

19 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

APPLICATIONS LINÉAIRES, CONNEXITÉ

I. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

APPLICATIONS LINÉAIRES

Théorème 23 (Continuité)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés (dimension quelconque) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre

- f est continue sur E ,
- f est continue en 0,
- il existe $K \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$.
- f est lipschitzienne.
- f est bornée sur la boule fermée unité

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

Définition 60 (Norme)

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On note $\|f\| = \sup \{ \|f(x)\|_F, x \in E, \|x\| \leq 1 \}$

- cela définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ et une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{L}_c(E)$.
- pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E$.
- On a également

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E, x \neq 0 \right\} = \sup \{ \|f(x)\|_F, x \in E, \|x\| = 1 \} = \min \{ K \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E \}.$$

APPLICATIONS BI ET MULTILINÉAIRES

Proposition 97

- Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels. Si B est une application bilinéaire de $E \times F$ vers G alors B est continue (avec une norme usuelle sur l'espace produit) si et seulement il existe $K \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E, y \in F$, $\|B(x, y)\| \leq K \|x\| \|y\|$. On généralise avec les applications multilinéaires.
- Si f est une application bilinéaire ou multilinéaire sur un produit de deux ou plusieurs espaces vectoriels de dimension finie alors f est continue.

II. CONNEXITÉ PAR ARCS

Définition 61 (chemins continus, connexité par arcs)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E .

- Soient $a, b \in A$. On appelle chemin de a vers b dans A , toute application continue $f : [0, 1] \rightarrow A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.
- la relation $a \mathcal{R} b$ lorsqu'il existe un chemin continu de a vers b dans A définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes par arcs* de A .
- on dit que $A \subset E$ est connexe par arcs, lorsque, pour tout $a, b \in A$, il existe $f : [0, 1] \rightarrow A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$ (c'est-à-dire que A n'a qu'une composante connexe par arc).

Propriété 98 (connexes par arcs)

- les parties convexes sont connexes par arcs, les parties étoilées également,
- l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs,
- dans \mathbb{R} , les connexes par arcs sont les intervalles

III. EXERCICES

CONNEXITÉ PAR ARCS

Exercice 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et A et B deux parties non vides connexes par arcs de E .

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. Montrer que $A + B = \{a + b; a \in A \text{ et } b \in B\}$ est connexe par arcs.

Exercice 2

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et Δ_n l'ensemble des matrices diagonalisables de E . Montrer que Δ_n est connexe par arcs.

Exercice 3

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que \mathbb{C}^* est connexe par arcs, puis montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (on pourra trigonaliser la matrice).

Exercice 4 (Mines MP)

Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E , D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 5 (CCP 36)

Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrez l'équivalence
 - P1) f est continue sur E ,
 - P2) f est continue en 0,
 - P3) il existe $k > 0$, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.
2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère φ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$. Démontrez que φ est linéaire et continue.

Exercice 6

On munit $M_p(\mathbb{C})$ d'une norme. Soit $X \in \mathbb{C}^p$ et $P \in GL_p(\mathbb{C})$.

- Montrer que $\Phi: M \mapsto MX$ et $\Psi: M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues sur $M_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que $f: (M, N) \mapsto MN$ est continue.
- Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (A^n) est bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1.
- Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (B^n) converge vers C . Montrer que $C^2 = C$. Que peut-on dire des valeurs propres de B ?

Exercice 7

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit φ l'application

$$\varphi: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

Montrer que φ est bien définie, qu'elle est linéaire. Montrer qu'elle est continue et calculer sa norme.

Exercice 8

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme 1; $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Montrer que l'application $f \mapsto f(\frac{1}{2})$ est linéaire mais n'est pas continue sur E .

Exercice 9

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit φ l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \rightarrow \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt \end{cases}$$

Montrer que φ est bien définie, qu'elle est linéaire. Montrer ensuite qu'elle est continue et calculer sa norme. Mêmes questions avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 10

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on considère la norme subordonnée

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}, X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}.$$

où $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right],$$

c'est-à-dire le maximum des normes $\|\cdot\|_1$ des lignes de A .

Exercice 11 (Mines MP)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte d'intérieur non vide de E . Montrer que $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E), u(K) \subset K\}$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 12 (Mines MP)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\Phi : E \rightarrow E$ qui à f associe la fonction $\Phi(f)$ où $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Étudier la continuité de Φ lorsque E est muni de $\|\cdot\|_\infty$ puis de $\|\cdot\|_1$.

Exercice 13 (Centrale MP)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, \dots, n\}$. On note R_p l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang p .

1. Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et N sont de même rang si et seulement s'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$.
2. Soit F une partie finie de \mathbb{C} . Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.
3. Montrer que R_p est connexe par arcs.
4. Déterminer l'intérieur de R_p .
5. Déterminer l'adhérence de R_p .

Exercice 14 (Centrale MP)

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_P = \{M \in M_n(\mathbb{R}), P(M) = 0\}$. Le but de l'exercice est d'étudier les points isolés de E_P , c'est-à-dire les $M \in E_P$ pour lesquels il existe un voisinage V de M tel que $E_P \cap V = \{M\}$.

1. Déterminer E_P et ses points isolés lorsque $n = 1$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que, pour tout $H \in V_0$, $I_n + H \in GL_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un point isolé de E_P . Montrer qu'il existe un voisinage V_1 de 0 tel que, pour tout $H \in V_1$, $(I_n + H)^{-1}M(I_n + H) = M$. Montrer que M commute avec tous les éléments de $M_n(\mathbb{R})$. Conclure.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une suite (M_k) d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ distincts deux à deux telle que $\lim M_k = \lambda I_n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λI_n est un point isolé de (E_P) si et seulement si λ est racine simple de P .