CCP, IMT, TPE

Exercice 1 *(TPE MP 2019)*

Un nombre complexe α est dit algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul a coefficients entiers. Soit α un nombre algébrique.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$, unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d le degré de Π.

b) On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \left\{P(\alpha); P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\right\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$

c) Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

Exercice 2 *(TPE MP 2015)*

a) Soit p un nombre premier. Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n^2 + 13n + 20$ soit divisible par 9.

Exercice 3 *(TPE MP 2013)*

Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Exercice 4 *(TPE MP 2019)*

Montrer de deux manières différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 5 *(CCP MP 2018)*

On note $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA \neq A$. On note F l'ensemble des matrices $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $X + {}^tX = (\operatorname{tr} X)A$.

a) Montrer que $M_n(R) = A_n(\mathbb{R}) + S_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $A_n(\mathbb{R}) \subset F$.

d) On suppose $\operatorname{tr}(A) \neq 2$. Montrer que $F = A_n(\mathbb{R})$.

e) On suppose $\operatorname{tr}(A) = 2$. Déterminer F.

Exercice 6 *(CCP MP 2018)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On note U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Calculer $\det A(-1)$.

b) On note $P(x) = \det(A(a) + xU)$. Montrer que P est polynomiale de degré au plus 1.

c) Calculer $P(-a)$ et $P(1)$. En déduire $\det A(a)$.

d) Étudier la continuité de $a \mapsto \det A(a)$ et retrouver la valeur de $\det A(-1)$.

Exercice 7 *(Mines Alès MP 2013)*

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ où $m_{ii} = a + b$, $m_{i,i+1} = ab$, $m_{i+1,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls. Calculer $\det M$.

Exercice 8 *(CCP MP 2019)*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.

a) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang r. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $\mathrm{Id}_E + \lambda p$.

b) Soient $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}), B = {}^tAA$. Calculer le rang de B.

c) La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.

Exercice 9 *(CCP MP 2019)*

a) Localiser les racines de $P = X^3 - X - 1$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\chi_A(x)$ en $+\infty$. Que vaut $\chi_A(0)$?

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 10 *(CCP MP 2019)*

a) Soient $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ toutes deux diagonalisables telles que $\chi_M = \chi_N$.Montrer que $\exists (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $M = AB$ et $N = BA$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que n est pair.

Exercice 11 *(CCP MP 2018)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) On suppose que F et G deux sous espaces de E stables par u et supplémentaires. On note $v = u_F$ et $w = u_G$. Si f est un endomorphisme, π_f désigne son polynôme minimal.

  i) Montrer que χ_v et χ_w divisent χ_u. Justifier que π_v et π_w divisent π_u.

  ii) montrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$.

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u) \in GL(E)$ si et seulement si $P \wedge \pi_u = 1$.

Exercice 12 *(CCP MP 2019)*

Soient $a \in \mathbb{R}$, b et c deux éléments de $\mathbb{R}^+$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Si $c = 0$ et $b \neq 0$, calculer $\exp(A)$.

c) Si $bc \neq 0$, comment calculer $\exp(A)$?

Exercice 13 *(CCP MP 2018)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et ℓ une forme linéaire non nulle sur E. Soit $a \in E \backslash \{0\}$.

a) Déterminer la dimension de $\ker \ell$.

b) Soit $\ell' \in E^*$ non nulle telle que $\ker \ell \subset \ker \ell'$. Montrer que ℓ et ℓ' sont proportionelles.

c) Soit $f : x \in E \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$. Montrer que f est un endomorphisme de E.

d) On suppose que $\ell(a) \neq 0$.

  i) Déterminer $\ker f$

  ii) Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 14 *(IMT MP 2018)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A.

b) Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ soient diagonales.

c) Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15 *(TPE MP 2010)*

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\operatorname{tr} M = 0$.

Exercice 16 *(CCP MP 2019)*

On se place dans l'espace $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. On pose

$$\Phi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

On appelle $\mathscr{P}$ (resp $\mathscr{I}$) le sous-espace des fonctions paires (resp impaires).

a) Montrer que $\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = E$.

b) Montrer que Φ est un produit scalaire.

c) Montrer que $\mathscr{I} = \mathscr{P}^\perp$.

d) Déterminer $\widehat{f}$, image de f par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

Exercice 17 *(CCP MP 2019)*

Les 2 questions sont indépendantes.

a) Quel est le cardinal de $M_n(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et orthogonales)

b) On admet que $(M, N) \mapsto (M \mid N) = \operatorname{tr}\left(M^T N\right)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

  i) Prouver que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux pour ce produit scalaire.

  ii) Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ fixée. Calculer

$$\inf_{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(a_{i,j} - m_{i,j}\right)^2$$

Exercice 18 *(CCP MP 2017)*

Soit E un espace euclidien de dimension $2n$ muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension n et supplémentaires. On note p_F et p_G les projecteurs respectivement sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F. Soit φ une isométrie de E telle que $\varphi(F) \subset G$. Soit enfin $f_\varphi : x \in E \mapsto \varphi(p_F(x)) + \varphi^{-1}(p_G(x))$.

a) Démontrer que $\varphi(F) = G$, $f_\varphi \circ f_\varphi = \mathrm{Id}_E$, $f_\varphi(F) = G$ et $f_\varphi(G) = F$.

b) On suppose que pour tout $u, u' \in F$, $\langle \varphi(u), u' \rangle = \langle u, \varphi(u') \rangle$. Démontrer que f_φ est un automorphisme orthogonal.

c) Démontrer la réciproque.

Exercice 19 *(Saint-Cyr MP 2016)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $E = \mathbb{R}^n$, $S \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $q_A(X) = {}^tXAX$.

a) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \|X\|^2 \leqslant q_A(X) \leqslant \lambda_n \|X\|^2$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $q_A^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20 *(IMT MP 2019)*

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, e_λ la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$. On note F le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par $\left(e_\lambda\right)_{\lambda\in\mathbb{C}}$. Montrer qu'en posant $\forall f \in F, N(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$, on définit une norme sur F.

Exercice 21 *(TPE MP 2017)*

Soient $d \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de $\mathbb{R}_d[X]$.

a) On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est dans $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Montrer que (P_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 22 *(CCP MP 2018)*

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$. On définit pour $A \in E, N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}A\}$.

a) Montrer que N est une norme telle que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$. La fonction ρ est-elle une norme sur E ?

b) Montrer que $\rho(A) \leqslant N(A)$ pour tout $A \in E$.

c) On suppose $\rho(A) < 1$. Prouver que $\sum A^k$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 23 *(CCP MP 2018)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1}{3^n n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$.

a) Montrer que pour n assez grand, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. On pourra utiliser un développement asymptotique.

b) En utilisant $\dfrac{u_n}{v_n}$, montrer que $\sum u_n$ diverge.

c) En considérant $w_n = \dfrac{2}{3} \ln \dfrac{n+1}{n} + \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{2/3}}$.

Exercice 24 *(Mines d'Alès MP 2013)*

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n vérifiant $u_n^3 + nu_n = 1$.

b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

c) Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 25 *(Mines d'Alès MP 2013)*

Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}(n^2 + an + b)\right)$.

Exercice 26 *(CCP MP 2019)*

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair, f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant |P(t)|$

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.

b) Montrer que f est la fonction nulle.

c) Le résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

Exercice 27 *(CCP MP 2017)*

Soient $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\, dt$.

a) Trouver les conditions sur (α, β) pour que I_1 soit définie.

b) Trouver les conditions sur (α, β) pour que I_2 soit définie.

c) Tracer dans un repère (avec α en abscisses, β en ordonnées) les couples (α, β) pour lesquels I_1 et I_2 sont simultanément définies.

Exercice 28 *(TPE MP 2016)*

Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que f' est intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge.

Exercice 29 *(CCP MP 2019)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{2x}{n^2 + x^2}$.

a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

b) Montrer que f est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi$. *Indication :* on pourra considérer $t \mapsto \dfrac{2x}{t^2 + x^2}$.

Exercice 30 *(CCP MP 2017)*

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ où $u_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$.

a) Étudier la convergence simple et normale sur $[0, +\infty[$. Préciser le sens de variation de S.

b) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$. En déduire la valeur de $S(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 31 *(IMT MP 2016)*

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+t}\,dt$.

a) Montrer que F est bien définie et continue.

b) On pose $G(x) = F(x) - \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt$. Montrer que $G(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En déduire un équivalent de F en $+\infty$.

c) Donner un équivalent de F en 0^+.

Exercice 32 *(IMT MP 2019)*

a) Développer $(1-x)^{-1/2}$ en série entière sur $]-1, 1[$. On écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ce développement.

b) Donner un équivalent de a_n.

c) Trouver un équivalent en 1^- de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 33 *(IMT MP 2018)*

On définit $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

a) Montrer que pour out $n \geqslant 2$, $\frac{1}{3} n! \leqslant d_n \leqslant n!$.

b) En déduire le rayon de convergence de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

c) Trouver une équation différentielle vérifiée par S et en déduire S.

Exercice 34 *(IMT MP 2019)*

a) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ sont les

$$x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Montrer qu'une seule des solutions admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 35 *(TPE MP 2009)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre $X' = AX$.

Exercice 36 *(CCP MP 2011)*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 37 *(TPE MP 2011)*

Soit $A > 0$. Quel est le maximum de xyz pour x, y, z dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x + y + z = A$? tels que $x + 2y + 3z = A$?

Exercice 38 *(IMT MP 2019)*

Dans un jardin de $n \geqslant 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0,[1$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit à l'année k, elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i. Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

a) Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.

b) Pour tout k, calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et en déduire la loi de X.

c) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 39 *(IMT MP 2018)*

Soit T une variable aléatoire de distribution uniforme sur $[\![1;6]\!]$, $X_1, \dots, X_6$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

a) Montrer que les X_k admettent une espérance finie et une variance puis les calculer.

b) On pose $Z(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{T(\omega)} (X_k(\omega) - 1)$. Montrer que Z est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 40 *(CCP MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

a) Pour $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X + Y = k)$.

b) Même question pour $k \in [\![n+1;2n]\!]$.

c) En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

d) Déterminer $\mathbb{P}(X + Y + Z = n)$.

Mines

Exercice 41 *(Mines MP 2017)*

Soient G et H deux groupes cycliques. À quelle condition $G \times H$ est-il cyclique ?

Exercice 42 *(Mines MP 2017)*

On note φ l'indicatrice d'Euler. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varphi(n)$ divise n.

Exercice 43 *(Mines MP 2013)*

Soit $(G, \dot{})$ un groupe de neutre noté e. Soient H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$.

a) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

b) On définit $f : (h, k) \in H \times K \mapsto hk$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un morphisme de groupes. Dans ce cas, montrer que f est injective si et seulement si $H \cap K = \{e\}$.

c) On dit que H est distingue lorsque, pour tout $x \in G$, $xHx^{-1} \subset H$. On suppose H et K distingués.

i) Montrer que HK est un sous-groupe distingué de G.

ii) Montrer que si $H \cap K = \{e\}$ et $HK = G$ alors G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 44 *(Mines MP 2017)*

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ scindé, à racines simples sur $\mathbb{R}$ et de degré $n \geqslant 2$.

a) Montrer que P' est scindé à racines simples.

b) Montrer que 2 coefficients consécutifs de P ne peuvent pas être tous les deux nuls.

Exercice 45 *(Mines MP 2019)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

a) Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples et montrer que toute racine de P' appartient a l'enveloppe convexe des racines de P.

b) Soient a et b deux nombres complexes, $c \in [a, b]$, A l'ensemble des racines de $P - a$, B l'ensemble des racines de $P - b$ et C l'ensemble des racines de $P - c$. Montrer que C est contenu dans l'enveloppe convexe de $A \cup B$.

Exercice 46 *(Mines MP 2013)*

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes nilpotents de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q \geqslant n$. Montrer que $f^p \circ g^q = 0$.

Exercice 47 *(Mines MP 2018)*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. On pose $N = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \ker(u^p)$ et $I = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\,(u^p)$.

a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker(u^n)$ et $I = \mathrm{Im}\,(u^n)$.

b) Montrer que N et I sont supplémentaires et stables par u. Montrer que u_N est nilpotent et u_I est bijectif.

c) Réciproquement, on suppose que $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u, u_F nilpotent et u_I bijectif. Montrer que $N = F$ et $I = G$.

Exercice 48 *(Mines MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrer que $(BA)^n = 0$.

Exercice 49 *(Mines MP 2013)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, M et N dans $M_n(\mathbb{C})$

a) Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$, $X = \mathrm{tr}\,(X)M + N$

b) Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$, $X + {}^tX = \mathrm{tr}\,(X)M$.

Exercice 50 *(Mines MP 2011)*

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X - (P_n(X))^2$ soit divisible par X^n (utiliser un dl de $x \mapsto \sqrt{1 + x}$).

b) Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = I_n + N$.

Exercice 51 *(Mines MP 2016)*

On donne des réels $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

a) Soient $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}$. Montrer que f s'annule au plus $n - 1$ fois.

b) Soient $t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 < t_1 < \ldots < t_n$ et $M = (t_i^{\alpha_j})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$. Montrer que $\det M > 0$.

Exercice 52 *(Mines MP 2011)*

Soit K un corps et $n \geqslant 2$. On suppose que $A \in M_n(K)$ vérifie $\det(A + M) = \det A + \det M$ pour tout $M \in M_n(K)$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 53 *(Mines MP 2018)*

Soient m et n deux entiers strictement positifs. Trouver tous les morphismes de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 54 *(Mines MP 2018)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si il existe n hyperplans $H_1, \dots, H_n$ de E, stables par f tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

Exercice 55 *(Mines MP 2018)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $\mathcal{C}(M) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. Montrer l'équivalence entre

a) M possède n valeurs propres distinctes,

b) $\dim \mathcal{C}(M) = n$,

c) pour tout $A \in \mathcal{C}(M)$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, $A = P(M)$.

d) pour tout $A, B \in \mathcal{C}(M)$, $AB = BA$.

Exercice 56 *(Mines MP 2017)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.

Exercice 57 *(Mines MP 2016)*

Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$, $A, B_1, \dots, B_p$ dans $M_n(\mathbb{C})$, $b_1, \dots, b_p$ des complexes distincts. On suppose que pour tout $k \in [\![0\,;p]\!]$, $A^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k B_i$.

a) Montrer que pour $i \in [\![1\,;p]\!]$, $B_i \in \mathbb{C}[A]$.

b) Montrer que A est diagonalisable.

c) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 58 *(Mines MP 2019)*

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer le spectre de la comatrice de A.

Exercice 59 *(Mines MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $C(A) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\right\}$, $C'(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); \forall M \in C(A), MX = XM\right\}$

a) Quelle est la dimension de $C(A)$? A-t-on $C(A) = \mathbb{R}[A]$?

b) Quelle est la dimension de $C'(A)$? Comparer $C'(A)$ et $\mathbb{R}[A]$.

Exercice 60 *(Mines MP 2017)*

Soit E un espace euclidien de dimension n. La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque pour tout $i \neq j$, $\left\langle x_i, x_i \right\rangle < 0$.

a) Montrer que si $(x_1, \dots, x_p)$ est *obtusangle* et (λ_1, λ_p) sont des réels quelconques, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\|$$

En déduire que $p \leqslant n+1$.

b) Montrer qu'il existe une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires vérifiant $\left\langle u_i, u_j \right\rangle = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.

c) Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires vérifiant $\left\langle u_i, u_j \right\rangle = \alpha < 0$ si $i \neq j$ alors $\alpha = -\frac{1}{n}$.

Exercice 61 *(Mines MP 2018)*

On pose $E = \mathbb{R}^2$. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note M_f la matrice de f dans la base canonique. Soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ qui a $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ associe $B(u, v) = xx' - yy'$. On pose $G = \{f \in \mathscr{L}(E), \forall (u, v) \in E \times E, B(f(u), f(v)) = B(u, v)\}$.

a) Montrer que G est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f \in G$ si et seulement si ${}^tM_f A M_f = A$.

c) Paramétrer $\{M_f, f \in G\}$ (décrire cet ensemble avec un ou plusieurs paramètres).

d) Soit $f \in G$. Étudier le caractère diagonalisable de f.

Exercice 62 *(Mines MP 2019)*

Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non nuls de E. Pour $x \in E \backslash \{0\}$, soit $f(x) = \dfrac{\langle x, a \rangle \langle x, b \rangle}{\|x\|^2}$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f.

Exercice 63 *(Mines MP 2019)*

a) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M = -{}^tM$ si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX = 0$.

Exercice 64 *(Mines MP 2018)*

On définit $f : X \in A_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n + X)(I_n - X)^{-1} \in GL_(\mathbb{R})$.

a) Justifier la bonne définition de f

b) Montrer que f est à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$.

c) A-t-on $f(A_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$?

d) Décrire $f(A_n(\mathbb{R})))$.

Exercice 65 *(Mines MP 2017)*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que ${}^tA = A^p$. On pose $B = A^{p+1}$.

a) Montrer que $B^p = B$ et que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$. Que dire des valeurs propres de B ?

b) Montrer que $B^2 = B$ et comparer $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} B$, $\ker A$ et $\ker B$.

c) Montrer que, pour tout $X \in \operatorname{Im} A$, $\|AX\| = \|X\|$.

Exercice 66 *(Mines MP 2011)*

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $G = \{A^k, k \in \mathbb{N}^*\}$ est un groupe pour la multiplication. Déterminer son cardinal et la nature géométrique de son élément neutre.

b) Justifier que $\exp A$ est la matrice d'une rotation. Calculer $\exp A$

Exercice 67 *(Mines MP 2019)*

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé réel, K un compact non vide de E, f une application de K dans K telle que $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

a) Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on note x.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^N$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Exercice 68 *(Mines MP 2018)*

Soit E un espace vectoriel normé, dont la sphère unité est notée S. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

a) u est continue

b) $u^{-1}(S)$ est un fermé de E

c) l'image par u de toute suite bornée est une suite bornée

d) l'image par u de toute suite convergeant vers 0 est une suite convergeant vers 0.

Exercice 69 *(Mines MP 2016)*

Soient E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f(1) = 0$. Déterminer l'adhérence de F pour la norme infinie, par la norme de la convergence en moyenne. Même question avec l'intérieur de F.

Exercice 70 *(Mines MP 2015)*

Soient $(E, \|\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ continue non nulle. On pose $|||f||| = \sup\limits_{y\neq 0} \dfrac{|f(y)|}{\|y\|}$. Soit $x \in E\backslash \ker f$. Montrer que $d(x, \ker f) = \dfrac{|f(x)|}{|||f|||}$ et que la distance est atteinte si et seulement si $|||f|||$ est atteinte.

Exercice 71 *(Mines MP 2011)*

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme, et une matrice A dont la suite des puissances $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. On pose alors $B_p = \dfrac{I_n + A + \cdots + A^{p-1}}{p}$ pour $p \geqslant 1$.

a) Montrer que (B_p) admet une valeur d'adhérence. On en choisit une, notée B. Montrer que $BA = AB = B$ puis que $B^2 = B$.

b) Montrer que $\ker B = \operatorname{Im}(A - I_n)$ et que $\operatorname{Im} B = \ker(A - I_n)$.

c) Déduire de tout cela que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = B$.

Exercice 72 *(Mines MP 2019)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma(k)$.

Exercice 73 *(Mines MP 2018)*

Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 > 0$ et vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Exercice 74 *(Mines MP 2017)*

a) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

c) Nature de la série de terme générak $v_n = \prod_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

Exercice 75 *(Mines MP 2011)*

Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 76 *(Mines MP 2018)*

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)/f(x) = -\infty$.

a) Montrer que $\sum f(n)$ converge

b) Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 77 *(Mines MP 2019)*

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+); \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x)-f(y)| \geqslant |x-y|\}$. Déterminer $\inf\left\{\int_0^1 f, f \in E\right\}$.

Exercice 78 *(Mines MP 2018)*

Soit $f \in \mathscr{C}^1([1,+\infty[, \mathbb{R})$ telle que f'^2 est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 79 *(Mines MP 2016)*

a) Soit$u \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^u |\sin(\lambda t)|\, dt$.

b) Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\, dt$.

Exercice 80 *(Mines MP 2018)*

a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que f tende vers 0 en $+\infty$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$.

b) Montrer que f est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.

c) Calculer $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

Exercice 81 *(Mines MP 2012)*

a) Soit (K_n) une suite décroissante de fermés de $[a,b]$ d'intersection vide. Montrer qu'il existe n_0 tel que $K_{n_0} = \emptyset$.

b) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Montrer que la convergence est uniforme.

c) Peut-on remplacer le segment $[a,b]$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 82 *(Mines MP 2019)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n)\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$

Exercice 83 *(Mines MP 2013)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt$.

a) Montrer que $\sum (-1)^n a_n$ converge.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $a_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 84 *(Mines MP 2013)*

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt$.

Exercice 85 *(Mines MP 2017)*

Soit (a_k) une suite de réels et $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. On suppose $A_n \sim n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ et $\sum a_n x^n$.

b) Déterminer la limite en 1^- de $(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

Exercice 86 *(Mines MP 2018)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{\substack{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ i+j=n}} \frac{1}{i^2 j^2}$.

a) Déterminer un équivalent de u_n.

b) Donner le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$.

Exercice 87 *(Mines MP 2019)*

Soient u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, f une solution de l'équation différentielle $y'' + (1+u)y = 0$. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leqslant c + \int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que f est bornée.

Exercice 88 *(Mines MP 2016)*

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $q(x) > 0$ et $q'(x) > 0$. Montrer que les solutions de $y'' + qy$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ (indic : multiplier par y'/q).

Exercice 89 *(Mines MP 2018)*

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que la fonction $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x^2 - y^2)$ vérifie $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Exercice 90 *(Mines MP 2018)*

Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$.

a) Représenter graphiquement ces ensembles. Sont-ils ouverts ? fermés ?

b) Pour $(x,y) \in D$, on pose $f(x,y) = \frac{\ln(1-xy)}{xy}$ si $(x,y) \notin \Delta$ et $f(x,y) = -1$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.

Exercice 91 *(Mines MP 2017)*

Déterminer les $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 92 *(Mines MP 2010)*

Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. La fonction f admet-elle une prolongement continue à $\mathbb{R}^2$. Même question pour $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$.

Exercice 93 *(Mines MP 2019)*

a) Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a-t-il de couples de parties (X,Y) telles que $X \subset Y$?

b) Une urne est remplie de boules numérotées de 1 à n. On prend une poignée de boules (entre 0 et n boules), puis on les remet et on prend une deuxième poignée. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule en commun dans les deux poignées ?

Exercice 94 *(Mines MP 2019)*

Soient $p \in]0,1[$, $q = 1-p$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = pq^k$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

b) Déterminer la loi de $D = |X-Y|$.

c) Soit $Z = \min(X,Y)$. Déterminer la loi du couple (D,Z)

Exercice 95 *(Mines MP 2018)*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $D = \mathrm{Diag}(X_1,\ldots,X_n)$ et $M = PDP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) Lois et espérance de $\mathrm{tr}(M)$, $\det(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$?

b) Probabilité pour que les sous-espaces propres de M aient tous la même dimension ?

c) Soit $U = (X_1,\ldots,X_n)$ et $A = {}^tUU$. Donner la loi des coefficients de A. Donner la loi de $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice 96 *(Mines MP 2015)*

Soient $\lambda > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ (à valeurs dans $\mathbb{N}$).

a) Pour $x > 0$, déterminer $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right)$.

b) Donner une fonction f telle que, pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Comparer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}\left(X_n^2\right)}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$.

c) Soit Y une variable aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = F(k+1) - F(k)$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.

Exercice 97 *(Centrale MP 2016)*

Soit H l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.

a) Représenter H.

b) Montrer qu'il existe une unique matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $A(H) \subset H$.

c) Montrer que $H \cap \mathbb{N}^2$ est infini.

d) Montrer que $H \cap \mathbb{N}^2 = \{A^k X_0, k \in \mathbb{N}\}$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 98 *(Centrale MP 2011)*

Soit p premier impair.

a) Montrer que le nombre de carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est $\dfrac{p+1}{2}$.

b) Montrer que $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré si, et seulement si, $x^{(p+1)/2} = x$.

c) Pour quels p la classe de -1 modulo p est-elle un carré de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

d) Déterminer le cardinal de l'ensemble $S = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 99 *(Centrale MP 2015)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que $P(0) = 1$,$\deg P = n-1$ et, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $P(\omega^k) \in \mathbb{R}^+$.

a) On note $(L_0, \dots, L_{n-1})$ la base de Lagrange relative à $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. Exprimer L_j.

b) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $P = \lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_{n-1} L_{n-1}$.

c) Soient j et k dans $\{0, \dots, n-1\}$. Montrer que $\dfrac{L_j^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{\omega^{-kj}}{n}$.

d) Prouver que P a ses coeffients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Exercice 100 *(Centrale MP 2011)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P est positif sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, P est la somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 101 *(Centrale MP 2011)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g^2 = \mathrm{Id}$.

a) Montrer que G est abélien.

b) Montrer qu'il existe $p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que toutes les matrices pgp^{-1} où $g \in G$ sont diagonales.

c) Montrer que g est fini, majorer son cardinal par une expression ne dépendant que de n.

d) Montrer que si m et n sont des entiers distincts et non nuls , les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 102 *(Centrale MP 2012)*

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ continue, non nulle telle que, pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$, $f(zz') = f(z)f(z')$.

a) Déterminer $f(1)$. Si ω est une racine de l'unité, que peut-on dire de $f(\omega)$? Que peut-on dire de $f(e^{i\theta})$ pour θ réel ?

b) Montrer que la restriction $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}^{+*}$ est de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (considérer $\ln \circ \tilde{f}$).

c) Exprimer $f(z)$ en fonction de $|z|$ et α.

Soit $\Phi : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^{+*}$ continue, telle que $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ pour tout $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\Phi(zI_n) = |z|^\alpha$.

b) Montrer que deux matrices semblables ont même image par Φ.

c) Par récurrence sur n, montrer que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A) = |\det A|^\alpha$.

Exercice 103 *(Centrale MP 2019)*

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Comparer les spectres de B et ${}^tB$. En déduire que, si A et B ont une valeur propre commune, il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AC = CB$.

b) On suppose qu'il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AC = CB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

c) Soit $r \in \{1, \dots, n\}$. On suppose qu'il existe il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$. Montrer que $\chi_A \wedge \chi_B$ est de degré supérieur ou égal à r.

d) Étudier la réciproque de la question précédente.

Exercice 104 *(Centrale MP 2017)*

On considère G un sous-groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments M vérifient $M^p = I_n$. On identifiera matrice et endomorphisme canoniquement associé.

a) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables et que les valeurs propres sont dans $\mathbb{U}_p$.

b) Soient A et B deux matrices diagonaisables qui commutent.

  i) Montrer que l'endomorphisme B stabilise tous les sous-espaces propres de A.

  ii) Montrer que A et B sont codiagonalisables.

c) Montrer que les matrices de G sont codiagonalisables.

d) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

e) Montrer que si p est premier alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 105 *(Centrale MP 2016)*

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $u : X \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XB$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.

b) Soient α une valeur propre de A et β une de B. Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = XB$.

Exercice 106 *(Centrale MP 2011)*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables, telles que $A^3 = B^3$. Montrer que $A = B$.

Exercice 107 *(Centrale MP 2019)*

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On identifie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, soit f_S l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall X \in \mathbb{R}^n, f_S(X) = {}^tXSX$.
On note $\mathscr{R} = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; {}^tXX = {}^tYY = 1, {}^tXY = 0\right\}$.

a) Énoncer le théorème spectral.

b) Soit S une matrice diagonale réelle. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $f_S(X)$.

c) Soient $S \in S_n(\mathbb{R}), X$ et Y dans $\mathbb{R}^n$. Exprimer ${}^tXSY$ en utilisant f_S.

d) On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f comptées avec multiplicités. Montrer que $2\sup\left\{|{}^t XSY| ; (X, Y) \in \mathscr{R}\right\} = \lambda_n - \lambda_1$.

Exercice 108 *(Centrale MP 2017)*

Soient N une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et S la sphère unité. On pose $N^*(A) = \sup\{\mathrm{tr}(AB), B \in S\}$.

a) Montrer que N^* est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $f : M \mapsto \det M$. Montrer qu'il existe $A_0 \in S$ telle que $f(A_0) = \max_S f$. Montrer que A_0 est inversible et que $f(A_0) = \max_{N(X) \leqslant 1} f(X)$.

c) Montrer que $N^*(A_0^{-1}) = n$.

Exercice 109 *(Centrale MP 2012)*

Soit K un fermé convexe non vide d'un espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$.

a) Soit $x \in E$. Montrer l'existence de $\alpha = \min\{d(x, z), z \in K\}$.

b) Montrer que pour tout $a, b \in E$, $\left\| x - \dfrac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a - b\|^2 = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 + \frac{1}{2}\|x - b\|^2$. En déduire qu'il existe un unique $z_0 \in K$ tel que $d(x, z_0) = \alpha$. On note $p(x)$ cet élément.

c) Pour $z \in K$ et $t \in [0,1]$, comparer $\left\|x - p(x)\right\|$ et $\left\|x - (tz + (1-t)p(x)\right\|$. En déduire, si $y \in K$, que $y = p(x)$ si et seulement si, pour tout $z \in K$, $\left\langle x - y, z - y\right\rangle \leqslant 0$.

d) Montrer que p est 1-lipschitzienne.

Exercice 110 *(Centrale MP 2016)*

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $\left\|f'\right\|_\infty < 1$, a un point fixe de f et $\lambda = f'(a)$. On suppose $\lambda \neq 0$. Soit (u_n) une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n = u_n - a$ et $v_n = e_n\lambda^{-n}$.

a) Montrer que $\sum |e_n|$ converge, puis qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a + k\lambda^n + \mathrm{o}(\lambda^n)$.

b) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a + k\lambda^n + \ell\lambda^{2n} + \mathrm{o}(\lambda^{2n})$.

Exercice 111 *(Centrale MP 2010)*

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Nature des séries de termes généraux u_n et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

Exercice 112 *(Centrale MP 2012)*

Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On pose $n = \lfloor a/b \rfloor$ et $f(z) = (-n+i)z$.

a) On suppose $b > 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f(z)) \in [0, b]$. Traiter le cas $b < 0$.

b) On suppose désormais a, b entiers.

i) Montrer qu'il existe $p > 0$ tel que $f^p(z) \in \mathbb{R}$ (où f^p est l'itéré p-ième de f).

ii) En déduire l'existence d'entiers relatifs $n_1, \dots, n_p$ tels que

$$\arctan \frac{b}{a} \equiv \sum_{k=1}^{p} \arctan \frac{1}{n_k} \, [\pi]$$

avec la convention $\arctan \frac{1}{0} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

c) On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ si $n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer que $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$.

ii) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{F_{2n+1}}$.

d) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 113 *(Centrale MP 2013)*

Soit (u_n) une suite décroissante de réels strictement positifs. On suppose que $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Pour $s > 0$, montrer que $E_s = \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \frac{1}{s}\}$ s'écrit $\{0, \dots, K_s - 1\}$ pour un unique entier naturel K_s.

c) Montrer que K_s tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers $+\infty$.

d) Montrer que, pour tout $s > 0$, $\dfrac{K_s - 1}{2s} \leqslant \dfrac{1}{K_s} \displaystyle\sum_{n \in E_s} n u_n$.

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{K_s}{s} = 0$.

Exercice 114 *(Centrale MP 2011)*

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln \left| e^{it} - a \right|$.

a) Montrer l'existence de $I(0)$ et donner sa valeur.

b) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt$ et en déduire l'existence de $I(1)$.

c) Montrer que $I(a)$ existe pour tout $a \in \mathbb{C}$ et que $I(a) = I(|a|)$.

d) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $M(P) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln |P(e^{it})|$.

i) Montrer que $I(P)$ existe pour tout polynôme non nul.

ii) Montrer que, pour $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $M(X^n - b^n) = nM(X - b)$.

iii) Déterminer la valeur de $M(X - b)$ pour $b \in]0, 1[$, puis $b > 1$.

iv) Calculer $M(X - 1)$.

v) Calculer $M(P)$.

Exercice 115 *(Centrale MP 2016)*

Soit $D = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

a)
- Soit $s \in D$. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^s}$ converge.
- On définit $\zeta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Montrer que ζ est continue sur D.

b) Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant a$. Montrer que

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) \, dt \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{n \leqslant t \leqslant n+1} |f'(t)|.$$

Soient $D' = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 0\}$ et $\varphi : D' \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \right)$.

c) Justifier que φ est définie et montrer qu'elle est continue.

d) Donner un développement asymptotique à deux termes de ζ en 1.

Exercice 116 *(Centrale MP 2011)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1-t)\, dt$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer qu'il existe γ et c réels tels que $S_n = \ln n + \gamma + \frac{c}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Justifier l'existence de I_n et exprimer I_n à l'aide de (S_n).

c) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\, dt$.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt = I$. En déduire la valeur de I.

Exercice 117 *(Centrale MP 2016)*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $a_k = \dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre a_k et a_{k+1}. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ est définie et continue sur $]-1,1[$.

b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k}$.

Exercice 118 *(Centrale MP 2017)*

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' = qy$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note y_α l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \alpha$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $y_0(x)y_0'(x) > 0$. Montrer que y_0 est strictement croissante.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, $y_\alpha(x) = y_0(x)\left(1 + \displaystyle\int_0^x \frac{\alpha}{y_0(t)^2}\, dt\right)$.

c) Montrer qu'il existe $\alpha_1 < 0$ tel que l'on ait équivalence entre « y_α s'annule sur $\mathbb{R}^+$ » et « $\alpha < \alpha_1$ ». Calculer α_1.

Exercice 119 *(Centrale MP 2017)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On note $E = M_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E et $\mathcal{U} = \{I_n + N, N \in \mathcal{N}\}$. Pour $N \in \mathcal{N}$, on pose $L(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$.

a) Soit $A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, E)$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ et $A'(t)$ commutent. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)'(t) = kA'(t)A^{k-1}(t)$.

b) Soit $N \in \mathcal{N}$. Montrer que $L(N)$ est nilpotente, de même indice de nilpotence que N.

c) Soit $N \in \mathcal{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(L(tN)) = I_n + tN$. En déduire que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$ sont homéomorphes.

Exercice 120 *(Centrale MP 2017)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Montrer que f atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. On suppose dans la suite que f admet un seul point critique c et que la restriction de f à toute droite affine atteint un unique minimum.

b) Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, soit $g_{a,u} : t \mapsto f(a+tu)$. Exprimer $g'_{a,u}(t)$. Que dire des vecteurs $\nabla f(a)$ et u si la restriction de f à $a + \mathbb{R}u$ atteint son minimum en 0 ?

c) On définit une suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante : x_0 est quelconque ; si $x_k = c$ alors $x_{k+1} = x$ sinon on prend pour x_{k+1} le point de la droite $x_k + \mathbb{R}\nabla f(x_k)$ en lequel f atteint son minimum. Étudier la suite (x_k).

Exercice 121 *(Centrale MP 2017)*

Pour $x > 0$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}$.

a) Montrer que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(e^x)$.

b) Soient $x > 0$ et Y_x une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre x. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Y_x - x| \geqslant \varepsilon x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 122 *(Centrale MP 2016)*

Soient A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\mathbb{P}\left(A=i, B=j\right) = C\dfrac{e^{-i}}{j^2+3j+2}$.

a) Déterminer la constante C.

b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de A. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?

c) Montrer que pour $n > 23$, l'événement $5A+7B=n$ n'est pas négligeable.

d) Généraliser.