Exercices à préparer pour jeudi 27 mai

Exercice 1 *(CCP MP 2018)*

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (a, b et c à déterminer).

c) En déduire les solution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x+3y \end{array} \right.$

Exercice 2 *(CCP MP 2019)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; on étudie l'équation (E) : $\quad M^2 + M = A \quad$ d'inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.

a) On suppose que M vérifie l'équation (E). Déterminer les valeurs propres possibles de M.

b) En utilisant le déterminant de A, montrer qu'une valeur propre de M appartient à $\{-1, 0\}$.

c) Qu'en déduit-on sur le polynôme caractéristique de M?

d) Montrer que M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

e) Trouver 4 matrices solutions de (E).

Exercice 3 *(CCP MP 2011)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit u et v des endomorphismes de E qui commutent. Montrer qu'ils ont un vecteur propre commun.

b) Soit $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils ont un vecteur propre commun.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 4 *(IMT MP 2019)*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\begin{pmatrix} \cos\frac{a}{n} & \sin\frac{a}{n} \\ \sin\frac{a}{n} & \cos\frac{a}{n} \end{pmatrix}^n$.

Exercice 5 *(Mines MP 2017)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{tr} A = 0$ et $A^n \neq 0$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Calculer la dimension de $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$.

c) On suppose de plus que $\operatorname{tr}(A^2) = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 *(Ensea MP 2013)*

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ et f canoniquement associée.

a) Soit $V = {}^t(a, b, c)$. Montrer que si V est un vecteur propre de ${}^tA$ alors le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f.

b) Étudier la réciproque.

c) Rechercher les plans stables par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Autres exercices

Exercice 7 *(Mines MP 2019)*

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.

a) Montrer que f est trigonalisable.

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left(f^2\right)$.

Exercice 8 *(Mines MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tels que $AX - XB = C$