Exercices à préparer pour vendredi 21 mai

Exercice 1 *(CCP MP 2019)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.

b) Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x)$.

c) Soit $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(x) = x$.

d) Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2 *(IMT MP 2016)*

Soie E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

b) Montrer que E est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. Est-ce un corps ?

Exercice 3 *(Mines MP 2017)*

Soient $P_1 = X$ et $Q_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $P_{n+1} = P_n + XQ_n$, $Q_{n+1} = -XP_n + Q_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $iP_n + Q_n = (1 + iX)^n$.

b) Calculer explicitement de manière très simple $P_n(\tan\theta)$ et $Q_n(\tan\theta)$ (avec $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

c) Trouver les racines de P_n et Q_n.

d) Déterminer le degré de P_n et Q_n.

e) Exprimer P_n et Q_n comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 *(CCP MP 2013)*

Calculer $473 \wedge 220$. Donner les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de $473x + 220y = k$ où $k = 1, 11, 22$.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(Mines MP 2012)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, non nul, tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$. Montrer que les racines de P sont de module 1. Trouver ces racines et trouver P.

Exercice 6 *(Centrale MP 2019)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\mathrm{Com}(M)$ la comatrice de M.

a) Soit $r \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer la comatrice de J_r^n

b) Pour A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.

c) Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $\mathrm{Com}(M)$?

d) L'application Com est-elle injective ? Quelle est son image ?

Autres exercices

Exercice 7 *(Mines MP 2019)*

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 8 *(Centrale MP 2018)*

Soient $\alpha > \beta$ les deux racines réelles de $P = X^2 - X - 1$. On pose $A = \{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\sigma : a + \alpha y \in A \mapsto x + \beta y$.

a) Montrer que A est un anneau et que σ est un automorphisme de A. Expliciter σ^{-1}.

b) On note U l'ensemble des inversibles de A et $N : z \in A \mapsto z.\sigma(z)$.

  i) Montrer que, si $z \in A$ alors $z \in U$ si et seulement si $|N(z)| = 1$.

  ii) Soit $V = U \cap]1, +\infty[$. Montrer que si $x + \alpha y \in V$ alors $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$.

  iii) En déduire que $V = \{\alpha^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 9 *(Mines MP 2013)*

Soient $c, x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes. On définit A par $a_{ii} = x_i$, $a_{ij} = c$ si $i > j$ et $a_{ij} = 1$ si $i < j$. On pose $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Déterminer le degré du polynôme $P = \det(A + XJ)$.

b) Calculer $\det A$. On pourra commencer par le cas $c \neq 1$.