

16

RÉVISIONS : CONVEXITÉ

I. BARYCENTRES

Définition 46 (fonction de Leibniz, barycentre)

Si $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ est un ensemble de points pondérés, on note $f(M) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{A_i M}$ et $m = \sum_{i=1}^p m_i$. On a pour tout O, M , $f(M) = f(O) + m \overrightarrow{OM}$,

d'où

- si $m = 0$, alors f est un vecteur constant,
- si $m \neq 0$, alors f est bijective et

- il existe un unique point G tel que $f(G) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0}$,

- pour tout M , $\sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{A_i M} = m \overrightarrow{GM}$.

Lorsque $m \neq 0$, on note $G = \text{bar}((A_i, \alpha_i), i \in \llbracket 1; p \rrbracket)$

Propriété 66 (barycentres)

Soit $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ de masse totale non nulle

→ homogénéité : pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\text{bar}((A_i, \alpha_i), i \in \llbracket 1; p \rrbracket) = \text{bar}((A_i, k\alpha_i), i \in \llbracket 1; p \rrbracket)$.

→ associativité : $\text{bar}((A_i, \alpha_i)) = \text{bar}((G_1, m_1), (G_2, m_2))$ si $m_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ et $m_2 = \sum_{i=k+1}^p \alpha_i$ sont non nuls, $G_1 = \text{bar}((A_i, \alpha_i), i \in \llbracket 1; k \rrbracket)$, $G_2 = \text{bar}((A_i, \alpha_i), i \in \llbracket k+1; p \rrbracket)$. On peut généraliser en remplaçant n'importe quel paquet de points de masse totale non nulle par le barycentre avec sa masse.

→ soit A, B deux points.

- $\{\lambda A + \mu B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu \neq 0\} = \{\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la droite (AB) ,
- $\{\lambda A + \mu B, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu \neq 0\} = \{\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in [0, 1]\}$ est le segment $[AB]$.

Exercice 1

Soient a, b et c trois réels distincts. Exprimer b comme barycentre de a et c .

II. PARTIES CONVEXES

Définition 47 (partie convexe d'un \mathbb{K} -ev E)

On dit que $A \subset E$ est *convexe* lorsque, pour tout $x, y \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Propriété 67 (convexité)

→ Si A est convexe, pour tout $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ avec $A_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i > 0$, le barycentre $\text{bar}((A_i, \alpha_i), i \in \llbracket 1; p \rrbracket)$ est toujours dans A ,

→ une intersection de convexes est convexe,

→ on appelle combinaison linéaire convexe d'éléments de A tout vecteur x qui s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ avec $a_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ (barycentre des (a_i, λ_i)). Un convexe est stable par combinaisons linéaires convexes.

Exercice 2

Montrer que la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 ($B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$) est convexe. Idem avec la boule unité ouverte ($B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$)



III. FONCTIONS CONVEXES

Définition 48 (fonction convexe)

La fonction f est convexe sur I lorsque, pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Remarque : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On note $Epi(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I \text{ et } f(x) \leq y\}$ l'épigraphe de f .

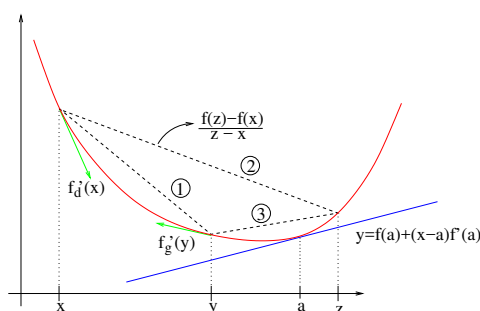
Exercice 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. Montrer que f est une fonction convexe si et seulement si $Epi(f)$ est une partie convexe.

Propriété 68 (caractérisation des fonctions convexes)

On a l'équivalence

- f est convexe sur I ,
- si $x < y < z$, $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$ (formule des 3 pentes : ① ≤ ② ≤ ③),
- pour tout $a \in I$, $u \rightarrow \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.



Exercice 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soient $a < b$ dans I . On note (D) la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. Montrer que le graphe de f est sous la droite (D) entre A et B et au dessus en dehors.

Propriété 69

Si f est convexe sur I ,

- $f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i f(x_i)$ avec $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ et $x_i \in I$,
- f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point a de $\overset{\circ}{I}$ et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$,
- f est continue sur $\overset{\circ}{I}$,
- si $x < y$, $f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y)$,
- f'_g et f'_d sont croissantes sur $\overset{\circ}{I}$,
- si f est dérivable en a , alors, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ (courbe au dessus de ses tangentes).

Propriété 70 (autres caractérisations)

- Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur $\overset{\circ}{I}$.
- Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur I , alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
- Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

**Propriété 71 (Inégalités de convexité)**

→ position par rapport à la tangente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x \quad , \quad \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

→ position par rapport à une corde :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

→ avec n valeurs :

$$\text{si } x_1, \dots, x_n > 0, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad (\text{concavité du logarithme})$$

L'ESSENTIEL

- définition de la convexité $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, interprétations géométriques
- position par rapport à la tangente *lorsque la fonction est dérivable en un point*,
- inégalité des trois pentes (simplement avec f convexe, *sans autre hypothèse de régularité*),
- régularité et caractérisation avec f'' lorsque f est \mathcal{C}^2 .
- inégalités de convexité

Exercice 5Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On suppose que f est bornée sur \mathbb{R} . Montrer que f est constante.**Exercice 6**Soient x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.**Exercice 7**Soient f et g deux fonctions convexes sur I . Montrer que $\sup(f, g)$ est convexe sur I . Que peut-on dire de $\inf(f, g)$?**IV. EXERCICES****Exercice 8**Montrer qu'une fonction à la fois convexe et concave sur un intervalle I de \mathbb{R} est affine.**Exercice 9**

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .
2. Soient x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs. Montrer que

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \right)^{1/n}.$$

3. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right)^{1/n}.$$

Exercice 10Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $f(a) = f(b) = 0$ ($a < b$) et $|f''| \leq M$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M(x-a)(b-x)$.**Exercice 11**Soit $a > 0$. Dans le plan affine euclidien, on considère deux points A, B avec $a = AB$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + 3MB^2 = 2a^2$ (on pourra décomposer les distances en passant par un barycentre bien choisi).

**Exercice 12**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que $f \geq 0$.
2. On suppose que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$. Montrer que la courbe est au dessus de l'asymptote.

Exercice 13

1. Soit f une fonction convexe croissante sur \mathbb{R} et g une fonction convexe sur I (à valeurs dans \mathbb{R}). Montrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln f$ est convexe (on dit que f est logarithmiquement convexe) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.