Exercices à préparer pour mercredi 2 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2010)*

Écrire, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ autour du vecteur $(1,0,-1)$.

Exercice 2 *(CCP MP 2011)*

Soit $a_1,\dots,a_n$ des réels non tous nuls et $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Quel est le rang de A ? Qu'en déduit-on sur son spectre ?

c) Calculer A^2 et en déduire le polynôme caractéristique de A et sont spectre.

Exercice 3 *(Mines MP 2019)*

Déterminer l'ensemble des couples (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tels qu'existe $M\in S_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{tr}(M)=a$ et $\det(M)=b$

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 4 *(Mines MP 2011)*

Soit $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est la matrice d'une rotation si, et seulement s'il existe $t\in[0,4/27]$ tel que a,b,c sont les racines de X^3-X^2+t.

Exercice 5 *(ENSEA MP 2016)*

Soit A une matrice symétrique réelle de taille n avec $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbb{R}^+$. Soit $U\in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\mathrm{tr}(AU)|\leqslant \mathrm{tr}\,A$.

Exercice 6 *(Mines MP 2011)*

Soit $A=(a_{ij})\in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q,R)\in(M_n(\mathbb{R}))^2$ tel que ${}^tQQ=I_n$, R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et $A=QR$. En déduire que $(\det A)^2\leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right)$.

Exercice 7 *(Mines MP 2015)*

Soit $A\in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a) Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la suite $\left(\left(I_n+\dfrac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$ que l'on décrira.

Autres exercices

Exercice 8 *(CCP MP 2019)*

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$, $A\in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $B\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang m.

a) Si $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, montrer que ${}^tXAX>0$

b) Montrer que $n\geqslant m$.

c) Montrer que $C=\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 9 *(Mines MP 2019)*

Soit $n\geqslant 2$ un entier. Pour $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit A_1 la matrice obtenue en ôtant à A sa première ligne et sa première colonne.

a) Montrer que, si $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A_1\in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

b) Si $x,y\in\mathbb{R}^n$ et $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $\langle Ax,x\rangle\left\langle A^{-1}y,y\right\rangle\geqslant\left\langle x,y\right\rangle^2$.

c) Trouver $y\in\mathbb{R}^n$ tel que : $\forall A\in S_n^{++}(\mathbb{R}),\min\left\{\dfrac{\langle Ax,x\rangle}{\left\langle x,y\right\rangle^2};x\in\mathbb{R}^n,\left\langle x,y\right\rangle\neq 0\right\}=\dfrac{\det(A)}{\det(A_1)}$

d) Pour A et B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ comparer $\dfrac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)}$ et $\dfrac{\det(A)}{\det(A_1)}+\dfrac{\det(B)}{\det(B_1)}$.

INDICATIONS

Exercice 4

- que doit vérifier une matrice de rotation de $\mathbb{R}^3$?
- pour les valeurs de t, on doit avoir 3 racines réelles pour le polynôme

Exercice 5

diagonaliser A pour se ramener à un problème équivalent plus simple

Exercice 6

- Méthode de Gram-Schmidt
- regarder plus en détail l'algorithme de Gram-Schmidt et comparer les normes des colonnes de A aux coefficients diagonaux de R.

Exercice 7

- s'inspirer des démonstrations sur les matrices symétriques (stabilité de l'orthogonal)
- certainement en utilisant la question précédente.

Exercice 8

- exprimer dans une bonne base
- que peut-on dire sur le rang d'une matrice de taille $\times q$?
- regarder le noyau

Exercice 9

- utiliser la bonne caractérisation des matrices symétriques définies positives et regarder comment l'appliquer sur la sous-matrice
- calculs dans une bonne b.o.n.
-
-