Exercices à préparer pour mardi 1er juin

Exercice 1 *(CCP MP 2013)*

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, u un vecteur non nul de E, U la matrice de u dans $\mathscr{B}$ et $F = \text{Vect}(u)$.

a) Soit p la projection orthogonale sur F. Montrer que pour tout $x \in E$, $p(x) = \langle x, u\rangle \dfrac{u}{\|u\|^2}$.

b) En déduire que la matrice de p dans $\mathscr{B}$ est $\dfrac{U^tU}{{}^tUU}$. On pose $A = U^tU$.

c) Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

d) Montrer que $I_n - \dfrac{U^tU}{{}^tUU}$ est la matrice d'une projection orthogonale sur un espace vectoriel que l'on précisera.

Exercice 2 *(Mines MP 2011)*

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 3 *(CCP MP 2011)*

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que u est antisymétrique (c'est-à-dire $\big\langle u(x), y\big\rangle = -\big\langle x, u(y)\big\rangle$ pour tout $x, y \in E$).

Exercice 4 *(Mines MP 2017)*

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2\, dt$.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 *(CCP MP 2016)*

Soit $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\big\langle f, g\big\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg + f'g'$.

a) Montrer que cela définit un produit scalaire sur E.

b) On note U l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f(1) = 0$ et V l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f'' = f$. Montrer que U et V sont deux sous-espaces vectoriels de E, orthogonaux pour le produit scalaire précédent.

c) A-t-on $U \oplus V = E$?

Exercice 6 *(TPE MP 2019)*

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, un espace euclidien, H un hyperplan de E, s la réflexion orthogonale d'hyperplan H, $f \in \mathscr{O}(E)$.

a) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale, en déterminer les espaces propres.

b) Déterminer les éléments de $\mathscr{O}(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

Exercice 7 *(CCP MP 2019)*

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soient $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto x + k\langle x, a\rangle a$. Montrer que f est symétrique. Pour quels k, f est-il inversible? Trouver les valeurs propres de f et ses espaces propres.

Exercice 8 *(Mines MP 2017)*

Soit E un espace euclidien. Si V est un sous-espace vectoriel de E, on note s_V la symétrie orthogonale par rapport à V. Si H et K sont deux sous-espaces vectoriels de E, à quelle condition s_H et s_K commutent-elles?

Autres exercices

Exercice 9 *(Centrale MP 2018)*

Soit $\varphi : (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.
On se place désormais dans l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

c) On pose $F = \{Q \in \mathbb{R}[X], Q(0) = 0\}$. Montrer que l'inclusion précédente est stricte.