

16

NORMES, SUITES

I. NORMES

DÉFINITIONS

Définition 41 (Norme)

on appelle norme sur E une application :

- $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (existence et positivité),
- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie),
- $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité),
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On notera $\|\cdot\|$ à la place de N .

Proposition 79 (Différentes normes)

- **norme euclidienne** : si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme. Une norme provenant d'un produit scalaire est appelée *norme euclidienne*.
- **norme induite** : si F est un sev de E , l'application $x \mapsto \|x\|_F$ définit une norme sur F , appelée norme induite sur F .
- **norme produit** : si $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des \mathbb{K} -ev, on munit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ d'une norme par

$$\|(x_1, \dots, x_p)\| = \sup_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} N_i(x_i).$$

Définition 42 (Boules)

- boule ouvert de centre a , de rayon r : $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$
- boule fermé de centre a , de rayon r : $\bar{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$
- sphère de centre a , de rayon r : $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$

On obtient ces boules à partir des boules $B(0, 1)$ et $\bar{B}(0, 1)$ par translation et homothétie. Les boules sont convexes.

Définition 43 (Algèbre normée)

on dit qu'une algèbre $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée, lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est un evn et que la norme vérifie $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $x, y \in E$. On dit que c'est une algèbre normée unitaire si, de plus, $\|1_E\| = 1$.

Définition 44 (Parties bornées)

- une partie A de E est bornée lorsqu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $a \in A$, $\|a\| \leq M$. Une partie A est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule.
- une application f de X dans $(E, \|\cdot\|)$ est bornée lorsque $f(X)$ est une partie bornée de E (il existe M tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$).

Définition 45 (Applications lipschitziennes)

- Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$. Elle est K -lipschitzienne lorsque, pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$.
- L'ensemble des applications K -lipschitziennes n'est pas un espace vectoriel, celui des applications lipschitziennes en est un.

DISTANCE

Proposition 80 (Distances)

- **distance associée à une norme** : l'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E , appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$.
- **distance à une partie** : si $A \subset E$ non vide, on peut définir la distance à A par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Cette distance est 1-lipschitzienne : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

II. SUITES

LIMITE

Définition 46 (Limite)

une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Si la limite existe, elle est unique. Une suite convergente est bornée. On dispose des opérations usuelles sur les limites (combinaison linéaire, produit dans une algèbre normée). Dans un espace produit muni de la norme infinie produit, une suite converge si, et seulement si chaque suite composante converge.

Définition 47 (densité)

On dit qu'une partie X est dense dans une partie A si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X .

NORMES ÉQUIVALENTES

Définition 48

domination, équivalence soit N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que

- N_1 domine N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$.
- N_1 et N_2 sont équivalentes lorsqu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\beta N_1 \leq N_2 \leq \alpha N_1.$$



MÉTHODE - NON-ÉQUIVALENCE

pour prouver qu'une norme N_1 n'est pas dominée par N_2 , on essaie de construire une suite de vecteurs telle que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}$ est de limite infinie - pour cela on peut essayer de construire une suite de vecteurs unitaires pour l'une des normes (et de limite nulle ou infinie - suivant le sens - pour les normes de l'autre).

Propriété 81

- N_1 domine N_2 si et seulement si toute suite convergente pour N_1 converge pour N_2 (et vers la même limite).
- deux normes sont équivalentes si et seulement si elles ont exactement les mêmes suites convergentes.

Théorème 21 (dimension finie)

- si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.
- si $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de l'evn de dimension finie E , on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^p u_n^{(k)} e_k$. Si $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(k)} = \ell_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1; p \rrbracket.$$

VALEURS D'ADHÉRENCE

Définition 49 (Valeur d'adhérence)

on dit que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite extraite qui converge vers ℓ .

Proposition 82 (lien avec la limite)

soit (u_n) une suite de E .

- si (u_n) converge vers ℓ , alors la suite n'admet qu'une valeur d'adhérence ℓ - si une suite admet deux valeurs d'adhérence, elle diverge.
- une suite n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente.
- une suite de réels ou de complexes bornée admet une valeur d'adhérence (th. de Bolzano-Weierstrass).

III. EXERCICES

NORMES, NORMES ÉQUIVALENTES

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application

$$P \mapsto \|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Exercice 2

Montrer que l'application $A \mapsto (\operatorname{tr}(A^T \cdot A))^{1/2}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (on dit que c'est une norme matricielle).

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère :

$$N((x, y)) = \sup_{t \in [0,1]} |x + t y|.$$

1. Montrer que N est bien une norme sur \mathbb{R}^2 .
2. Dessiner la boule unité pour cette norme.

Exercice 4

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})\}$. On pose pour tout $f \in E$,

$$N(f) = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme euclidienne sur E .
2. Établir que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes (on pourra utiliser la suite (f_n) où $f_n(x) = x^n$).

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et (x_0, \dots, x_p) des réels deux à deux distincts. On pose, pour $Q \in E$

$$N(Q) = \sum_{k=0}^p |Q(x_k)|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme.

Exercice 6

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E et B_1 et B_2 les boules ouvertes unité pour N_1 et N_2 . Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.

Exercice 7 (IMT MP 2019)

Pour $f \in E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup \left\{ \left| \int_0^1 f(t) t^n dt \right| ; n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 8

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée et telle que } u_0 = 0\}$. On définit

$$\begin{cases} N_\infty(u) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \\ N(u) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| \end{cases}$$

1. Montrer qu'on obtient bien deux normes.
2. Montrer que $N \leq 2N_\infty$ et que la majoration est optimale.
3. Montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 9

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on définit

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}, X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}.$$

où $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right],$$

c'est-à-dire le maximum des normes $\| \cdot \|_1$ des lignes de A . Justifier que l'application $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ et que, de plus, pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Exercice 10 (normes p)

Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$. Soit $p \in]1, +\infty[$ et q le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, on a $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.
2. En déduire l'inégalité de Hölder : pour tout $f, g \in E$,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

On commencera par le montrer dans le cas où $\int_a^b |f(t)|^p dt = 1 = \int_a^b |g(t)|^q dt$.

3. En utilisant $|f+g|^p = |f+g|^{p-1} \cdot |f+g|$, montrer que, pour $f, g \in E$, on a

$$\left(\int_a^b |f+g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{1/p}.$$

En déduire que $f \mapsto \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}$ est une norme sur E .

Exercice 11 (CCINP MP)

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.

1. (a) Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
(b) Montrer que convergence forte implique convergence faible
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers $x \iff (x_n)$ converge faiblement vers x et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Exercice 12 (Mines MP)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. On fixe $f \in E$ et on pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g (indication : considérer $h : t \mapsto f(t)e^t$).
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $f \in E, \|f\|_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes $\| \cdot \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes?

Exercice 13 (Mines MP)

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $Q \in E \setminus \{0\}$ et $P \in E$, soit $N_Q(P) = \|PQ\|_{\infty, [-1, 1]}$.

1. Montrer que, si $Q \in E \setminus \{0\}$, N_Q est une norme sur E .
2. Soit $Q \in E \setminus \{0\}$. Les normes N_Q et N_1 (celle pour $Q = 1$) sont-elles équivalentes?