

26

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES VECTORIELLES

Dans tout ce cours, F désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , I un intervalle de \mathbb{R}

CADRE ET NOTATIONS

Définition 88 (Cadre et solution)

I est un intervalle de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^*$.

→ cas vectoriel : soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(F))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, F)$. On appelle solution de

$$(E) : y' = a(t)y + b(t),$$

toute fonction $y : I \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, pour tout $t \in I$, $y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t)$.

→ cas matriciel : soit $A \in \mathcal{C}^0(I, M_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, M_{n1}(\mathbb{K}))$. On appelle solution de

$$(E) : Y' = A(t)Y + B(t),$$

toute fonction $Y : I \rightarrow M_{n1}(\mathbb{K})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, pour tout $t \in I$, $Y'(t) = A(t).Y(t) + B(t)$.

Dans la suite, on désignera par $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$, l'équation homogène associée.

Proposition 151

→ Si y_0 est une solution de (E) alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (H) .

→ les solutions de (E) s'obtiennent comme somme d'une solution particulière de (E) et de n'importe quelle solution de (H) .

THÉORÈME DE CAUCHY ET CONSÉQUENCES

Théorème 35 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in F$. Il existe une et une seule solution sur I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Proposition 152 (Conséquences du théorème de Cauchy)

soit $t_0 \in I$

→ l'application $\theta_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_H & \rightarrow & F \\ y & \mapsto & y(t_0) \end{cases}$ est linéaire et bijective

→ notamment $\dim \mathcal{S}_H = \dim F = n$.

Proposition 153 (Structure des ensembles de solutions)

→ l'ensemble des solutions \mathcal{S}_H de $(H) : y' = a(t)y$ est un espace vectoriel de dimension n

→ l'ensemble des solutions \mathcal{S}_E de $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ est un espace affine de dimension n dirigé par \mathcal{S}_H .

SYSTÈMES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Théorème 36 (Systèmes à coefficients constants)

- L'unique solution de $x' = ax$ (où $a \in \mathcal{L}(F)$) vérifiant $x(t_0) = x_0$ est la fonction $x : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$.
- L'unique solution de $X' = A.X$ (où $A \in M_n(\mathbb{K})$) vérifiant $X(t_0) = X_0$ est la fonction $X : t \mapsto \exp((t - t_0)A).X_0$.
- Les solutions de $X' = AX + B(t)$ sont les fonctions

$$t \mapsto \exp(tA)X_0 + \exp(tA) \int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u) du.$$

Théorème 37 (Cas diagonalisable)

Lorsque A est diagonalisable, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres et V_1, \dots, V_n une base de vecteurs propres associés, alors les fonctions $f_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ forment un système fondamental de solutions de $X' = AX$. Toute solution s'écrit donc $X : t \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i$.

**MÉTHODE - RÉOLUTION PRATIQUE LORSQUE A EST DIAGONALISABLE**

- $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale
- L'équation $X' = AX + B(t)$ se réécrit $P^{-1}X' = D(P^{-1}X) + P^{-1}B(t)$,
- on note $Z(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$: on obtient $Z' = DZ + C(t)$
- cette dernière équation donne n équations indépendantes. On résout et on revient à X avec $X(t) = PZ(t)$

Remarques :

- Lorsque l'équation est homogène, on n'a pas besoin de calculer P^{-1} .
- La méthode se généralise en trigonalisant. On commence par résoudre la dernière équation puis on remonte avec les solution précédemment trouvées.

Exercice 1

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x' &= x + \alpha y + e^t \\ y' &= \alpha x + y + e^t \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' &= ty \\ y' &= -tx \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' &= x + y - z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= x + y - z \end{cases}$$

Exercice 2 (CCINP MP 2021)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Justifier la diagonalisabilité de A . Donner une base de vecteurs propres.
- Résoudre le système différentiel $(x' = x + 2z, y' = y, z' = 2x + z)$.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SCALAIRES D'ORDRE 1

Proposition 154

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On note A une primitive de a sur I . Les solutions de $y' = a(t)y + b(t)$ sont les fonctions

$$y : t \mapsto Ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} du, \text{ où } K \in \mathbb{K}.$$

Exercice 3

Résoudre sur les intervalles de \mathbb{R} , les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } (1 - x)y' + 2y = 2$$

$$\text{b) } xy' + 2y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$\text{c) } |x|y' + (x - 1)y = x^2$$

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SCALAIRES D'ORDRE 2

GÉNÉRALITÉS

Proposition 155 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

→ Soient a, b et c des fonctions continues sur I , $x_0 \in I$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I à

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \text{ avec } y(x_0) = \alpha \text{ et } y'(x_0) = \beta.$$

→ L'ensemble des solutions sur I de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.

→ L'ensemble des solutions sur I de $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est un espace affine de dimension 2.

Définition 89 (Wronskien)

→ Soient f_1, f_2 deux solutions de $(H) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. On appelle matrice wronskienne de f_1, f_2 la matrice $W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$ et son déterminant $w(x)$ est appelé wronskien.

→ On a $w(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)$ et $w' + a(x)w = 0$.

→ Le wronskien est soit toujours nul, soit il ne s'annule jamais.

Proposition 156 (Caractérisation d'une base)

Soient f_1, f_2 deux solutions de (H) . On a équivalence entre

1. $\{f_1, f_2\}$ est une base de solutions de (H) ,
2. pour tout $x_0 \in I$, $w(x_0) \neq 0$,
3. il existe $x_0 \in I$, $w(x_0) \neq 0$.



MÉTHODE - VARIATION DES CONSTANTES

Si f_1, f_2 est une base de solutions de $(H) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, alors on peut trouver une solution de $(E) : y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)f_1(x) + \mu(x)f_2(x)$ avec la condition $\lambda'(x)f_1(x) + \mu'(x)f_2(x) = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda'(x)f_1(x) + \mu'(x)f_2(x) = 0 \\ \lambda'(x)f_1'(x) + \mu'(x)f_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

CALCULS



MÉTHODE - RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Quelques idées pour la résolution aussi bien de l'équation différentielle homogène $(H) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, que l'équation différentielle avec second membre $(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$

→ **cas d'une équation à coefficients constants** : on cherche des solutions $x \mapsto e^{rx}$ pour obtenir $ar^2 + br + c = 0$ comme CNS pour être solution. Pour une solution particulière, on la cherche du même type (ou variation des constantes)

→ recherche des solutions DSE (aussi bien pour (H) que pour (E))

→ **changement de fonction** (hors prog.) : si y_0 est une fonction qui ne s'annule pas, on peut poser $z = y/y_0$ et transformer l'équation différentielle sur y en une équation différentielle équivalente sur z . Notamment si y_0 est solution de (H) alors z' vérifie une équation d'ordre 1.

→ pour une solution particulière de (E) : méthode de variation des constantes.

Exercice 4 (Mines MP 2012)

Déterminer l'ensemble des solutions de $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 5 (Équation linéaire d'ordre 2 à coefficients non-constants)

Résoudre les équations suivantes sur tout intervalle de \mathbb{R} :

- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (chercher une solution polynomiale)
- $xy'' + 2y' - xy = 0$ (chercher une solution DSE)
- $x^2y'' - 6xy' + (x^2 + 12)y = 0$ (chercher une solution DSE)
- $xy'' - y' - x^3y = 0$ (changement de variable $t = x^2$)
- $x^2y'' + xy' + y = 0$ (changement de variable $x = e^t$)
- $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ (changement de fonction $z = x^n y$, n à déterminer)
- $x(1-x)y'' - 2(x^2 - 1)y' + 2(1-x)y = 0$ (chercher une solution $x \mapsto x^\alpha$)

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + y = \cotan x$ sur $I =]0, \pi[$.

IV. EXERCICES**Exercice 7 (Mines MP 2017)**

On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 x'' - 4tx' + (t^2 - 6)x = 0$.

- Déterminer les solutions qui sont somme d'une série entière au voisinage de 0.
- Déterminer la dimension de l'espace des solutions sur \mathbb{R} .

Exercice 8

Soient a et b deux fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et y et z de classe \mathcal{C}^1 vérifiant sur \mathbb{R}^+ ,

$$\begin{cases} y(0) &= z(0) \\ y' &= a(x)y + b(x) \\ z' &\leq a(x)z + b(x) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $y(x) \geq z(x)$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et soit K un vecteur non nul de E . Quelles sont les courbes intégrales de l'équation différentielle $X' = K \wedge X$?

Exercice 10

Soit $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Résoudre le système différentiel

$$\frac{dX}{dt} = AX(t).$$

Exercice 11

On s'intéresse au système différentiel $X' = a(t)X$ où $a(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, M_2(\mathbb{R}))$. On note A une primitive de a .

- Dans le cas où $a(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{pmatrix}$, calculer $\exp(A(t))$ et comparer aux solutions du système différentiel.
- Même travail avec $a(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une explication de cette différence.

Exercice 12

- Résoudre l'équation différentielle $(E_g) y'' - y = g$ où g est une fonction continue sur \mathbb{R} .
- Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' - y = \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$.
- Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f(x) \geq \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$.

Exercice 13

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + qy = 0$, où q est une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

1. Montrer que si f est une solution bornée de (E) , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
2. Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E) . Démontrer que leur Wronskien $W = fg' - f'g$ est une constante.
3. (E) admet-elle des solutions non bornées?

Exercice 14

Soient p et q deux fonctions continues sur \mathbb{R} à valeurs réelles. On considère l'équation

$$(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

1. Soit y une solution non nulle de (E) .
 - (a) Soit x_0 un zéro de y dans $[a, b]$. Montrer que $y'(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que y ne s'annule qu'en x_0 sur l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.
 - (b) Montrer que y n'a qu'un nombre fini de zéros dans un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} .
2. Soient y et z deux solutions non proportionnelles de (E) .
 - (a) Calculer le wronskien de y et z .
 - (b) Montrer que y et z n'ont pas de zéros communs.
 - (c) Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y , z possède un unique zéro (regarder z/y).

Exercice 15

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ dont le spectre ne rencontre pas $2i\pi\mathbb{Z}$ et $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, E)$ de période 1.

1. Soit x une solution de $x' = Ax + B(t)$. Montrer que $z : t \mapsto x(t+1)$ est solution de cette même équation différentielle.
2. En déduire qu'il existe une unique solution de période 1 à $x' = Ax + B(t)$.

Exercice 16 (Mines MP/MPI 2023)

Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T -périodique de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une application X de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t+T) = \lambda X(t)$.

Exercice 17

Soit $(E) : xy'' + y' + y = 0$.

1. déterminer la solution de (E) développable en série entière en 0 telle que $f(0) = 1$.
2. Montrer que $g : x \mapsto xf''(x) + f^2(x)$ admet en limite finie ℓ en $+\infty$, que f est bornée sur \mathbb{R}^+ et f' tend vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer que $x \mapsto f(x)f'(x)/x$ et $x \mapsto f^2(x)/x$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$.
4. En déduire $\ell = 0$.

Exercice 18 (Mines MP/MPI 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\sum_{k=0}^n y^{(k)} \omega^{n-k} = 0$

Exercice 19 (Mines MP/MPI 2023)

Déterminer les fonctions y de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivables et telles que $y'(x) = y(\pi - x)$.

Exercice 20 (Lemme de Gronwall)

1. Soit y et v deux fonctions continues sur $I = [a, b]$, v positive sur I , telles que, pour tout $x \in I$,

$$y(x) \leq \lambda + \int_a^x v(t)y(t) dt.$$

Montrer que, pour $x \in I$, $y(x) \leq \lambda \exp\left(\int_a^x v(t) dt\right)$.

2. Soit $(H) : y'' + (1 + \varphi(t))y = 0$ avec φ continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ . Soit f une solution de (H) et

$$g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t) dt.$$

Montrer que $g'' + g = 0$. En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq 0$, $|f(x)| \leq a + \int_0^x |\varphi(t)f(t)| dt$, puis que f est bornée sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 21 (Centrale MP 2012)

- Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ ($N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$).
 - Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est libre.
 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $\exp(t(\lambda I_n + N))$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ qui ne possède qu'une seule valeur propre λ .
 - Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
 - En déduire que les solutions de $X' = AX$ sont toutes bornées sur \mathbb{R} si et seulement si $\lambda \in i\mathbb{R}$ et $A = \lambda I_n$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\prod_{k=1}^{\ell} (\lambda_k - X)^{m_k}$ son polynôme caractéristique, les λ_k étant distincts et $m_k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont toutes bornées sur \mathbb{R} si et seulement si les λ_k sont dans $i\mathbb{R}$ et A est diagonalisable.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont toutes bornées sur \mathbb{R} .
- Conclusion sur A ?

Exercice 22 (Centrale MP 2015)

On se donne $\phi : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$.

- On suppose dans cette question de ϕ est de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = \phi'(0)\phi(t)$. En déduire qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(tA)$.
- Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour $|x| > \alpha$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-t)\phi(t) dt$. Montrer que ψ est de classe \mathcal{C}^∞ puis qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \phi(x)A$.
- Déterminer ϕ .

Exercice 23 (Centrale MP 2021)

On admet que, pour toute famille (h_1, \dots, h_n) libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $(h_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a(f) : x \mapsto f(x+a)$. On note $E_f = \text{Vect}\{\tau_a(f), a \in \mathbb{R}\}$.

- Déterminer E_f pour $f : x \mapsto e^x$ et pour $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E_f est de dimension finie n . On fixe une base (g_1, \dots, g_n) de E_f .
Pour $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $(\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a))$ tel que $\tau_a(f) = \lambda_1(a)g_1 + \dots + \lambda_n(a)g_n$.
- Montrer que les λ_k sont continues, puis que les λ_k sont de classe \mathcal{C}^1 .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
- Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène. Conclure.