27 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Dans ce chapitre E et F désigneront toujours des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie, respectivement n et m, U un ouvert de E et V un ouvert de F. L'espace E est muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F de $\mathscr{B}'$. Une fois cette base $\mathscr{B}$ fixée, on peut indifféremment écrire $f(x)$ ou $f(x_1, \dots, x_n)$ (lorsque l'on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$).

I. Dérivées selon un vecteur - différentielles

Définition 90 *(dérivées et différentielle)*

Soit $f : U \in E \to F$, $a \in U$ (U un ouvert de E) et $v \in E$.

- on définit la dérivée de f en a selon le vecteur v, la limite (lorsqu'elle existe) : $D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$, c'est à dire le vecteur $g'(0) \in F$ si $g(t) = f(a+tv)$ est dérivable en 0.
- on dit que f est différentiable en a lorsqu'il existe $df_a \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de 0_E tels que,

$$\forall h \in \mathcal{V}, f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \, \varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

  On note parfois $f'(a)$ la différentielle df_a (on a $f'(a) \in \mathscr{L}(E, F)$). On la note également $df(a)$ et son évaluation en v : $df_a(h) = df(a) \cdot v$.
- on dit que f est différentiable sur U lorsque f est différentiable en tout point de U. On note alors $df : a \in U \mapsto df_a \in \mathscr{L}(E, F)$.
- si f est constante sur U alors sa différentielle est nulle. Si f est la restriction à U d'une application linéaire h alors pour tout $a \in U$, $df_a = h$. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et $df_a : h \in \mathbb{R} \mapsto f'(a).h \in \mathbb{R}$.

Propriété 157 *(Dérivée et différentielles)*

- si f est différentiable en a :
  - f est continue en a
  - f admet des dérivées dans toutes les directions et, pour tout $v \in E$, $D_v f(a) = df_a(v)$
- **somme** : si f et g fonctions de U dans F sont différentiables en a alors $f + \lambda g$ aussi de $d(f+\lambda g)_a = df_a + \lambda dg_a$,
- **produit** : si f et g sont différentiables en a, l'une à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'autre dans F, alors fg est différentiable en a et $d(fg)_a = df_a.g(a) + f(a).dg_a$. Même résultat si f et g à valeurs dans F lorsque F est une algèbre.
- **application bilinéaire** : si $f : U \to E$ et $g : U \to F$ sont différentiables en a, B une application bilinéaire sur $E \times F$ alors $\varphi = B(f, g)$ est différentiable en a et, pour tout $h \in E$, $d\varphi_a(h) = B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$.
- **inverse** : si f est à valeurs réelles, différentiable en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est différentiable en a et $d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{1}{f(a)^2} df_a$,
- **composition** : si $f : U \to F$, $g : V \subset F \to G$ avec $f(U) \subset V$ (et V ouvert de F). Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$

Définition 91 *(Dérivées partielles)*

Soit $f : U \to F$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (et $\mathscr{B}'$ une base de F)

- → On dit que f admet des dérivées partielles dans la base $\mathscr{B}$ en a lorsque f admet des dérivées en a selon chaque vecteur e_i. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = D_{e_i} f(a)$
- → si f est différentiable en a alors f admet des dérives partielles et $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i)$. On a alors, si $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, $df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.
- → On note dx_i l'application $h \mapsto h_i$ si $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$. On a $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.
- → On appelle matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice de df_a dans ces bases - donc la matrice dont les colonnes sont les dérivées partielles.
- → En pratique, si $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, $F = \mathbb{R}^m$ muni de sa base canonique et $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ alors

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Définition 92 *(gradient)*

- → on suppose que E est un espace euclidien. Si $a \in U$ alors df_a est une forme linéaire sur E et il existe un unique vecteur, noté $\nabla f(a)$ (ou $(\mathrm{grad} f)(a)$) tel que, pour tout $h \in E$, $df_a(h) = \langle \mathrm{grad} f(a), h \rangle = \langle \nabla f(a), h \rangle$.
- → si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors $(\mathrm{grad} f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$.

Propriété 158 *(Composition)*

- → si $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur U, $g : V \subset F \to G$ est différentiable sur V et $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est différentiable sur U
- → **dérivée selon un arc** : si $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur U et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ est dérivable sur I et $\varphi(I) \subset U$, alors en notant $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les applications composantes de γ dans $\mathscr{B}$, $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = (df_{\gamma(t)})(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)).\gamma_i'(t).$$

c'est-à-dire que si $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ alors $g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

- → Lorsque $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $\gamma(t) = a + tu$ alors $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu).u_i$
- → **règle de la chaîne** : soit

$$f : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big) \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} V \subset \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^p \\ (y_1, \dots, y_m) & \mapsto & \big(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_p(y_1, \dots, y_m)\big) \end{cases}$$

deux applications différentiables sur U et V avec $f(U) \subset V$ alors $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ l'est sur U et pour $a \in U$, $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(a)).\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

- → si $f : U \to V$ est $\mathscr{C}^1$, bijective et de réciproque $\mathscr{C}^1$, alors pour tout $a \in U$, $(J_f(a))^{-1} = F_{f^1}(f(a))$ (et notamment $\dim E = \dim F$).

Exercice 1 ***(Mines MP 2011)***

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Quelle est la dérivée au point x de $g \circ f$.

II. APPLICATIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^1$ ET $\mathscr{C}^k$

Définition 93 *(Applications de classe $\mathscr{C}^1$)*

On dit que $f : U \subset E \to F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U lorsque f est différentiable en tout point $a \in U$ et lorsque

$$df : \left\{ \begin{array}{lcl} U & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df_a = df(a) = f'(a) \end{array} \right.$$

est continue sur U (on norme l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ comme on le souhaite)

Théorème 38 *(Caractérisation)*

L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles dans une base $\mathscr{B}$ en tout point $a \in U$ et si chaque application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur U.

Propriété 159 *(sur les applications $\mathscr{C}^1$)*

- si f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur U alors, $f + \lambda g$ aussi, $f.g$ l'est si l'une est à valeurs réelles (ou les deux sont à valeurs dans une algèbre de dimension finie), $1/f$ est $\mathscr{C}^1$ sur U si f est à valeurs réelles et ne s'annule pas et enfin $g \circ f$ aussi (avec $f \in \mathscr{C}^1(U,F)$, $g \in \mathscr{C}^1(V,G)$ et $f(U) \subset V$).
- si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, $a, b \in U$ et $\gamma : [0,1] \to E$ avec $\gamma([0,1]) \subset U$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ (γ est un arc $\mathscr{C}^1$ dans U qui relie a à b), alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt$$

Si $\gamma(t) = a + t(b-a)$ alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 df_{\gamma(t)}(b-a)\, dt$ et si, de plus, E est euclidien, alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \left\langle \nabla f\left(\gamma(t)\right), b-a \right\rangle dt$.
- Si U est un ouvert connexe par arcs alors f est constante sur U si et seulement si df est nulle sur U.

Propriété 160 *(Applications de classe $\mathscr{C}^k$)*

- on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur U lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que toutes ses dérivées partielles (dans une base) sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$
- **théorème de Schwarz** : si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et $i \neq j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Cela se généralise aux dérivées supérieures.
- on retrouve les opérations algébriques usuelles (combinaisons linéaires, produit, inverse et composition).

Propriété 161 *(Coordonnnées polaires)*

- l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

est bijective, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de réciproque également $\mathscr{C}^\infty$ (D est la demi-droite $\mathbb{R}^- \times \{0\}$). On a $(x,y) = \varphi(r,\theta)$ si et seulement si on a les relations $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
- si $g(r,\theta) = f(x,y)$ (c'est-à-dire $g = f \circ \varphi$), alors

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \theta^2}$$

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
2. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ si $x \neq 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$). En déduire que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 ***(Mines MP 2017)***

Soit $U =]0, +\infty[^2$.

1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto (\frac{y}{x}, x^2 + y^2)$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U sur U.
2. Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$ en posant $g = f \circ \varphi^{-1}$

III. EXERCICES

DIFFÉRENTIELLE, APPLICATIONS $\mathscr{C}^k$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{lll} f(x, y) = x^2 & \text{si} & |x| < |y| \\ f(x, y) = y^2 & \text{si} & |x| \geqslant |y| \end{array}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. Cette fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de norme $\|\,.\,\|$ et f l'application de $E \setminus \{0\}$ dans lui-même définie par $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est différentiable et déterminer $df(x)$.

Exercice 6 ***(Mines MP 2017)***

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$.

1. Représenter graphiquement ces ensembles. Sont-ils ouverts ? fermés ?
2. Pour $(x, y) \in D$, on pose $f(x, y) = \frac{\ln(1 - xy)}{xy}$ si $(x, y) \notin \Delta$ et $f(x, y) = -1$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.

Exercice 7 ***(Mines MP 2018)***

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de laplacien nul. On pose, pour $r > 0$, $M(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta)\, d\theta$, où $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Montrer que M est dérivable et calculer M'.
2. Montrer que $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.
3. Montrer que $r \mapsto rM'(r)$ est de dérivée nulle.
4. Montrer que M est constante.

Exercice 8 ✰

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \ldots, \operatorname{tr} M^n)$.

1. Montrer que f est différentiable et calculer $df(M)(H)$ pour M et H dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 9

1. Montrer que l'application $\phi : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$ est un difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y > 0\}$ sur un ouvert V à préciser et à représenter.
2. Transformer l'équation aux dérivées partielles

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 3(x - y)f(x, y) = 0$$

   à l'aide du changement de variables : $u = xy,\ v = x + y$.
3. En déduire toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.

Exercice 10

1. Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto (x^2-2xy-y^2, y)$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$ vers $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u+2v^2 > 0\}$ - on justifiera que les ensembles U et V sont ouverts.
2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telles que

$$\forall (x,y) \in U, (x+y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 11

Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pourra utiliser, en le justifiant, un changement de variables du type $(u = ax+by, v = cx+dy)$.

Exercice 12

Soit $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y^2 > 0\}$. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur V qui vérifient l'équation

$$2(y^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2 + x = 0$$

On pourra utiliser le changement de variables défini par $x = u^2 + v^2$ et $y = u + v$ (et vérifier que c'est bien un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme entre des ouverts à préciser).

Exercice 13

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $n \geqslant 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(r)$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

1. Montrer que $\Delta f(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$.
2. En déduire toutes les fonctions g telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 14

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0\}$ et $E = \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On dit que f est homogène de degré α lorsque

$$\forall t > 0, \ \forall (x,y) \in U, \ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

On pose, pour $f \in E$ et $(x,y) \in U$, $\Phi(f)(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

1. Déterminer $\ker \Phi$ en étudiant la fonction $t \mapsto f(tx, ty)$. On montrera qu'un élément de $\ker \Phi$ est une fonction qui s'écrit $f(x,y) = h(\frac{y}{x})$.
2. Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.

Exercice 15 *(Centrale MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in U^2, f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f(a), b - a \rangle.$$

Exercice 16 *(Mines MP/MPI 2023)*

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $k \in [0,1[$ tels que : $\forall a \in \mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \leqslant k$. Soit (u_n) définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|)$.

1. Montrer : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^2)^2, \exists c \in \mathbb{R}^2, f(b) - f(a) = \langle b - a, \nabla f(c) \rangle$.
2. Montrer que : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, |f(x,y) - f(x', y')| \leqslant k \max(|x - x'|, |y - y'|)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leqslant k a_n$, puis qu'il existe deux constantes q et C telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant C q^n$.
4. Montrer que (u_n) est une suite convergente et donner une propriété vérifiée par sa limite.