

15 ESPACES PROBABILISÉS

MODÉLISATION

- expérience aléatoire : expérience renouvelable mais qui, dans des conditions identiques, donne des résultats différents
- univers des possibles Ω : un ensemble qui permet de modéliser l'expérience aléatoire (les résultats qu'on peut obtenir)
- événement : une partie des résultats possibles (une partie de Ω)

Un exemple :

- expérience aléatoire : on lance un dé à 6 faces
- univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- événement : « la face obtenue est paire » : $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

I. ESPACES PROBABILISABLES

Définition 36 (Tribus, événements)

- **tribu** : soit Ω un ensemble, une tribu \mathcal{T} est un ensemble de parties de Ω tel que
 - $\Omega \in \mathcal{T}$,
 - \mathcal{T} est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$ alors $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$,
 - \mathcal{T} est stable par réunion dénombrable : si $(A_i)_{i \in I}$ est une suite d'éléments de \mathcal{T} et I est dénombrable alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ (souvent $I = \mathbb{N}$).
- **vocabulaire** :
 - les éléments de la tribu sont appelés événements
 - l'événement \bar{A} est l'événement contraire
 - A et B dans \mathcal{T} sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$
 - un système complet d'événements et un ensemble $(A_i)_{i \in I}$ (avec I au plus dénombrable) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
 - un espace probabilisable est un couple (Ω, \mathcal{T}) où \mathcal{T} est une tribu sur Ω .

Propriété 77 (Tribus)

Si (Ω, \mathcal{T}) est un espace probabilisable

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- \mathcal{T} est stable par réunion finie
- \mathcal{T} est stable par intersections finies ou dénombrables
- si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \setminus B = \{\omega \in A, \omega \notin B\} = A \cap \bar{B} \in \mathcal{T}$

On a une notion de « limite » d'une suite croissante ou décroissante d'événements :

- si $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ alors on a $A_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ et l'événement « limite » est $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (au moins l'un des événements A_k est réalisé)
- si $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ alors on a $A_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$ et l'événement « limite » est $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (tous les événements sont réalisés)

II. PROBABILITÉS

Définition 37 (Probabilités)

Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable. Une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) est une application $\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{T} & \rightarrow [0, 1] \\ A & \rightarrow \mathbb{P}(A) \end{cases}$ telle que

→ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

→ si on a une famille d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}\left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**

Propriété 78 (probabilité)

si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé :

→ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

→ si A_1, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

→ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

→ si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

→ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

→ **continuité croissante** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

→ **continuité décroissante** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

→ si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ (cette somme étant éventuellement infinie).

→ **formule du crible** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Définition 38 (Événements négligeables, presque-sûrs)

→ un événement A est négligeable lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est encore négligeable.

→ un événement presque certain (ou presque sûrs) est un événement de probabilité 1.

→ On appelle système quasi-complet d'événements, un ensemble $(A_i)_{i \in I}$ (avec I au plus dénombrable) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est presque-sûr (c'est-à-dire que le complémentaire est un événement négligeable).

III. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE**Définition 39** (Probabilité conditionnelle)

→ soit B un événement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_B : A \in \mathcal{T} \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) - on note également $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ (probabilité de A sachant B - attention « A sachant B » n'est pas un événement).

→ **formule des probabilités composées** : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \dots \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1).$$

→ **formule des probabilités totales** : si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complets d'événements non négligeables, alors, pour tout $B \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

→ **Formule de Bayes** : si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complets d'événements non négligeables, alors pour tout $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ et $k \in I$, on a

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_k)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B) \cdot \mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B) \cdot \mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \cdot \mathbb{P}(A_i)}.$$

Définition 40 (Indépendance)

→ deux événements A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$.

→ les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants lorsque pour tout $J \subset I$ fini, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$

→ si les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.

→ si A et B sont indépendants alors A et \overline{B} aussi (et \overline{A} et B - \overline{A} et \overline{B})

→ si événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants alors lorsque $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, les événements $(B_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants

IV. EXERCICES

Exercice 1

Dans un magasin, $7/10$ des appareils proviennent d'une entreprise E_1 et les autres d'une entreprise E_2 . Parmi les appareils de l'entreprise E_1 , $2/10$ sont défectueux et parmi ceux de l'entreprise E_2 , $1/10$ sont défectueux.

1. Déterminer le pourcentage d'appareils défectueux dans le magasin.
2. Un appareil donné est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il vienne de l'entreprise E_2 ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, \dots, A_n des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_i ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)$.

Exercice 3

Vous disposez d'une boîte avec 6 compartiments. Dans cette boîte il y a un nombre $n \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ de chocolats (au plus un dans chaque compartiment) avec équiprobabilité pour chaque nombre. Pour un nombre donné de chocolats, toutes les répartitions dans les compartiments sont équiprobables.

1. Choisir une modélisation.
2. Vous ouvrez le compartiment 1. Quelle est la probabilité d'avoir un chocolat ?
3. Vous n'êtes pas assez rapide et quelqu'un d'autre ouvre le compartiment 1 et a la chance d'avoir un chocolat. Vous ouvrez alors le compartiment 2. Quelle est la probabilité d'avoir un chocolat ?
4. Et si le premier n'a pas eu de chocolat ?

Exercice 4

Une urne contient v boules vertes et b boules bleues. On effectue n tirages successifs de la manière suivante :

- si l'on tire une boule verte, alors on replace cette boule dans l'urne avant le tirage suivant,
- si l'on tire une boule bleue, on élimine cette boule avant le tirage suivant.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule bleue au cours des n tirages ?
2. La seconde boule est verte. Quelle est la probabilité que la première ait été bleue ?

Exercice 5

On considère trois urnes A , B et C identiques. Elles contiennent des boules noires et blanches avec une proportion p de boules blanches. On effectue n tirages avec remise. On commence par tirer une boule dans l'urne A . Si elle est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne, sinon on tire la boule suivante dans l'une des deux autres urnes choisie de façon équiprobable. On continue avec les mêmes règles. On appelle p_n la probabilité d'avoir une boule blanche au tirage n et a_n , b_n et c_n la probabilité que le tirage n soit effectué dans l'urne A , B ou C .

On note enfin $X = (a_n \quad b_n \quad c_n)^T$

1. Donner X_1 et p_1 .
2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
3. En déduire les expressions de a_n , b_n et c_n en fonction de n .
4. Déterminer les limites des trois suites.

Exercice 6

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce de monnaie (A commence). La probabilité d'obtenir Face est $p \in]0, 1[$ à chaque lancer. Le premier des deux qui obtient Face gagne la partie.

1. Quelle est la probabilité que A gagne lors de son lancer n ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ?
3. Quelles est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p pour laquelle B a plus de chance de gagner que A ?

Exercice 7

On lance 2 dés jusqu'à ce qu'on obtienne la somme 5 ou 7.

1. Soit E_n l'événement : « on obtient la somme 5 au lancer n sans avoir obtenu 5 ou 7 avant ». Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2. Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur la somme 5.
3. Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur la somme 7.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas.

Exercice 8

On lance 5 dés à 6 faces. À l'issue du premier jet, on reprend les dés qui n'ont pas amené un 1 et on les relance. On procède ainsi jusqu'à obtenir cinq 1.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les cinq 1 en moins de m lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les cinq 1 en exactement m lancers ?

Exercice 9

Un nombre infini de joueurs notés A_1, A_2, \dots s'affrontent dans un redoutable tournoi de pile ou face (avec une pièce bien équilibrée). Les deux premiers se rencontrent, le vainqueur joue contre le joueur suivant et le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs gagne trois fois de suite. On note p_n la probabilité que le joueur A_n gagne le tournoi et q_n celle que le joueur A_n participe.

1. Déterminer une relation entre p_n et q_n .
2. Calculer q_n pour $n \leq 4$ et montrer que, pour $n \geq 5$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$.
3. En déduire q_n et p_n pour tout n .

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On pose $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. On munit Ω de la probabilité uniforme. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ divisant n . On note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω .

1. Déterminer $\mathbb{P}(D_d)$.
2. On écrit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Les événements D_{p_1}, \dots, D_{p_r} sont-ils mutuellement indépendants ?
3. On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n . Montrer que $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Exercice 11

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^N \mathbb{P}(A_k) = \prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Exercice 12 (CCINP MP)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
2. Soient A et B deux éléments incompatibles de \mathcal{T} . Montrer que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$.
3. Soient A et B deux éléments de \mathcal{T} .
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\bar{A}) - \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)\mathbb{P}(A)$.
 - (b) Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 13

Soit (Ω', \mathcal{T}') un espace probabilisable. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application. On note $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{T}'\}$. L'ensemble \mathcal{T} est-il une tribu sur Ω ?

Exercice 14 (Limite supérieure et inférieure)

On considère une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On note $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m \geq n} A_m \right)$ et $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)$. On note $B = \liminf A_n$ et $C = \limsup A_n$.

1. Justifier que B et C sont des événements.
2. Montrer que $B \subset C$.
3. Décrire en langage courant ce que signifie $\omega \in B$ et $\omega \in C$.

Exercice 15 (Lemme de Borel-Cantelli)

On utilisera les résultats sur les limites supérieures et inférieures. On considère de nouveau une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On redonne

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right).$$

1. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge :
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
 - (b) En déduire que la probabilité qu'une infinité d'événements A_n se réalisent simultanément est nulle.
2. On suppose que les événements A_n sont indépendants et que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
 - (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$.
 - (b) Montrer alors que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.
 - (c) On lance une infinité de fois une pièce. La probabilité d'obtenir Pile à chaque lancer est $p \in]0, 1[$. Quelle est la probabilité d'obtenir une infinité de fois Pile? Quelle est la probabilité d'obtenir une infinité de séquences de m Piles consécutifs?

Exercice 16

On lance indéfiniment un dé équilibré à 6 faces

1. Soit A_n l'événement « aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Soit F_k l'événement « le premier 6 est obtenu au lancer k ». Déterminer $\mathbb{P}(F_k)$.
3. Soit K l'événement « 6 n'apparaît jamais ». Déterminer $\mathbb{P}(K)$.
4. Exprimer \overline{K} en fonction des F_k . Retrouver la valeur de $\mathbb{P}(K)$.
5. Soient G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre-eux ». Calculer $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$.

Exercice 17 (Loi ζ)

Pour $a > 1$, on note P_a la probabilité sur \mathbb{N}^* définie par $p_k = \frac{1}{k^a \zeta(a)}$.

1. Justifier que P_a est bien une probabilité.
2. Calculer $P_a(2\mathbb{N}^*)$. Généraliser.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $j > 1$ et $m > 1$ pour que les événements $A = j\mathbb{N}^*$ et $B = m\mathbb{N}^*$ soient indépendants.
4. On note p_i le i -ème nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$) et $A_i = p_i\mathbb{N}^*$. Montrer que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants.
5. Soit C_n l'ensemble des entiers de \mathbb{N}^* divisibles par aucun des nombres p_1, \dots, p_n . Calculer $P_a(C_n)$.
6. En déduire la formule d'Euler $\zeta(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^a} \right)^{-1}$.

Exercice 18 (Centrale)

☆

On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires entre 1 et n soient premiers entre eux. On veut montrer que la limite de $r_n = \frac{6}{\pi^2}$. On

donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On définit une fonction μ par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \{(a, b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a \wedge b = 1\}$, on note p_1, \dots, p_k les nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $U_i = \{(a, b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, p_i | a \text{ et } p_i | b\}$. Exprimer A_n en fonction des U_i .
2. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de multiple de ℓ inférieurs ou égaux à n .
3. En déduire le cardinal de $\bigcap_{i \in I} U_i$ où I est une partie non vide de $\llbracket 1; k \rrbracket$.
4. Montrer que $\text{card}(A_n) = \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$.
5. Conclure (☆☆).

Exercice 19

☆

Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω vérifiant

$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$$

On pose

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n \in T} A_n; T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

1. Montrer que \mathcal{A} est une tribu de Ω .
2. On suppose l'ensemble Ω dénombrable. Montrer que toute tribu infinie sur Ω est de la forme ci-dessus pour une certaine famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Existe-t-il des tribus dénombrables sur Ω dénombrable?