Exercices à préparer pour vendredi 28 mai

Exercice 1 *(CCP MP 2019)*

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$, (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E, \lim_{n\to\infty}\langle x_n - x, y\rangle = 0$.

a) i) Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.

ii) Montrer que convergence forte implique convergence faible

b) Montrer que (x_n) converge fortement vers $x \iff (x_n)$ converge faiblement vers x et $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$

c) Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Exercice 2 *(Mines MP 2012)*

Soit (S) la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

a) Quels sont les plans tangents à (S) parallèles à (Oxy) ?

b) Pour chacun de ces plans, quelle est localement la position relative de (S) ?

c) Quelle est la postion globale de (S) par rapport à (Oxy) ?

Exercice 3 *(CCP MP 2017)*

Trouver les extrema de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + 3xy - 15x - 12y$.

Exercice 4 *(Mines MP 2017)*

a) Soit $U =]0, +\infty[^2$. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto (\frac{y}{x}, x^2 + y^2)$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U sur U.

b) Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + u\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$ en posant $g = f \circ \varphi^{-1}$

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(Mines MP 2009)*

Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variables $\varphi(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 6 *(IMT MP 2018)*

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

b) Monter que $\{M \in M_n(\mathbb{K}), M \text{ nilpotente}\}$ est un fermé non compact d'intérieur vide.

Exercice 7 *(Mines MP 2019)*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle$, un espace euclidien, $f \in S^{++}(E)$, $u \in E$. Pour $x \in E$, soit $F(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.

a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$, calculer sa différentielle.

b) Montrer que F atteint son minimum sur E en un point que l'on précisera.

Autres exercices

Exercice 8 *(Mines MP 2019)*

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$, $f(x, y) = y(1-x)$ sinon. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 9 *(IMT MP 2019)*

Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right| ; n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 10 *(IMT MP 2017)*

Soient E un espace vectoriel normé, A un ouvert de E, B une partie quelconque de E.

a) Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.

b) Donner un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert.

Exercice 11 *(Mines MP 2011)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.