

Exercices à préparer pour jeudi 3 juin

Exercice 1 (CCP MP 2018)

Résoudre sur $[0, \pi/2]$ puis sur $[0, \pi]$: $\cos(x)y' - \sin(x)y = \cos^3 x$.

Exercice 2 (Mines MP 2017)

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' - 4x y' + (x^2 + 6)y = 0$.

- Déterminer les solutions de (E) développables en série entière en 0.
- Déterminer la dimension de l'espace des solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 3 (CCP MP 2019)

Résoudre le système différentiel $x' = x + 2y - z$, $y' = 2x + 4y - 2z$, $z' = -x - 2y + z$

Exercice 4 (CCP MP 2019)

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $k \in \mathbb{N}^*$, u une application de classe C^k de I dans \mathbb{R} . Pour $f \in C^k(I, \mathbb{R})$, soit $L_u(f) = f' + uf$

- Montrer que L_u est linéaire. Calculer $L_u \circ L_u$.
- Résoudre $y'' + 2xy' + y = 0$.

Exercices de révisions, exercices classiques

Exercice 5 (Mines MP 2016)

Soient a, b deux fonctions continues sur $[u, v]$ à valeurs réelles. Soit $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 6 (Mines MP 2012)

Déterminer l'ensemble des solutions de $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 7 (Mines MP 2017)

Soient a et b deux fonctions continues sur \mathbb{R} et de période 1 et y une solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y(k) = 0$.

Exercice 8 (Mines MP 2019)

Soit q une fonction continue et intégrable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , (E) l'équation différentielle $y'' + qy = 0$

- Montrer que, si y est une solution bornée de (E), alors $y'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
- Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 9 (TPE MP 2013)

Écrire le système différentiel ($x'' = x' + y' - x$, $y'' = x' + y' - y$) sous forme d'un système d'ordre 1 et le résoudre.

Autres exercices

Exercice 10 (Mines MP 2016)

- Soient $a > 0$ et y une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ telle que $y' + ay$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Montrer que y est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- Soit φ de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C} telle que $t \rightarrow \varphi'(t)e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Montrer que $t \rightarrow \varphi(t)e^{-t}$ l'est aussi.

Exercice 11 (Mines MP 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A, B] = AB - BA$, on suppose que A et B commutent avec $[A, B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]}$.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $A^k B - B A^k = k A^{k-1} [A, B]$.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
- Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A, B]}{2}}$.

Exercice 12 (Mines MP 2018)

Soit E un espace euclidien et u une application de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $SO(E)$. Montrer que u est un morphisme de groupe si, et seulement si, il existe un endomorphisme antisymétrique a de E tel que $u(t) = \exp(ta)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

INDICATIONS

Exercice 5

le faire par l'absurde, utiliser la compacité pour obtenir un point d'accumulation et regarder ce qu'il se passe en ce point

Exercice 6

méthode de variation des constantes

Exercice 7

En général, on utilise le théorème de Cauchy - on peut essayer de montrer que y est pas loin d'être de période 1 (en comparant $y(t)$ et $y(t+1)$).

Exercice 8

- Comment obtenir y' (à partir de y'')?
- par l'absurde - regarder le wronskien.

Exercice 9

long et pénible

Exercice 10

- poser $g = y' + ay$ et chercher les solutions
-

Exercice 11

-
-
- c'est visiblement $f(1)$ donc la question précédente devrait permettre de l'obtenir d'une autre façon

Exercice 12

Écrire ce que doit vérifier $u(t)$. Visiblement u devrait être solution d'une équation différentielle linéaire usuelle.