Exercices à préparer pour jeudi 20 mai

Exercice 1 *(CCP MP 2011)*

Soit $f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right)$ pour $t > 0$. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Exercice 2 *(CCP MP 2019)*

On note $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t} \mathrm{d}t$.

a) Démontrer que g est définie sur $]1, +\infty[$.

b) Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

c) Calculer la limite de g en $+\infty$ et expliciter g sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3 *(CCP MP 2019)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.

b) Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

c) Soit $S_N(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)\mathrm{d}t$.

d) En déduire $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

e) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 4 *(CCP MP 2017)*

On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,dt$. Montrer que (I_n) décroit vers 0. Trouver un équivalent simple de I_n.

Exercice 5 *(Mines MP 2010)*

Soit $F : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$. Montrer que F est constante. En déduire la valeur de $\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$.

Exercice 6 *(TPE MP 2011)*

a) Établir la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x) - \sin x}{x}\,dx$.

b) La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Autres exercices

Exercice 7 *(Mines MP 2016)*

a) Soit $I_n = n \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$. Déterminer la limite de I_n.

b) Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $J_n = n \int_0^1 \ln(1+t^n) f(t)\,dt$. Déterminer la limite de la suite J_n.

Exercice 8 *(Mines MP 2019)*

a) Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 9 *(Mines MP 2013)*

Convergence et limite de la suite $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right)$ pour $n \geqslant 2$.