18 SÉRIES ENTIÈRES

I. RAYON DE CONVERGENCE

Définition 58 *(Rayon de convergence)*

Soit une série entière $\sum a_n z^n$

- → **lemme d'Abel** : si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- → il existe un unique $R \geqslant 0$ ou $+\infty$ tel que
  - si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument,
  - si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- → on a

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\} = \sup\left\{r \geqslant 0, \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\right\} = \sup\left\{r \geqslant 0, \sum a_n r^n \text{ cv absolument}\right\}.$$

Propriété 93 *(Convergence)*

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R et $u_n : z \mapsto a_n z^n$, alors

- → $\sum u_n$ converge absolument sur $B(0,R)$,
- → $\sum u_n$ converge normalement sur $\overline{B}(0,r)$ si $r < R$.

notamment $z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $B(0,R)$.

Propriété 94 *(Rayon de convergence)*

soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b

- → **comparaison** :
  - s'il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$,
  - si $a_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(b_n)$ ou $a_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$,
  - si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$
- → **opérations** :
  - le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$ - avec égalité si $R_a \neq R_b$,
  - le rayon de convergence de la série produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$
- → **dérivation/intégration** : le rayon de convergence de la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ et de la série primitive $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est encore R_a.

MÉTHODE - DÉTERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE

On cherche le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$:

- → critère de d'Alembert (en se ramenant à une série numérique $\sum u_n$ avec u_n qui ne s'annule pas),
- → comparaison du terme général (essentiellement recherche d'un équivalent simple de a_n)
- → utilisation de la définition : si on trouve $r \geqslant 0$ tel que $\sum a_n r^n$ converge, $a_n r^n$ tend vers 0 ou est bornée alors $R \geqslant r$ - si on trouve $r \geqslant 0$ tel que $\sum |a_n r^n|$ diverge ou $|a_n r^n|$ non bornée/tend vers $+\infty$ alors $R \leqslant r$.
- → utilisation des propriétés pour le rayon de convergence de la somme/du produit de deux séries entières
- → calcul du rayon de convergence de la série primitive/dérivée (si cela simplifie le terme général)

II. Séries entières d'une variable réelle

Propriété 95 *(Régularités)*

soit $u_n : x \mapsto a_n x^n$ et $\sum u_n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

- → **Continuité** : f est définie et continue sur $]-R, R[$ et $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[-r, r]$ avec $0 < r < R$.
- → **Continuité au bord** : si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue en R ($\lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.
- → **Primitive** : pour tout $x \in]-R, R[$, on a $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (et même rayon de convergence).
- → **Dérivée** : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ (et même rayon de convergence).
- → **Dérivées supérieures** : f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}$ (et même rayon de convergence).

Propriété 96

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

- → **coefficients** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$,
- → **parité** : f est paire (resp. impaire) si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ (resp. $a_{2p} = 0$),
- → **unicité** : s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

III. Développement en série entière

Définition 59 *(développement en série entière)*

- → On dit qu'une fonction f d'une variable réelle admet un développement en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $\alpha \in]0, R]$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
- → On dit qu'une fonction f d'une variable complexe admet un développement en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $\alpha \in]0, R]$ tel que, pour tout $z \in B(0, \alpha)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

on dit également que f est développable en série entière au voisinage de 0 (ou en 0 sur $]-\alpha, \alpha[$ ou $B(0, \alpha)$)

Méthode - existence du DSE

on veut prouver que f, une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$, est DSE en 0 :

- → pratique : on montre que $f(x)$ coïncide avec la somme d'une série entière par le calcul (somme, produit, dérivée, primitives et DSE usuels),
- → théorique : on utilise la formule de Taylor avec reste intégral : on fixe x, on écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

  et on prouve que $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (à x fixé).
- → autre : utilisation d'équations différentielles, d'équations fonctionelles…

DSE À CONNAITRE

$\sin x$	=	$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$	=	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$R=+\infty$
$\cos x$	=	$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}$	=	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$R=+\infty$
e^x	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$	=	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$R=+\infty$
$\operatorname{sh} x$	=	$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$	=	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$R=+\infty$
$\operatorname{ch} x$	=	$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!}$	=	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$R=+\infty$
$\frac{1}{1+x}$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$	=	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$	$R=1$
$\frac{1}{1-x}$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$	=	$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$	$R=1$
$\ln(1+x)$	=	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	=	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$	$R=1$
$\arctan(x)$	=	$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$	=	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	$R=1$
$(1+x)^\alpha$	=	$\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	=	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$	$R=1$

IV. EXERCICES

RAYON DE CONVERGENCE

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

a) $\sum n^\alpha z^n$.
b) $\sum \frac{n^2}{3^n+1}z^n$.
c) $\sum \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+2}z^n$
d) $\sum \frac{\operatorname{ch} n}{n}z^n$
e) $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})z^n$.
f) $\sum n^nz^n$.
g) $\sum 5^nz^{2n+1}$.
h) $\sum \frac{(2n)!}{n!n^n}z^n$.
i) $\sum \sin nz^n$.
j) $\sum (1+\frac{1}{n})^{n^2}z^n$.
k) $\sum n!z^{n^2}$.
l) $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$.
m) $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})z^n$.

Exercice 2

Soit (a_n) une suite convergeant vers 0. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_nz^n$?

Exercice 3

Soient une série entière $\sum a_nz^n$ de rayon de convergence R.

1. Si $\lambda\in\mathbb{C}^*$, quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\lambda^na_nz^n$?
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2z^n$?

Exercice 4

Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\frac{a_n}{n!}z^n$ est infini. Que peut-on dire si $R=0$?

Exercice 5

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $\sqrt[n]{|a_n|} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{n\geqslant 1} n! a_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

Développement en série entière

Exercice 6

Calculer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

a) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

b) $\ln(x^2-5x+6)$

c) $e^x \sin(x)$

d) $\dfrac{1}{x^2-2x\operatorname{ch}\theta+1}$

e) $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

f) $\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt$

Exercice 7

1) Développer la fonction $f : x \mapsto e^x \sin x$ en série entière et préciser le rayon de convergence .
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation

$$\frac{(\sqrt{2})^n \sin\dfrac{n\pi}{4}}{n!} = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}.$$

Exercice 8

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{2-x}$ et préciser le rayon de convergence.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

Exercice 10 ***(Mines MP 2018)***

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{x+e^t}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière en 0 et donner $f^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Sommation des séries entières

Exercice 11

Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leur somme

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^3+3n+1)x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3+(-1)^n)^n x^n$

Exercice 12 ***(Mines MP 2015)***

Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$. Déterminer le domaine de définition de f et calculer $f(x)$.

Exercice 13

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,dt$. Déterminer le rayon de convergence, de la série entière $\sum a^n x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 14

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Trouver le rayon de convergence des séries entières de coefficients $\frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}$.
2. Lorsque $|x|<1$, calculer la somme $A(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos(n\alpha)$.
3. Montrer que pour $|x|<1$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\alpha)=\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$.

Exercice 15

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}$ et, lorsque c'est possible, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Déterminer une relation entre a_n et a_{n+1}. En déduire une équation différentielle vérifiée par f et calculer f sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 16

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2^nn!)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.
3. Montrer que pour tout $x>1$, $F(x)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

RÉSULTATS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 17 ***(expression intégrale des coefficients)***

Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Calculer $A_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{it})e^{-int}\,dt$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante. La conclusion subsiste-t-elle si f est bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18

1. Soit (a_n) une suite de réels de limite nulle. Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$. Montrer que $f(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$.
2. Quelle relation a-t-on lorsque $\lim_{n\to+\infty}a_n=\ell\neq0$?

Exercice 19 ***(Centrale MP)***

1. Déterminer le rayon de convergence de $L : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.
2. On veut montrer que $\exp(L(z)) = z+1$ pour $|z| < 1$. Pour cela on considère $u : t \mapsto \frac{\exp(L(zt))}{1+zt}$. Justifier que u est dérivable sur $[0,1]$, dériver u est conclure.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| \leqslant \alpha$,

$$\det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{tr}(A^n) z^n\right).$$

Exercice 20 ***(Mines MP)***

Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leqslant A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 21 ***(Mines MPI)***

Soit $q \in \mathbb{R}$ avec $|q| < 1$. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?

APPLICATIONS DES SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 22

Calculer la somme des séries numériques suivantes :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 23

Montrer que $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Exercice 24

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série absolument convergente. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ de somme S.

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Montrer que $x \mapsto S(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 25

On définit pour $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ la fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que ce prolongement est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 26 ***(CCINP)***

Soit E un ensemble à n éléments On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E.

1. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.
2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence R non nul.
3. Calculer $e^x f(x)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n.
5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'événement « aucun des n élèves n'a sa propre copie ». Calculer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Exercice 27 ***(nombre de parenthésages)***

Soit u_n le nombre de façon de parenthéser un produit $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, c'est-à-dire le nombre de façons de choisir dans quel ordre on effectue les produits).

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Expliquer pourquoi on a, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_1 u_{n-1} + \cdots + u_k u_{n-k} + \cdots + u_{n-1} u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$.
3. On considère alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ (on suppose que son rayon de convergence est strictement positif). Déterminer une relation vérifiée par la fonction S et en déduire la valeur de u_n.

Exercice 28 ***(Polytechnique 2020)***

Soient $\ell \in]1, +\infty[$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\ell a_n}{\ell^{n+1} - 1}$

1. Montrer qu'en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les nombres réels x tels que $f(x) = 0$.