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$  est sommable et les sommes sont égales.

#### Théorème 17 (Sommation par paquets)

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille sommable. On suppose que  $I$  est réunion disjointe d'ensembles  $I_\lambda$  pour  $\lambda \in \Lambda$  avec  $\Lambda$  au plus dénombrable. On a alors

- pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $(u_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable de somme  $s_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} u_i$

- la famille  $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est sommable et  $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)$ .

**Remarque :** par rapport au théorème sur les familles positives, on a perdu l'équivalence

#### Proposition 76 (théorème de Fubini)

Si  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  sont sommables (avec  $I$  et  $J$  au plus dénombrables) alors la famille  $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \left( \sum_{i \in I} u_i \right) \left( \sum_{j \in J} v_j \right)$$

 MÉTHODE

On veut écrire la somme d'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de plusieurs manières ou la calculer (par paquets) :

- on prouve que la famille est sommable : on passe en module ou valeur absolue et on montre que la famille est sommable. Pour cela on le montre directement ou à l'aide d'une sommation par paquets sur la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$
- une fois qu'on a prouvé la sommabilité, on peut effectuer tout type de paquets pour calculer la somme.

## IV. SOMMES DOUBLES

### Théorème 18 (Sommes doubles à termes positifs)

Soit une famille de **réels positifs**  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ . La famille est sommable si et seulement si

→ pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_n a_{m,n}$  converge,

→ la série  $\sum \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$  converge

On a alors  $\sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n}$ .

**Remarque :** on peut échanger les rôles de  $m$  et  $n$  dans la caractérisation.

### Théorème 19 (Sommes doubles quelconques)

Soit une famille de réels ou de complexes  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ . La famille est sommable si et seulement si

→ pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_n |a_{m,n}|$  converge,

→ la série  $\sum \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right)$  converge

On a alors  $\sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n}$  (ainsi qu'un résultat similaire avec  $|a_{m,n}|$ ).

### Théorème 20 (Produit de Cauchy)

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  converge absolument, alors la série  $\sum w_n$  où  $w_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i}$  converge absolument et  $\left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$

**Démonstration :** avec les hypothèses, la famille  $(u_p v_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \text{ où } w_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i}$$

Pour montrer que  $\sum w_n$  converge absolument, on peut majorer  $|w_n| \leq \sum_{i=0}^n |u_i| |v_{n-i}|$  et appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille  $(|u_p| |v_q|)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$

## V. EXERCICES

### Exercice 1

Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la famille  $\left( \frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha} \right)_{p,q \geq 1}$  est-elle sommable ?

### Exercice 2

1. Soit  $\alpha > 1$ . Donner un équivalent de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .
2. Lorsque cela a un sens, montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ .

**Exercice 3**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs où  $I$  est quelconque. On suppose qu'il existe  $M$  tel que, pour toute partie finie  $J \subset I$ , on a  $\sum_{i \in J} u_i \leq M$ . À l'aide des ensembles  $M_k = \left\{ i \in I, u_i \geq \frac{1}{k} \right\}$ , montrer que  $\{i \in I, u_i \neq 0\}$  est fini ou dénombrable.

**Exercice 4**

Montrer que pour tout  $x$  tel que  $|x| < 1$ , on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$ .

**Exercice 5**

Montrer que pour  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = e \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

**Exercice 6**

Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que  $\sum a_n$  converge. Montrer que  $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \right)$  existe et calculer cette valeur.

**Exercice 7 (Mines MP)**

Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ .

1. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} (1-\lambda)^{k-n}$ .

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite sommable. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} (1-\lambda)^{k-n} \lambda^n u_k$ . Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et calculer sa somme.

**Exercice 8**

Calculer,  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1)$  où  $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$ .

**Exercice 9**

Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$  où  $d(n)$  est le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

**Exercice 10**

Montrer que la famille  $\left( \frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{n,k \geq 2}$  est sommable et en déduire  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) = \gamma$ .

**Exercice 11**

Pour  $n \geq 2$ , on note  $q_n$  le plus grand diviseur premier de  $n$ . Quelle est la nature de la série  $\sum \frac{1}{nq_n}$  ?