Mardi 8 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2016)*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ coefficients non tous nuls.

a) Quel est le rang de A?

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

c) On pose $B = 2A - \operatorname{tr}(A) I_n$. Calculer $\det B$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

d) Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

Exercice 2 *(CCP MP 2019)*

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$.

a) Domaine de définition, monotonie et continuité de f?

b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$, la déterminer.

c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 3 *(Mines MP 2019)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \operatorname{Com}(M)$.

Exercice 4 *(Mines MP 2019)*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

a) On suppose que $\alpha > 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. En déduire la convergence de $\sum R_n$.

b) Étudier le cas $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 5 *(Centrale MP 2017)*

a) Pour $x > -1$, calculer $\varphi(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + x\sin^2 t}$ (*indic :* poser $u = \tan t$).

b) Conditions nécessaires et suffisantes sur $\alpha, \beta > 0$ pour que $\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta}{1 + x^\alpha \sin^2 x}\, dx$ converge?

Mercredi 9 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2017)*

Soit $a > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_1^a (\ln t)^n \, dt$.

a) Étudier la fonction $f_n : t \mapsto (\ln t)^n$. Décrire l'ensemble des $t \geqslant 1$ tels que $|f_n(t)| > 1$.

b) Donner la nature de $\sum u_n$ lorsque $a \neq e$.

c) Lorsque $a = e$, montrer que $u_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α et β sont à préciser. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 2 *(CCP MP 2019)*

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $F_f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-itx) \mathrm{d}t$

a) On considère la fonction $g : t \mapsto \exp(-|t|)$. Justifier que F_g est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur pour tout réel x.

b) Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_f est définie sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose de plus qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|t^n f(t)\right| \mathrm{d}t$ converge. Pour tout entier k, on pose $h_k : t \mapsto (-it)^k f(t)$

i) Justifier que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, F_{h_k} est définie sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer par récurrence que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, F_f admet une dérivée d'ordre k et que $F_f^{(k)} = F_{h_k}$.

Exercice 3 *(Mines MP 2019)*

Soit E l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t) e^{-t} \mathrm{d}t$ converge.

a) Justifier qu'en posant $\forall (f, g) \in E^2, \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t) g(t) e^{-t} \mathrm{d}t$, on définit un produit scalaire sur E.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} e^x \dfrac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right)$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale de degré n.

c) Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormée.

d) Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $e_a(x) = e^{-ax}$. Montrer que $\|e_a\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle L_n, e_a \rangle^2$.

e) Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale.

Exercice 4 *(Mines MP 2019)*

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^\alpha\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 5 *(Centrale MP 2013)*

Soit G un groupe abélien fini. Si $x \in G$, on note $o(x)$ l'ordre de x et $e(G)$ le maximum des $o(x)$ pour $x \in G$.

a) Si $\mathrm{pgcd}(o(x), o(y)) = 1$, montrer que $o(xy) = o(x)o(y)$.

b) Montrer que $e(G) = ppcm_{x \in G}\, o(x)$.

c) Montrer que $e(G)$ divise $|G|$.

d) Montrer que G est cyclique si et seulement si $e(G) = |G|$.

e) Montrer que $e(G) = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in G, x^k = 1\}$.

f) Déterminer $e(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*)$ lorsque p est premier. Déterminer $e(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

g) Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Montrer que G est cyclique.

Jeudi 10 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2018)*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n$.

a) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   i) Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.
   ii) Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.
   iii) Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.
   iv) Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1}$ et $\widetilde{P^{-1}}$.

b) Soient A et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   i) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \times \widetilde{A}$.
   ii) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\tilde{A}P$.

c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   i) Montrer que A diagonalisable $\Longrightarrow$ $\tilde{A}$ diagonalisable.
   ii) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 *(CCP MP 2018)*

a) Montrer la focntion $t \mapsto \arctan t$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Déterminer son rayon de convergence. On note $f(x)$ sa somme.

c) Donner une expression simplifiée de f' puis de f.

d) Que peut-on dire de la convergence sur $[-R, R]$?

e) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 3 *(Mines MP 2018)*

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Condition nécessaire et suffisante pour que $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 4 *(Mines MP 2016)*

a) Domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$.

b) Déterminer la limite et un équivalent de f en chacun des bords de ce domaine de définition.

Exercice 5 *(Centrale MP 2017)*

a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de S. On pose $\Omega = \{PSP^{-1}, P \in O_n(\mathbb{R})\}$. Soit $A = (a_{ij}) \in \Omega$.
   i) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $a_{kk} \in [\lambda_1, \lambda_n]$.
   ii) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_{kk}), A \in \Omega\right\} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k).$$

b) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Si $u \in S(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,u$, on note $p_{\lambda,u}$ le projecteur orthogonal sur $\ker(u - \lambda \mathrm{Id})$. On pose $f(u) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,u} f(\lambda) p_{\lambda,u}$. Soient $v, w \in S(E)$ et $t \in [0,1]$. Montrer que

$$\mathrm{tr}\,(f((1-t)v + tw)) \leqslant (1-t)\mathrm{tr}\,(f(v)) + t\,\mathrm{tr}\,(f(w)).$$

Vendredi 11 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2019)*

On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

a) Montrer que $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Calculer P_1 et P_2.

b) On considère $x \in]-2,2[$ et on pose $x = 2\cos a$, avec $a \in]0,\pi[$. Montrer que $\mathrm{P}_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin a}$.

c) En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 2 *(CCP MP 2017)*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2}\,dt$

a) Donner le domaine de définition D de F. La fonction F est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur D?

b) Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+x^2}\,dt$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2x^2}\,dt$. En déduire $F(1)$.

c) Exprimer $F(x)$.

Exercice 3 *(Mines MP 2019)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. On pose $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geqslant 0$.

Exercice 4 *(Mines MP 2018)*

Déterminer la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ (Indic : poser $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$).

Exercice 5 *(Centrale MP 2018)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i, j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$, on pose $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.

a) Montrer que $T_{ij}(\lambda)$ est inversible et donner son inverse.

b) Déterminer les morphismes continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

c) Montrer qu'il existe $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $T_{ij}(\lambda) = ABA^{-1}B^{-1}$ (on pourra chercher A sous la forme d'une matrice de dilatation).

d) En déduire les morphismes continues de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Mardi 15 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2019)*

a) Montrer que $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

b) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que 2 quelconques des 3 assertions suivantes impliquent la troisième :
- u est une isométrie.
- $u^2 = -id$.
- $\forall x \in E, \langle x, u(x)\rangle = 0$.

Exercice 2 *(CCP MP 2018)*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^\alpha}$.

a) On suppose que $1 < \alpha < 3$. Montrer que$f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On suppose $\alpha \leqslant 1$. En utilisant les nombres $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$, montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer les valeurs pour lesquelles f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 *(Mines MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en calculer la dimension.

Exercice 4 *(Mines MP 2018)*

Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t(1+t^x)}\,dt = 0$.

Exercice 5 *(Centrale MP 2016)*

Si $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose (sous réserve d'existence), $D(f,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

a) Soient $s, z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) \leqslant \mathrm{Re}(z)$ et $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que $\sum \dfrac{f(n)}{n^s}$ est absolument convergente. Montrer que $\sum \dfrac{f(n)}{n^z}$ est absolument convergente.

b) Pour $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, on définit $f * g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ en posant $(f*g)(n) = \displaystyle\sum_{d \in \mathbb{N}^*, d|n} f(d)g(n/d)$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sum \dfrac{f(n)}{n^s}$ et $\sum \dfrac{g(n)}{n^s}$ soient absolument convergentes. Montrer que $D(f*g,s)$ est défini et l'exprimer en fonction de $D(f,s)$ et $D(g,s)$.

c) Soient φ la fonction indicatrice d'Euler et ζ la fonction de Riemann. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$.

Mercredi 16 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M + 2\,{}^tM$

a) Donner les valeurs et les espaces propres de f.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Exercice 2 *(CCP MP 2016)*

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

a) Trouver la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ à l'aide du changement de fonction $z = x^2 y$.

b) Calculer la valeur en 0 d'une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Donner le développement en série entière de $g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que g se prolonge en une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *(Mines MP 2017)*

Soient $E = \mathbb{K}^n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer l'équivalence entre :

i) $f^2 = 0$

ii) il existe $g, h \in \mathscr{L}(E)$, $g \circ h = f$ et $h \circ g = 0$.

b) Pour $n = 3$, on prend $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer g et h.

Exercice 4 *(Mines MP 2017)*

Soit $q \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - q^k x)$.

a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa limite.

b) Montrer que f est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - qx) f(qx)$.

c) Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 5 *(Centrale MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in U^2, f(b) \geqslant f(a) + \left\langle \nabla f(a), b - a \right\rangle.$$

Jeudi 17 juin

Exercice 1 *(CCP MP 2018)*

Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Pour $f \in E$, on pose $v(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que $v \in \mathscr{L}(E)$ puis qu'il existe un unique $w \in \mathscr{L}(E)$ telle que, pour tout $f, g \in E$, $\langle v(f), g\rangle = \langle f, w(g)\rangle$.

b) Montrer que $(w(f))' = -f$ et calculer $(v(f))'$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Résoudre $y'' + \lambda y = 0$

d) Calculer les éléments propres de $w \circ v$.

Exercice 2 *(CCP MP 2018)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n+1\}$ telles que pour tout $i, j \in [\![1\,;n+1]\!]$, $\mathbb{P}\left(X = i, Y = j\right) = a_{ij} = \lambda\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$ où $\lambda > 0$.

a) Montrer que $\lambda = \frac{1}{4^n}$.

b) Déterminer les lois de X et Y.

c) Les variables sont-elles indépendantes ?

d) Trouver, à l'aide de $X - 1$ l'espérance et la variance de X.

e) On note $B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1\,;n+1]\!]^2} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $b_{ij} = \mathbb{P}\left(X = j, Y = i\right)$. Calculer B^2

f) Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension des sous-espaces propres.

Exercice 3 *(Mines MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(A_k\right)_{k\geqslant 0}$ et $\left(B_k\right)_{k\geqslant 0}$ deux suites d'elements de $M_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B.

a) On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont semblables. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

b) Que dire si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont orthogonalement semblables ?

Exercice 4 *(Centrale MP 2018)*

Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ défini par $K(x, y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$ et $K(x, y) = y(1-x)$ sinon. On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0(]0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x, y)f(y)\,dy$.

a) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + \mu y = 0$ avec les conditions $u(0) = u(1) = 0$.

b) Montrer que T est un endomorphisme continue. Est-il injectif ? surjectif ?

c) Détermines les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

INDICATIONS

Mardi 8 juin

Exercice 2

a) comparer à des séries de référence pour le domaine de défnition. S'écarter de l'endroit qui pose problème pour la continuité
b) a priori, on tente le plus simple
c) comparaison série-intégrale

Exercice 3

- on ne connait pas grand chose sur la comatrice à part $M^t\mathrm{Com}(M) = \det M I_n$
- on a fait un exercice sur le rang de la comatrice en fonction du rang de la matrice, cela va limiter les possibilités pour ce rang
- On arrive à ${}^tMM = (\det M) I_n$ ce qui donne peu de possibilités pour $\det M$,
- On peut reprendre la comatrice de chaque côté et voir ce que cela donne (on est dans le cas inversible)
- si on manque d'idées à l'oral, on peut essayer en dimension 2.

Exercice 4

a) plutôt simple
b) la version précédente ne fonctionne plus. On peut essayer de déterminer un équivalent et même mieux un développement asymptotique de R_n. Regarder comment se simplifient $a_n = R_n + R_{n+1}$ et $b_n = R_n - R_{n+1}$ et combiner pour retrouver R_n

Exercice 5

a) calcul
b) faire un dessin de la fonction à intégrer, découper tous les multiples de π et encadrer les intégrales sur ces intervalles (en conservant le sinus)

Mercredi 9 juin

Exercice 1

a) distinguer suivant la parité
b) majorer, minorer en fonction de la position par rapport à e
c) techniques usuelles à essayer : intégrer par parties, trouver des relations de récurrence...

Exercice 2

a) pour le calcul, séparer suivant le signe de t semble une bonne idée (puis regrouper les deux intégrales en une seule après un changement de variable pour les avoir sur $\mathbb{R}^+$)
b)
c) théorème de dérivation à appliquer par récurrence

Exercice 3

a) -
b) formule de Leibniz
c) On calcule $\left\langle L_i, L_j \right\rangle$ avec $i \leqslant j$. Le plus judicieux est de conserver l'expression pour L_j (afin de simplifier les exponentielles) et de laisser L_i sous forme de polynôme (quelconque)
d) tenter les calculs ?
e) commencer par se demander ce que cela signifie - on peut tenter d'utiliser la densité des polynômes mais sur un segment (on peut s'y ramener avec un changement de variable simple) - pas testé donc à voir.

Exercice 4

avec un changement de variable on se ramène à des intégrales déjà étudiées plusieurs fois - ne pas oublier de discuter suivant le signe de α (et couper l'intégrale en deux).

Jeudi 10 juin

Exercice 3

Résoudre le système par blocs $BY = \lambda Y$ afin de déterminer les espaces propres en fonction de ceux de A. Discuter en fonction des valeurs propres et de la dimension des espaces propres de A.

Exercice 4

a) série de Bertrand
b) pour la limite en 1, même technique que celle utilisée déjà plusieurs fois pour ces situations (utiliser la décroissance, la positivité). Pour un équivalent, une comparaison série-intégrale peut être une bonne idée (notamment en 1). Pour l'infini, le premier terme a l'air beaucoup plus grand que les autres.

Exercice 5

a) Regarder ${}^tXAX$ pour X bien choisi (et encadrer ${}^tXAX$ de façon générale). Pour utiliser la convexité, on se ramène à une écriture $A = PD{}^tP$ et on n'hésite pas à écrire le terme a_{kk} en fonction des termes de P (orthogonale).
b)

Vendredi 11 juin

Exercice 3

Le polynôme $Q - Q'$ est simple - penser à voir cela comme une équation différentielle.

Exercice 4

voir cela comme un produit de Cauchy - il faudra justifier que le rayon de convergence est strictement positif.

Exercice 5

a)
b) d'abord se demander de quel type de morphismes on parle - cela rejoint alors un exercice déjà traité (via un logarithme)
c)
d) essayer de voir comment décomposer une matrice inversible à l'aide des matrices précédentes

Mardi 15 juin

Exercice 3

Réduire le problème avec des matrices plus simples (semblables ou équivalentes ?)

Exercice 4

on peut étudier la fonction de x - c'est en fait un exercice sur les intégrales dépendant d'un paramètre.

Exercice 5

a)
b) sommation par paquets bien choisis
c) le voir plutôt avec un produit en multipliant par $\zeta(s)$

Mercredi 16 juin

Exercice 1

La transposée apparaissant, il semble légitime de regarder ce que donne l'endomorphisme sur des sous-espaces bien choisis.

Exercice 3

on peut essayer de trouver une base dans laquelle la matrice de f est simple. On peut aussi essayer de construire g et h à partir d'une base de l'espace (bien choisie afin d'avoir des propriétés de f - noyau et image)

Exercice 4

a) se ramener à une série… en faisant attention aux signes

b)

c) par analyse-synthèse à partir de la relation précédente.

Exercice 5

comme souvent avec les fonctions de plusieurs variables, suivre la ligne droite entre a et b.

Jeudi 17 juin

Exercice 4

a)

b) comment traduire la continuité pour les applications linéaires? Pour cette question et la suivante, il serait bien de récrire $T(f)$ sans la fonction K

c)