

20 ESPACES VECTORIELS NORMÉS GÉNÉRALISATIONS

I. GÉNÉRALISATIONS

Cadre général : dans ce résumé, on donne les versions généralisées des théorèmes sur les suites et séries de fonctions, les intégrales à paramètre. On désigne par E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A une partie de E et I un intervalle de \mathbb{R} .

SÉRIE D'UN EVN

Proposition 99 (Convergence absolue)

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite (S_n) converge (dans E). On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite.
- Si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme 2 (norme d'algèbre). Soit $A \in E$. On note $u_n = \frac{A^n}{n!}$. On a $\|u_n\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ et la série $\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge. On en déduit que la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge. On note $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

SUITES DE FONCTIONS

Définition 62 (Convergences)

- Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F et f une fonction de A vers F . On dit que
- (f_n) converge simplement vers f sur A lorsque, pour tout $x \in A$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ (dans F), ou encore
- $$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon.$$
- (f_n) converge uniformément vers f sur A lorsque, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, A} = 0$, ou encore
- $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon.$$

Théorème 24 (Continuité, limites)

- Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F .
- **continuité** : si (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A (resp. en $a \in A$) alors f est continue sur A (resp. en $a \in A$).
- **permutation des limites** : si $a \in \bar{A}$, (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie $\ell_n \in F$ en a alors la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in F$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Théorème 25 (Intégration/dérivation)

Si I est un intervalle de \mathbb{R} et (f_n) une suite de fonctions de I vers F .

→ **dérivation** : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I , (f_n) converge simplement vers f sur I et (f'_n) uniformément vers g sur I alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

→ **intégration** : si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

SÉRIES DE FONCTIONS**Définition 63** (Convergences)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F , on note $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Soit S une fonction de A vers F . On dit que

→ $\sum f_n$ converge simplement sur A lorsque, pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge ou encore que (S_n) converge simplement sur A .

→ $\sum f_n$ converge uniformément sur A lorsque (S_n) converge uniformément sur A (vers S), c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_{\infty, A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, A} = 0 \text{ (où } R_n = S - S_n\text{)}.$$

→ $\sum f_n$ converge normalement sur A lorsque $\sum \|f_n\|_{\infty, A}$ converge (où $\|f_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|_F$). La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

On dispose des mêmes théorèmes que pour les suites de fonctions. Essentiellement, on utilise

Théorème 26 (Continuité)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues de A vers F . Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A , avec S la somme de la série, alors S est continue sur A .

EXEMPLE

L'application $A \mapsto \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$: on munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre (par exemple la norme 2)

→ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \mapsto \frac{A^n}{n!}$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

→ soit $R > 0$. Si $\|A\| \leq R$ alors $\|f_n(A)\|_F \leq \frac{R^n}{n!}$ (majoration indépendante de A). La série de fonctions converge normalement sur la boule fermée $\bar{B}(0, R)$.

Ainsi la fonction est continue sur toute boule fermée centrée en 0 donc sur $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 27 (Dérivation - variable réelle)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans F . Si $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\sum f'_n$ uniformément alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et, pour tout $t \in I$, $S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t)$.

EXEMPLE

Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in E$. La fonction $f : t \mapsto \exp(ta)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $f'(t) = a \cdot \exp(ta) = \exp(ta) \cdot a$.

→ on note $f_n : t \mapsto t^n \frac{a^n}{n!}$, fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec $f'_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} a^n = a \cdot f_{n-1}(t) = f_{n-1}(t) \cdot a$,

→ on a $\|f_n(t_0)\|_F \leq \frac{(|t_0| \|a\|)^n}{n!}$ et $\sum f_n(t_0)$ converge absolument donc converge et ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

→ soit $R > 0$, si $|t| \leq R$, alors $\|f'_n(t)\|_F \leq \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} \|a\|^n$ et $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-R, R]$

on a alors f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^{n+1} = a \cdot \exp(ta) = \exp(ta) \cdot a$ (par continuité de l'application linéaire $x \mapsto a \cdot x$ dans E).

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Théorème 28 (Continuité)

Soit $h : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ avec

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ,
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur A ,
- il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que, pour tout $(x, t) \in A \times I$, $|h(x, t)| \leq \varphi(t)$,

alors $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est continue sur A .

le théorème de dérivation reste celui du cours (le paramètre x est dans un intervalle de \mathbb{R}).

II. EXERCICES

SUITES ET SÉRIES DANS UN EVN

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$.

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det \exp(A) = \exp(\text{tr } A)$.

Exercice 3

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(M)$ est un polynôme en M .

Exercice 4

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow E$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, continue en 0. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(kx)}{x} = \ell$.
Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$ en fonction de ℓ .

Exercice 5 (rayon spectral)

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$. On définit le rayon spectral de A comme

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}A\}.$$

1. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme sur E ?
2. On suppose que la suite matricielle (A^k) converge vers 0. Montrer que $\rho(A) < 1$.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $M_{n1}(\mathbb{C})$ (même notation pour les deux normes). Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}A$, alors $|\lambda| \leq \|A\|$.
4. On utilise maintenant la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $M_{n1}(\mathbb{C})$ (on utilisera l'exercice 7).
 - (a) Soit $A \in E$, $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire telle que $A = PTP^{-1}$. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de P . On définit P_α la matrice dont les colonnes sont $C_1, \alpha C_2, \alpha^2 C_3, \dots, \alpha^{n-1} C_n$. Écrire la matrice $T_\alpha = P_\alpha^{-1} A P_\alpha$.
 - (b) Justifier que l'application $\|\cdot\|_\alpha : M \mapsto \|P_\alpha^{-1} M P_\alpha\|$ définit une norme d'algèbre sur E .
 - (c) En déduire que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - i/ $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$,
 - ii/ $\rho(A) < 1$,
 - iii/ $\sum A^k$ converge.

Exercice 6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_p(\mathbb{R})$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(A) = \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une suite de réels $(a_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_n(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n) A^k.$$

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(A) = \exp(A)$.

Exercice 7

Justifier que la fonction f définie par $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n(x^2+y^2)}$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 (on dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 lorsque f admet des fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de \mathbb{R}^2 et que ces deux fonctions sont continues sur \mathbb{R}^2).