Exercices à préparer pour mardi 25 mai

Exercice 1 *(CCP MP 2011)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, soit $u_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}$. Étudier la convergence simple et uniforme de (u_n) et de (u_n').

Exercice 2 *(Mines d'Alès MP 2013)*

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3 *(Mines MP 2011)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver le domaine de définition et développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-2x\cos\alpha + x^2}$.

Exercice 4 *(ENSEA MP 2017)*

Soit $\sum a_n$ une série de réels absolument convergente. Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini. Montrer que $t \mapsto S(t)e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)e^{-t}\,dt$.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(IMT MP 2017)*

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} x^n$.

a) Trouver le rayon de convergence R de cette série entière.

b) La série converge-t-elle pour $x = R$? A-t-on convergence normale sur $]-R, R[$?

c) Justifier que S est dérivable sur $]-R, R[$. Exprimer $(1-x)S'(x)$ en fonction de $S(x)$.

d) En déduire $S(x)$.

Exercice 6 *(CCP MP 2019)*

Soit E un ensemble à n éléments On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E.

a) Démontrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.

b) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence R non nul.

c) Calculer $e^x f(x)$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n.

d) Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'événement « aucun des n élèves n'a sa propre copie ». Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Autres exercices

Exercice 7 *(Mines MP 2016)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer le développement en série entière de $\varphi_\alpha : x \mapsto \cos(\alpha \arccos x)$.

b) Pour quelles valeurs de α la fonction φ_α est-elle polynomiale ?

Exercice 8 *(Mines MP 2016)*

Soit (a_n) une suite de réels telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. La série $\sum a_n$ est-elle nécessairement convergente ?

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to1^-}{=} \mathrm{o}\left(-\ln(1-x)\right)$.

Exercice 9 *(Mines MP 2019)*

Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leqslant A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.