28 Plusieurs variables Extrema

I. Vecteurs tangents à une partie

Définition 94 *(vecteur tangent)*

Soit X une partie non vide E et $x \in X$. On dit que le vecteur v est un vecteur tangent à X en x lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe, de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : I =]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ telle que, pour tout $t \in I$, $\gamma(t) \in X$ et $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ (c'est-à-dire qu'il existe une courbe tracée sur X qui passe par x et dont la dérivée en x est le vecteur v). On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Théorème 39

Soit $g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de E. Soit $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ alors $T_x X = \ker\big(\mathrm{d}g(x)\big)$.
Dans le cas où E est un espace euclidien, on retrouve l'hyperplan orthogonal au gradient de g en x.

Proposition 162 *(cas particuliers)*

- si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a = (x_0, y_0)$ alors l'ensemble des vecteurs tangents à la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ est le plan d'équation $z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big(y - y_0\big)$.
- si $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable sur U et E est euclidien et si X est une ligne de niveau de f (il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $X = \{x \in U, f(x) = k\}$ alors les vecteurs tangents à X en $a \in X$ sont orthogonaux au gradient de f en a.
- dans le cas particulier d'une surface $(S) : f(x, y, z) = 0$, si $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ alors le plan tangent à S en a a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - z_0) = 0$$

  c'est le plan passant par a et orthogonal à $\nabla f(a)$.

Exercice 1 ***(Navale 2018)***

Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$, P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Donner l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P.

II. Extrema

Définition 95 *(Extrema)*

soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ (A partie quelconque de E)

- On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en $a \in A$ lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que, pour tout $x \in A \cap \mathcal{V}$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
- On dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) en $a \in U$ lorsque, pour tout $x \in U$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
- si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en a et f est différentiable sur **l'ouvert** U alors $df_a = 0$ (on dit que a est un point critique lorsque $df_a = 0$).
- si f est continue sur un compact K alors f est bornée sur K et ses bornes sont atteintes (donc f admet un maximum et un minimum global sur K).

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x - y + x^3 + y^3$. Montrer que g admet des extrema sur le carré $[0, 1]^2$ et les déterminer.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$.

1. Montrer que f admet un point critique mais que f n'y atteint pas d'extremum local.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur D. Déterminer les points D où ils sont atteints puis les valeurs de m et M.

Proposition 163 *(Extrema sous une contrainte)*

→ soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et X une partie de Ω. Si f est différentiable en $x \in X$ et $f_{|X}$ admet un extremum local en x alors, pour tout $v \in T_xX$, on a $\mathrm{d}f(x)\cdot v = 0$.

→ Soient f et g sont deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert Ω de E à valeurs réelles, $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$ et $x \in X$. Si $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si $f_{|X}$ admet un extremum en x alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.

Exercice 4 ***(TPE MP 2011)***

Soit $A > 0$. Quel est le maximum de xyz pour x, y, z dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x + y + z = A$? tels que $x + 2y + 3z = A$?

Proposition 164 *(Condition d'ordre 2)*

soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

→ on définit, pour tout $x \in \Omega$, $H_f(x)$, matrice hessienne de f en x, la matrice de $S_n(\mathbb{R})$ de terme général $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$

→ pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage de O sur lequel on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \left\langle \nabla f(x), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle H_f(x)\cdot h, h \right\rangle + \mathrm{o}\left(\|h\|^2\right) \\ &= f(x) + \nabla f(x)^T.h + \frac{1}{2} h^T.H_f(x).h + \mathrm{o}\left(\|h\|^2\right) \end{aligned}$$

→ si f admet un minimum local en x alors la différentielle de f est nulle en x et $H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$,

→ réciproquement, si la différentielle de f est nulle en x et $H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local en x.

III. DÉMONSTRATIONS

Ensemble tangent

Théorème : Soit $g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de E. Soit $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ alors $T_xX = \ker\left(\mathrm{d}g(x)\right)$.

Démonstration :

on suppose avoir choisi une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour simplifier l'écriture dans le démonstration, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et que l'espace est muni de sa base canonique (sinon il faut voir les n-uplets comme les coordonnées dans la base choisie).

→ $T_xX \subset \ker \mathrm{d}g_x$: soit v un vecteur tangent à X en x et γ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$ dans X telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. On dispose d'un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) \in X$, c'est-à-dire $g(\gamma(t)) = 0$. En dérivant, on obtient $\mathrm{d}g_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) = 0$. Pour $t = 0$, cela donne $\mathrm{d}g(x)(v) = 0$ soit $v \in \ker \mathrm{d}g(x)$. On a bien $T_xX \subset \ker \mathrm{d}g(x)$.

→ $\ker \mathrm{d}g(x) \subset T_xX$: soit $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \ker \mathrm{d}g(x)$ et $x = (a_1, \dots, a_n)$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).\alpha_i = 0$. On suppose que $\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x) = 0$ (on peut s'y ramener en changeant l'ordre des vecteurs de la base ou ajuster la démonstration). D'après le théorème des fonctions implicites, localement l'équation $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ peut s'écrire sous la forme $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$. Plus précisément, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x et une fonction h de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $(a_1, \dots, a_{n-1})$ tels que,

$$\forall x \in \mathcal{V}, g(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

On définit alors une courbe dans X par (on écrit en colonne pour mieux voir) :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_1 t \\ a_2 + \alpha_2 t \\ \vdots \\ a_{n-1} + \alpha_{n-1} t \\ h(a_1 + \alpha_1 t, \dots, a_{n-1} + \alpha_{n-1} t) \end{pmatrix} \qquad \text{on a } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \beta \end{pmatrix}$$

avec $\beta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{n-1})$.

Pour tout $w = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{U}$, on a $g(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$. La j-ème dérivée partielle donne :

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_n} . \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0 \text{ donc } \frac{\partial h}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_n}}$$

(l'écriture complète est $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) + \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) . \dfrac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$) En injectant dans l'écriture de β, cela donne

$$-\beta \frac{\partial g}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

et en utilisant le fait que $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est dans $\ker \mathrm{d}g(x)$, on a $-\beta \dfrac{\partial g}{\partial x_n} = -\alpha_n \dfrac{\partial g}{\partial x_n}$ et donc $\beta = \alpha_n$. On a montré que $\gamma'(0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ainsi tout vecteur de $\ker \mathrm{d}g(x)$ est un vecteur tangent. Cela donne l'autre inclusion.

Extrema sous une contrainte

Théorème : soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et X une partie de Ω. Si f est différentiable en $x \in X$ et $f_{|X}$ admet un extremum local en x alors, pour tout $v \in T_x X$, on a $\mathrm{d}f(x) \cdot v = 0$.

Démonstration : on prend γ une courbe dans X avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ un vecteur de $T_x X$. La fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ admet un extremum local en $t = 0$ donc sa dérivée en ce point est nul, ce qui donne $\mathrm{d}f(x)(v) = 0$

Théorème : Soient f et g sont deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert Ω de E à valeurs réelles, $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$ et $x \in X$. Si $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si $f_{|X}$ admet un extremum en x alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.

Démonstration : On a $T_x X = \ker \mathrm{d}g(x)$ - c'est un hyperplan. La proposition précédente indique que $T_x X = \ker \mathrm{d}g(x) \subset \ker \mathrm{d}f(x)$ avec $\mathrm{d}f(x)$ forme linéaire. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(x) = \lambda \mathrm{d}g(x)$.

Développement limité à l'ordre 2

Théorème : soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage de O sur lequel on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \left\langle H_f(x) \cdot h, h \right\rangle + \mathrm{o}\left(\|h\|^2\right) \\ &= f(x) + \nabla f(x)^T . h + \frac{1}{2} h^T . H_f(x) . h + \mathrm{o}\left(\|h\|^2\right) \end{aligned}$$

Démonstration : on note $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$. On suppose que $B(x, \|h\|) \subset \Omega$. Pour $t \in [0,1]$, on définit $g(t) = f(x + th)$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et

$$g(1) = f(x+h) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t) g''(t) \mathrm{d}t$$

On a $g(0) = f(x)$,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th) \text{ et } g'(0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \mathrm{d}f(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + th)$$

Chacune des applications $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in B(0, \alpha)$, $\left| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + th) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right| \leqslant \varepsilon$ et cela pour tout $i, j \in [\![1 ; n]\!]$. Si $\|h\| < \alpha$, on a donc

$$\forall t \in [0,1], \left| g''(t) - g''(0) \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |h_i h_j| \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (h_i^2 + h_j^2) = \varepsilon \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_i^2 = n\varepsilon \|h\|^2$$

On a alors

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}f(x)(h) + \int_0^1 (1-t) g''(0) \mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)(g''(t) - g''(0)) \mathrm{d}t = f(x) + \mathrm{d}f(x)(h) + \frac{1}{2} g''(0) + \int_0^1 (1-t)(g''(t) - g''(0)) \mathrm{d}t$$

avec $g''(0) = \left\langle H_f(x).h, h \right\rangle$ et le dernier terme majoré en valeur absolue par $n\varepsilon \|h\|^2$, on obtient l'expression (on peut remplacer ε par ε / n dans les premières majoration si vraiment on y tient tant que ça).

IV. EXERCICES

EXTREMA

Exercice 5

Soit $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f admet-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les extrema locaux et absolus de f sur l'ensemble $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 3\}$.

Exercice 6 ***(Mines MP 2017)***

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier les extrema locaux de f.

Exercice 7 ***(CCP MP 2018)***

On définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle f(h), h \rangle > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ par $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$.
   (a) Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique en $z_0 = f^{-1}(u)$.
   (c) Montrer que g admet un maximum global en z_0 (on pourra étudier le signe de $g(z_0+h) - g(z_0)$).

Exercice 8 ***(Mines MP 2021)***

Soient E un espace euclidien, $\|\|$ la norme de cet espace, $\varphi \in E^*$, f la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

Exercice 9 ***(Mines MP 2017)***

Déterminer les $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 10 ***(Mines MP 2021)***

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 11 ***(Mines MP/MPI 2023)*** ☆☆

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.
On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = \mathrm{tr}\left(M^T M\right)$ et $g : M \in E \mapsto \det M - 1$. On note h la restriction de f à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$.

1. Justifier que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer leur gradient en une matrice $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f admet un minimum sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice où il est atteint.
3. Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0. Montrer qu'il existe un chemin γ de classe $\mathscr{C}^1$ défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$. (*Indication :* considérer $t \mapsto M_0 \exp(tM_0^{-1}H)$)
4. Montrer que $\left(\nabla f_{M_0}\right)^{\perp} = \left(\nabla g_{M_0}\right)^{\perp}$.
5. Calculer le minimum de h sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.