Exercices à préparer pour le lundi 17 mai

Exercice 1 *(ENSEA MP 2010)*

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 2 *(ENSEA MP 2010)*

Étudier suivant $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 3 *(IMT 2017)*

On pose pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln k$ et $u_n = \dfrac{1}{S_n}$.

a) Trouver un équivalent de S_n.

b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 4 *(CCP MP 2019)*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

b) Énoncer et redémontrer le théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.

c) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. En déduire un équivalent de u_n.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(Centrale MP 2019)*

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ converge.

b) Déduire de la question précédente la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) On pose, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n}$.

Exercice 6 *(Mines MP 2015)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les familles $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ sont-elles sommables ?

Autres exercices

Exercice 7 *(Mines MP 2017)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 8 *(Mines d'Alès MP 2013)*

Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) S_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 9 *(Mines MP 2014)*

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.Montrer qu'il existe un unique réel tel que $xe^{nx} = 1$. On le note x_n.

b) Montrer que (x_n) admet une limite puis déterminer un équivalent de x_n.

c) Nature des séries $\sum x_n$ et $\sum x_n^2$.

Exercice 10 *(Mines MP 2019)*

Soient f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que $u_n \to 0$.

b) Si f est dérivable en 0 , que dire de $(u_n)_{n\geqslant 1}$?