

23

ESPACES PRÉHILBERTIENS

I. PRODUITS SCALAIRES

Définition 81 (Produit scalaire)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

- bilinéaire
- symétrique : pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
- positive : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$,
- définie : si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$.

On appelle **espace préhilbertien** tout \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et **espace euclidien** tout espace préhilbertien de dimension finie.

Notation : au lieu de $\varphi(x, y) : \langle x, y \rangle$ ou $(x|y)$.

Propriété 124 (produit scalaire)

- inégalité de Cauchy Schwarz : pour tout $x, y \in E$, $|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\varphi(x, x)} \sqrt{\varphi(y, y)}$,
- l'application $x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme (appelée norme euclidienne) - on la note $\|\cdot\|$ dans la suite
- formules de polarisation : pour tout $x, y \in E$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

- formule de Pythagore :
 - on a $\langle x, y \rangle = 0$ si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,
 - si $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ alors $\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2$.

II. ORTHOGONALITÉ

Définition 82 (Orthogonalité et orthogonal)

- Orthogonalité :
 - x, y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$,
 - si $x \in E$ et $A \subset E$ alors $x \perp A$ lorsque, pour tout $a \in A$, $\langle a, x \rangle = 0$
 - $A, B \subset E$ sont orthogonales lorsque, pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $\langle a, b \rangle = 0$.
 - une famille $(f_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale lorsque pour tout $i \neq j$ dans I , $\langle f_i, f_j \rangle = 0$. Elle est orthonormale lorsque $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Si A est une partie de E , on note $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.

Propriété 125

Une famille orthogonale de vecteurs qui ne contient pas le vecteur nul est libre

Propriété 126 (Orthogonal)

Soient A, B des parties de E , F et G des sous-espaces vectoriels de E

- A^\perp est un sous-espace vectoriel de E , on a $A \subset A^{\perp\perp}$ et A orthogonal à A^\perp
- si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$
- si les sev $(F_i)_{i \in I}$ sont deux à deux orthogonaux alors ils sont en somme directe.
- on a $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Propriété 127 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre. Il existe une famille orthonormée (f_1, \dots, f_n) telle que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k),$$

avec unicité si on ajoute la condition $\langle e_k, f_k \rangle > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Plus précisément, on a

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i \right\|} \quad \text{si } k \geq 2$$

Proposition 128 (espaces euclidiens)

Soit E un espace euclidien.

→ E admet des bases orthonormées

→ si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est **une base orthonormée** de E alors si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors

$$\bullet \quad x_i = \langle e_i, x \rangle \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2,$$

$$\bullet \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle \langle e_i, y \rangle.$$

→ si (e_1, \dots, e_k) est une famille orthonormée, alors on peut la compléter en une base orthonormée.

→ théorème de Riesz : si φ est une forme linéaire sur E alors il existe un unique vecteur a tel que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

III. PROJECTIONS ORTHOGONALES

Proposition 129 (Projections orthogonales)

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors

→ $F \oplus F^\perp = E$,

→ si p_F est la projection sur F parallèlement à F^\perp (appelé projection orthogonale sur F) et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est **une base orthonormée** de F , alors

$$\bullet \quad \text{pour tout } x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$$

$$\bullet \quad \text{on a } \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \quad \text{et ainsi } \|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{formule de Bessel}).$$

→ si E est de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E alors

$$\bullet \quad \dim F^\perp = n - \dim F, \quad F = F^{\perp\perp}$$

$$\bullet \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \quad (\text{si } G \text{ est aussi un sev de } E).$$

Proposition 130 (Distance à un sous-espace vectoriel)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors pour tout $x \in E$

$$d(x, F) = \min_{f \in F} \|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$$

et $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise le minimum.

Exercice 1

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire classique et de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) . On considère le sous-espace vectoriel F défini par

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

1. trouver une base orthonormée de F .
2. Donner la matrice de la projection orthogonale sur F .
3. Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 2

On définit pour $A, A' \in M_2(\mathbb{R})$, $\varphi(A, A') = \text{tr}({}^t A A')$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. On admet que φ est un produit scalaire.

- Démontrez que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $E = M_2(\mathbb{R})$.
- Déterminez une base de \mathcal{F}^\perp .
- Déterminez la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- Déterminer la distance de J à \mathcal{F} .

Exercice 3 (Mines MP 2017)

Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

IV. EXERCICES**PRODUIT SCALAIRE, ORTHOGONALITÉ****Exercice 4**

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ (et aussi $\mathbb{R}_n[X]$) de son produit scalaire usuel (sur les coefficients). Déterminer l'orthogonal dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ des espaces suivants :

a) $E_1 = \{P \in E, P(0) = 0\}$.

b) $E_2 = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

c) $E_3 = \{P \in E, \int_0^1 P(t) dt = 0\}$.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) et (v_1, \dots, v_k) une famille libre de vecteurs de E

- Déterminer le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme de E défini par

$$f(x) = \sum_{i=1}^k (v_i | x) v_i.$$

- On suppose $k = n$. Montrer que pour tout (a_1, \dots, a_n) de \mathbb{R}^n , il existe un unique $x \in E$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (v_i | x) = a_i$.

Exercice 6

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge, muni du produit scalaire défini par $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Soit F le sous-espace formé des suites nulles à partir d'un certain rang. Vérifier que $F \subset \ell^2(\mathbb{R})$, puis déterminer F^\perp . Déterminer l'adhérence de F et en déduire (ça ce n'est plus au programme) une famille totale de $\ell^2(\mathbb{R})$.

Exercice 7

On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $(f, g) \mapsto (f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

- Montrer l'existence et l'unicité de $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = (A_n | P)$.
- Montrer que A_n est scindé sur \mathbb{R} et possède n racines simples dans $]0, 1[$.

Exercice 8 (Mines MP)

On pose $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour f et g dans E , $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

- Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- On pose $F = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$. Déterminer F^\perp .
- Déterminer $F + F^\perp$.
- Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des fonctions polynomiales.

Exercice 9

Soit E un espace euclidien de dimension n et (e_1, \dots, e_p) des vecteurs unitaires de E . Montrer que, si pour tout $x \in E$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2,$$

alors (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormée de E (et $p = n$).

Exercice 10 (Mines MP 2012)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , $p \leq n$ et (e_1, \dots, e_p) une famille de vecteurs de E . On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2$.

1. Montrer que $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, que $p = n$ puis que $\|e_i\| \leq 1$ pour tout i .
2. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que e_i est orthogonal à tous les e_k pour $k \neq i$, puis que $\|e_i\| = 1$. En déduire que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée.

PROJECTIONS, DISTANCE**Exercice 11**

Soient E un espace euclidien de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal de rang q .

1. Montrer que $\forall x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle$.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = q$.

Exercice 12

Étant donnés A et $B \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(A|B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$.

1. Vérifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $(X^k|1) = k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$, on l'écrit $Q = -\sum_{k=1}^n a_k X^k$. On note $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2) \dots (X+k)$. Montrer que pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(k) = 0$. En déduire P et a_n .
3. On note $I = \inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt \right)$. Montrer que $I = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 13

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 f g + f' g'$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Soit $V = \{f \in E | f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E | f'' = f\}$. Montrer qu V et W sont des supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W .
3. Soit $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E | f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer

$$a = \inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 f^2 + f'^2.$$

Exercice 14 (ENS Cachan, Rennes 2019)

Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} avec $a < b$ et $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continue. On pose $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t) dt$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ dont la famille de fonctions polynomiales associées soit orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et P_n soit de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \int_a^b f(t)P_n(t)\omega(t) dt$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n^2$ converge et exprimer simplement sa somme à l'aide de f et de ω .