Exercices à préparer pour le mardi 18 mai

Exercice 1 *(CCP PC 2009)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $f + id$ est bijective.

b) On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$. Montrer que $f + id$ est bijective.

Exercice 2 *(CCP MP 2018)*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

a) Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$

b) Montrer que $\operatorname{Im} u = \ker(u^2 + \mathrm{Id})$.

c) Montrer que u n'est pas injective (on pourra raisonner par l'absurde).

d) Montrer que $\operatorname{rg} u = 2$.

e) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(Mines MP 2010)*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4 *(TPE PSI 2010)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{rg}(A) = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(Mines MP 2019)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f est inversible et g de rang 1. Montrer que $f + g$ est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

Exercice 6 *(CCP MP 2013)*

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

a) Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

b) Exprimer $\operatorname{rg}(uv)$ en fonction de $\operatorname{rg} v$ et la dimension de $\ker u \cap \operatorname{Im} v$.

Exercice 7 *(Mines MP 2011)*

Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer noyau, image et rang de f.

Autres exercices

Exercice 8 *(Saint-Cyr MP 2016)*

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$. Montrer que $E = \ker f + \ker g$.

Exercice 9 *(Mines MP 2009)*

Montrer que la famille de fonctions $f_\alpha : t \mapsto |t - \alpha|$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ est libre.

Exercice 10 *(Centrale MP 2018)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

a) Définition et caractérisation des hyperplans. Soit φ une forme linéaire non-nulle, montrer que $\dim \ker \varphi = n - 1$.

b) Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et ψ des formes linéaires sur E. On suppose $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ libre et l'on se propose de montrer les équivalences entre

  i) $\varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$,

  ii) $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \subset \ker \psi$,

  iii) il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in E$, $|\psi(x)| \leqslant C \max\{|\varphi_k(x)|, 1 \leqslant k \leqslant p\}$

Montrer les implications évidentes

c) En considérant $\theta : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$, montrer $ii) \Rightarrow i)$. On montrera d'abord que θ est surjective

d) En considérant un supplémentaire de $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k$, montrer que $ii) \Rightarrow iii)$.