Exercices à préparer pour lundi 31 mai

Exercice 1 *(CCP MP 2018)*

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

b) Soient A et B deux éléments incompatibles de T. Montrer que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leqslant \frac{1}{4}$.

c) Soient A et B deux éléments de T.

i) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)\mathbb{P}(A)$.

ii) Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 2 *(ENSEA MP 2017)*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k)$ est la loi uniforme sur $[\![0;k]\!]$. Déterminer la loi du couple (X, Y), la loi de X en fonction de celle de Y. Calculer l'espérance de X en fonction de celle de Y.

Exercice 3 *(Saint-Cyr MP 2016)*

Soient p dans $]0,1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, $U = \max(X, Y)$, $V = \min(X, Y)$.

a) Déterminer les lois de U, V et (U, V).

b) Déterminer la loi de $U + V$. Calculer $\mathbb{E}(U + V)$.

Exercice 4 *(CCP MP 2019)*

Soient λ et μ dans $\mathbb{R}^{+*}$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnellement à l'événement $(X + Y = n)$

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(CCP MP 2017)*

On définit l'univers Ω par l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). Soit σ un élément de Ω, on définit la variable aléatoire X_k par $X_k(\sigma) = 1$ si $\sigma(k) = k$ (k est un point fixe) et 0 sinon. On note N le nombre de points fixes de σ.

a) Que dire de X_k ? Calculer son espérance et sa variance.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

c) Exprimer N en fonction des X_k.

d) En déduire $\mathbb{E}(N)$, $\mathrm{V}(N)$ et commenter.

Exercice 6 *(Mines MP 2018)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![n;+\infty[\![$ telle que, pour tout $k \geqslant n$, $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7 *(Centrale MP 2019)*

a) Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X - a)(X - b)(X - \overline{b})$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.

b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1}, p_{n+2}

c) Donner une expression et un équivalent de p_n.

Autres exercices

Exercice 8 *(Mines PC 2015)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \ldots, U_p$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $p - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard. On tire dans cette urne n boules avec remise. On note N_p le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de N_p. Donner son espérance.

Exercice 9 *(Mines MP 2015)*

Soient $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire indépendante des X_k et suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S = X_1 + \ldots + X_N$ et $T = N - S$. Déterminer la loi de (S, N). En déduire la loi de S et de T.