

# 15 ESPACES VECTORIELS NORMÉS - TOPOLOGIE, CONTINUITÉ

## I. TOPOLOGIE DES E.V.N.

### OUVERTS

#### Définition 38 (ouvert, voisinage)

- une partie  $O$  de  $E$  est ouverte lorsque, pour tout  $x \in O$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset O$ .
- une partie  $A$  de  $E$  est un voisinage de  $x$  lorsqu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$  ( $A$  contient une boule ouverte centrée en  $x$ ).

#### Propriété 56 (des ouverts)

- $E, \emptyset$ , les boules ouvertes sont ouverts. Les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  sont ouverts.
- une union quelconque d'ouverts, une intersection finie d'ouverts sont des ouverts.

#### Définition 39 (intérieur)

- $x$  est intérieur à  $A$  lorsqu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ .
- l'intérieur de  $A$ , noté  $\overset{\circ}{A}$ , est l'ensemble des points intérieurs à  $A$  - c'est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ , à savoir la réunion de tous les ouverts de  $E$  contenus dans  $A$  :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \text{ ouvert } \subset A} O.$$

- $A$  est ouvert si et seulement si  $A = \overset{\circ}{A}$ .

### FERMÉS

#### Définition 40 (fermé)

une partie  $F$  de  $E$  est fermée lorsque  $E \setminus F$  est ouvert.

#### Propriété 57 (des fermés)

- $E, \emptyset$ , les boules fermées sont fermés.
- une union finie de fermés, une intersection quelconque de fermés sont des fermés.

#### Définition 41 (adhérence)

- On dit que  $x$  est adhérent à  $A$  lorsque, pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .
- L'adhérence de  $A$ , notée  $\bar{A}$  est l'ensemble des points adhérents à  $A$ . C'est le plus petit fermé qui contient  $A$ , à savoir

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F \text{ fermé}} F.$$

- $A$  est fermé si et seulement si  $A = \bar{A}$

#### Propriété 58 (caractérisations séquentielles et autres)

- $x \in \bar{A}$  si et seulement si il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .
- $F$  est fermé si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  de  $F$  qui converge vers  $x \in E$ , on a  $x \in F$ .
- une partie  $A$  est dense dans  $E$  lorsque  $\bar{A} = E$  (ou dans  $X$  lorsque  $\bar{A} = X$ ).
- on appelle frontière de  $A$  le fermé  $\text{Fr}A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

**Remarque :** l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé, plus précisément  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\{x_k, k \geq n\}}$ .

**Exercice 1 (CCP - 34)**

Soit  $A$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé  $E$

1. Démontrez que  $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .
2. Démontrez que si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\bar{A}$  aussi.
3. Démontrez que si  $A$  est convexe, alors  $\bar{A}$  aussi.

**Exercice 2 (CCP - 44)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.  
(b) Montrer que  $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ .
2. Montrer que  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
3. (a) Montrer que  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ .  
(b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

**Exercice 3 (CCP - 37)**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . On pose pour  $f \in E$ ,  $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$  et  $N_1(f) = \int_0^1 |f|$ .

1. (a) Démontrez succinctement que  $N_1$  et  $N_\infty$  sont deux normes sur  $E$ .  
(b) Démontrez qu'il existe  $k > 0$  tel que  $N_1 \leq k \cdot N_\infty$ .  
(c) Démontrez que tout ouvert pour  $N_1$  est un ouvert pour  $N_\infty$ .
2. Démontrez que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 4**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie convexe de  $E$ .

1. Montrer que l'adhérence de  $A$  est convexe.
2. Montrer que l'intérieur de  $A$  est convexe.

**Exercice 5 (Topologie et sous-espaces vectoriels)**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \subset F$ . Montrer que  $E = F$ .
2. Montrer que  $\bar{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. On suppose que  $F$  est un hyperplan de  $E$ . Montrer l'alternative :  $F$  est fermé ou  $F$  est dense dans  $E$ . Trouver des exemples.
4. On suppose que  $F$  est de dimension finie. Montrer que  $F$  est fermé.

**TOPOLOGIE RELATIVE****Définition 42 (topologie relative)**

soit  $A$  une partie de  $E$ , une partie  $B \subset A$  est

- un ouvert relatif de  $A$  lorsqu'il existe  $O$  ouvert de  $E$  tel que  $B = A \cap O$ ,
- un fermé relatif de  $A$  lorsqu'il existe  $F$  fermé de  $E$  tel que  $B = A \cap F$ ,
- un voisinage de  $a$  relatif à  $A$  lorsqu'il existe  $\mathcal{V}$  voisinage de  $a$  dans  $E$  tel que  $B = A \cap \mathcal{V}$ ,

**COMPACTS****Définition 43 (compact)**

soit  $K$  une partie de  $E$ . On dit que  $K$  est compact lorsque toute suite d'éléments de  $K$  admet une valeur d'adhérence dans  $K$  (i.e. admet une suite extraite convergente dans  $K$ ).

**Théorème 11 (Bolzano-Weierstrass)**

soit  $(u_n)$  une suite bornée de réels, alors on peut en extraire une suite convergente. Ce résultat se généralise pour les suites complexes et les suites dans un evn de dimension finie.

**Propriété 59 (propriétés topologiques)**

- si  $K$  est une partie compacte de  $E$ , alors  $K$  est fermé et borné.
- si  $K'$  est une partie d'un compact  $K$ , alors  $K'$  est compact si et seulement si  $K'$  est fermé.
- si  $E$  est de dimension finie, alors les compacts sont exactement les fermés bornés.
- Un produit fini de compacts est encore compact (dans l'evn produit usuel).
- **important** : Si  $(u_n)$  est une suite d'un compact qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence  $\ell$  alors cette suite converge vers  $\ell$ .

## II. ÉTUDE LOCALE D'UNE APPLICATION

### DÉFINITIONS

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  sont deux evn et  $A \subset E$  non vide.

**Définition 44**

- **Limite** : soit  $f : A \rightarrow F$  et  $a$  adhérent à  $A$ . On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Cette limite est alors unique. Elle est notée  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

- **Continuité** : soit  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in A$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . On dit que  $f$  est continue sur  $A$  lorsqu'elle est continue en tout point de  $A$ .

### CARACTÉRISATIONS DE LA LIMITE/CONTINUITÉ

**Proposition 60 (Caractérisations)**

- **par les suites** : on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ , alors  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$ .
- **par les voisinages** : on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si et seulement si pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\ell$ , il existe  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $a$  tel que  $f(\mathcal{U} \cap A) \subset \mathcal{V}$ .

### OPÉRATIONS

**Proposition 61 (Opérations)**

- **limites** : soit  $f, g : A \rightarrow F$  qui admettent une limite, respectivement  $\ell$  et  $\ell'$  en  $a \in \bar{A}$ .
  - pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \lambda g(x)) = \ell + \lambda \ell'$ ,
  - si  $F$  est une algèbre normée, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell \cdot \ell'$ ,
- **composition** : soit  $f : A \rightarrow F$  et  $g : B \rightarrow G$  avec  $f(A) \subset B$ . Soit  $a \in \bar{A}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$ .
- **continuité** : on a des résultats semblables pour la continuité en  $a$ , et la continuité sur  $A$ .

### CONTINUITÉ UNIFORME

**Définition 45 (continuité uniforme)**

soit  $f : A \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $A$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

La continuité uniforme entraîne la continuité.

**LIEN AVEC LA TOPOLOGIE****Proposition 62** (*images réciproques*)

soit  $f : A \rightarrow F$ , alors on a l'équivalence entre

- $f$  est continue sur  $A$ ,
- pour tout ouvert  $O$  de  $F$ ,  $f^{-1}(O)$  est un ouvert relatif de  $A$ .
- pour tout fermé  $F'$  de  $F$ ,  $f^{-1}(F')$  est un fermé relatif de  $A$ .

**Exercice 6**

Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que le sous-ensemble des matrices symétriques (puis antisymétriques) de  $E$  est une partie fermée de  $E$ .
2. Soit  $B$  une matrice antisymétrique. On suppose que la suite  $(B^n)$  converge vers une matrice  $C$ . Que peut-on dire de la matrice  $C$ ?

**Exercice 7**

On note  $F$  l'ensemble des triplets  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admette deux solutions réelles distinctes. Montrer que  $F$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

**CONTINUITÉ ET COMPACTS****Proposition 63** (*lien avec la compacité*)

- **image directe** : si  $f$  est continue sur  $A$ , si  $K$  est un compact de  $E$  inclus dans  $A$ , alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .
- **continuité uniforme** : si  $f : K \rightarrow E$  est continue et  $K$  compact, alors  $f$  est uniformément continue sur  $K$ .

**III. QUELQUES SYNTHÈSES****Propriété 64**

normes équivalentes si  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes, alors

- elles conservent la nature des suites et la valeur des limites (suites), les valeurs d'adhérence
- elles conservent les propriétés de limites et continuité (fonctions), le fait d'être lipschitzien,
- elles ont les mêmes ouverts, fermés, bornés (mais les boules sont différentes), les adhérences et intérieurs sont conservés.

**Propriété 65** (*Dimension finie*)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie

- toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes,
- les compacts de  $E$  sont les fermés bornés,
- les sous-espaces vectoriels de  $E$  sont fermés,
- une suite de  $E$  converge si et seulement si elle converge coordonnées par coordonnées (dans une base),
- une fonction de  $A$  vers  $E$  (arrivée de dimension finie) admet une limite en  $a$  (resp. est continue en  $a$ ) si et seulement si ses applications composantes admettent une limite en  $a$  (resp. est continue en  $a$ ),

**IV. EXERCICES****SUITES D'UN EVN****Exercice 8**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E = M_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$  (la norme est constante sur les classes de similitude).

1. Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $E$ .
2. Montrer que, pour tout  $A, B \in E$ , alors  $\|AB\| = \|BA\|$ .
3. En déduire une contradiction.

**Exercice 9**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé, et  $F$  une sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie.

1. Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in F$  tel que  $\|x - y\| = d(x, F)$  (on pourra construire une suite  $(y_n)$  de  $F$  telle que  $\|x - y_n\|$  converge vers la distance).
2. Montrer que si  $F \neq E$ , alors il existe  $u \in E$  tel que  $d(u, F) = \|u\| = 1$ .
3. En déduire que si  $E$  est de dimension infinie, alors on peut construire une suite de vecteurs unitaires de  $E$ , distants deux à deux d'au moins 1.
4. Montrer que si la boule unité de  $E$  est compacte, alors  $E$  est de dimension finie.

**Exercice 10**

Soit  $(u_n)$  une suite bornée de réels. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{2} u_{2n} = 1$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**TOPOLOGIE****Exercice 11 (Somme de parties)**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On note  $A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$ .

1. Montrer que si  $A$  est ouvert, alors  $A + B$  est ouvert.
2. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compacts, alors  $A + B$  est compact.
3. Montrer que si  $A$  est compact et  $B$  fermé, alors  $A + B$  est fermé.
4. Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, xy = 1\}$  et  $B = \{0\} \times \mathbb{R}^-$  deux parties de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont fermées. Que peut-on dire de  $A + B$ ?

**Exercice 12 (Diamètre)**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Soit  $A$  une partie non vide bornée de  $E$ . Justifier l'existence de  $\sup\{\|a - b\|, a, b \in A\}$ . On note  $\delta(A)$  ce réel, et on l'appelle diamètre de  $A$ .
2. Montrer que  $\delta(A) = \delta(\bar{A})$ .
3. On suppose que  $A$  est compacte. Montrer qu'il existe  $a, b \in A$  tels que  $\|a - b\| = \delta(A)$ .
4. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de compacts de  $E$ , et  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . A-t-on  $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(A_n)$ ?

**Exercice 13 (Frontière)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On note  $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  la frontière de  $A$ .

1. Comparer  $\text{Fr}(A)$  et  $\text{Fr}(E \setminus A)$ .
2. Montrer que  $\text{Fr}(\bar{A}) \subset \text{Fr}(A)$  et  $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Fr}(A)$ . Ces inclusions sont-elles des égalités?
3. Montrer que  $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$ . Est-ce une égalité?

**Exercice 14 (Mines MP)**

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  de carré intégrable, muni de la norme  $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$ . Soit  $F = \{f \in E, \int_0^1 |f| < 1\}$ . L'ensemble est-il ouvert? convexe? borné?

**Exercice 15 (Mines MP)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\Omega = \{(x, y) \in E^2, (x, y) \text{ libre}\}$ . Montrer que  $\Omega$  est un ouvert de  $E^2$

**Exercice 16**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $K$  un compact de  $E$ . Soit  $f : K \rightarrow K$  telle que

$$x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que  $f$  possède au plus un point fixe.
2. A l'aide la fonction

$$D : \begin{cases} K & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto \|f(z) - z\| \end{cases}$$

montrer que  $f$  admet un point fixe  $a$ .

3. Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in K$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Montrer que cette suite converge vers  $a$  (*Indic* : étudier  $\|u_n - a\|$ ).

**Exercice 17**

(Matrices de projections) Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{P} = \{M \in E, M^2 = M\}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}$  est-il ouvert? borné? fermé? compact? Déterminer l'intérieur et l'adhérence de  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 18 (Mines MP)**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $A \subset E$ .

1. Montrer que  $x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipschitzienne.
2. Soit  $x \in E$ . Montrer que  $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ .
3. Soit  $K$  un compact non vide de  $E$  et  $x_0 \in E$ . Montrer qu'il existe  $a \in K$  tel que  $\|x_0 - a\| = d(x_0, K)$ .
4. Soit  $F$  un fermé non vide de  $E$ ,  $x_0 \notin F$  et  $a \in F$ . Montrer que la distance  $d(x_0, F \cap \bar{B}(x_0, \|x_0 - a\|))$  est atteinte et en déduire qu'il existe  $b \in F$  tel que  $d(x_0, F) = \|x_0 - b\|$ .

**Exercice 19 (Mines MP)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ .

1. Que dire de  $u$  si sa matrice dans toute base est diagonale?
2. Que dire de  $u$  s'il a même matrice dans toute base?

**Exercice 20 (Mines MP)**

Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$  est muni d'une norme, et une matrice  $A$  dont la suite des puissances  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est bornée. On pose alors  $B_p = \frac{I_n + A + \dots + A^{p-1}}{p}$  pour  $p \geq 1$ .

1. Montrer que  $(B_p)$  admet une valeur d'adhérence. On en choisit une, notée  $B$ . Montrer que  $BA = AB = B$  puis que  $B^2 = B$ .
2. Montrer que  $\ker B = \text{Im}(A - I_n)$  et que  $\text{Im} B = \ker(A - I_n)$ .
3. Déduire de tout cela que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} B_p = B$ .

**Exercice 21**

Soit  $E$  l'ensemble des suites bornées muni de la norme infini. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

**Exercice 22**

1. Soit  $K$  un compact d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $f : K \rightarrow K$  une isométrie (pour tout  $x, y \in E$ ,  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ ). Montrer que  $f$  est bijective.
2. Soit  $K$  compact de  $E$  est  $f : K \rightarrow K$  continue telle que  $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ . Montrer que  $f$  est une isométrie bijective. On étudiera les suites  $x_n = f^n(x_0)$  et  $y_n = f^n(y_0)$  pour  $x_0$  et  $y_0$  dans  $K$ .

**Exercice 23 (Mines MP)**

1. Soit  $(K_n)$  une suite décroissante de fermés de  $[a, b]$  d'intersection vide. Montrer qu'il existe  $n_0$  tel que  $K_{n_0} = \emptyset$ .
2. Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions continues sur  $[a, b]$ , convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Montrer que la convergence est uniforme (indication : poser  $g_n = f - f_n$  et utiliser, pour  $\varepsilon > 0$  les ensembles  $K_N = \{x \in [a, b], g_N(x) \geq \varepsilon\}$ ).

**Exercice 24 (adhérence des matrices diagonalisables)**

1. Soit  $P$  un polynôme réel non nul unitaire de degré  $n$ . Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$ .
2. Montrer que  $M \mapsto \chi_M$  est continue sur  $M_n(\mathbb{K})$ .
3. Soit  $T_n$  l'ensemble des matrices trigonalisables de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $D_n$  les diagonalisables,  $\Delta_n$  diagonalisables à valeurs propres distinctes. Montrer que

$$\overline{D_n} = \overline{\Delta_n} = T_n.$$

**Exercice 25 (Centrale MP)**

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  tel que, pour tout  $g \in G$ , il existe un voisinage  $V$  de  $g$  dans  $\mathbb{C}^*$  tel que  $V \cap G = \{g\}$ .

1. Montrer que, pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}^*$ ,  $G \cap K$  est fini.
2. Montrer que  $G \cap \mathbb{U}$  est cyclique.
3. On suppose que  $G$  n'est pas contenu dans  $\mathbb{U}$ . Soit  $\Lambda = \{z \in G, |z| > 1\}$ . Montrer que  $\Lambda$  admet un plus petit élément (pour la norme). En déduire  $G$ .

**CONTINUITÉ, CONTINUITÉ UNIFORME****Exercice 26 (Mines MP)**

1. Montrer que toute matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  est limite d'une suite de matrices inversibles.
2. Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$ .
3. Donner le rang de  $\operatorname{Com}(A)$  en fonction de celui de  $A$ .

**Exercice 27**

1. Soit  $(u_n)$  une suite convergente d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ . On note  $\ell$  la limite de cette suite. Montrer que  $F = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$  est fermé.
2. Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que l'image réciproque de tout compact est compacte. Montrer que  $f$  est une application fermée, c'est-à-dire que l'image directe de tout fermé est un fermé.

**Exercice 28**

Soit  $f$  une application continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer l'équivalence entre

1. l'image réciproque de tout compact est compact.
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = +\infty$ .

**Exercice 29**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ , mais qu'elle n'est pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 30**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $G_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$  le graphe de  $f$ .

1. Montrer que si  $f$  est continue, alors  $G_f$  est fermé.
2. Si  $f$  est bornée et si  $G_f$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $f$  est continue.
3. Le résultat précédent subsiste-t-il si  $f$  n'est pas bornée?

**Exercice 31**

Soit  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une application uniformément continue. On suppose que, pour tout  $x > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**Exercice 32**

Soient  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$  telle que,

$$\exists c > 0, \exists R > 0, \forall x \in E, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > c \|x\|.$$

Montrer que  $f$  admet un minimum.

**Exercice 33**

Soit  $f$  une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs réelles ou complexes. On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt$ . Montrer que  $F$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 34 (Centrale MP)**

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et de sa distance associée. On dit qu'une suite  $(x_n)$  de  $E$  vérifie  $(\mathcal{C})$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon.$$

1. Soient  $R$  et  $r$  deux réels strictement positifs ainsi que  $a$  et  $b$  deux points de  $E$ . Montrer que  $B_f(a, r) \subset B_f(b, R)$  si et seulement si  $d(a, b) \leq R - r$ .
2. On suppose  $E = \mathbb{R}$ . Montrer que toute suite vérifiant  $(\mathcal{C})$  est convergente. Réciproque?
3. On suppose que toute suite de  $E$  vérifiant  $(\mathcal{C})$  est convergente. Montrer que l'intersection de toute suite décroissante de boules fermées est une boule fermée.