Exercice 1 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur.

a) Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$ à l'aide du lemme des noyaux.

b) Montrer l'équivalence suivante :

 i) $u \circ p = p \circ u$,

 ii) $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont stables par u.

c) Quel lien existe-t-il entre $\mathrm{rg}\,(p)$ et $\mathrm{tr}\,(p)$?

d) Tout endomorphisme f vérifiant $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$ est-il nécessairement un projecteur ?

Exercice 2 *(CCINP MP 2022)*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on note $P_i = (X-a)^i$.

a) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$. Montrer que f est un endomorphisme. Trouver son noyau et son image.

Exercice 3 *(CCP MP 2013)*

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

a) Montrer que $\mathrm{rg}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.

b) Exprimer $\mathrm{rg}\,(uv)$ en fonction de $\mathrm{rg}\, v$ et la dimension de $\ker u \cap \mathrm{Im}\, v$.

Exercice 4 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de f.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que si deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient $M_1^2 = M_2^2 = 0$, alors elles sont semblables.

d) Montrer que deux matrices carrées quelconques mais semblables ont le même rang.

e) Deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1^2 = M_2^2 = 0$ sont-elles nécessairement semblables ?

Exercice 5 *(CCINP MP 2021)*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

a) Soit $x \in \ker(u - \mathrm{id})$. Déterminer la limite de $(v_n(x))$.

b) Soit $x \in \mathrm{Im}\,(\ker - \mathrm{id})$. Déterminer la limite de $(v_n(x))$.

c) Montrer que $\ker(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}) = E$.

d) Montrer que (v_n) converge vers le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Exercice 6 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

a) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp} N = \mathrm{Sp} N^T$.

b) Soient $U, V \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \backslash \{0\}\right)^2$. Montrer que : $UV^T \neq 0$.

c) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que, pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp} A \times \mathrm{Sp} B$, $\alpha + \beta \in \mathrm{Sp}\Phi$.

d) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\Phi$ et M un vecteur propre associé.

 i) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$.

 ii) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp} A \times \mathrm{Sp} B$ tel que : $\lambda = \alpha + \beta$.

Exercice 7 *(CCP MP 2015)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

a) Soit $x \in E$. Démontrer que si $x = y + z$ avec $y \in \ker f$ et $z \in \ker(f^2 + \mathrm{Id})$ alors $y = x + f(x)$ et $z = -f^2(x)$.

b) Montrer que $E = \ker f \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$.

c) Prouver que $\dim \ker(f^2 + \mathrm{Id}) \geqslant 1$. Montrer que si $x \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}) \backslash \{0\}$, alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$.

d) Que vaut $\det(-\mathrm{Id})$? En déduire que $\dim \ker(f^2 + \mathrm{Id}) = 2$.

e) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 *(CCINP MP 2022)*

Soient $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A = UV^T$ et $a = \mathrm{tr}(A)$.

a) Que vaut le rang de A ?

b) Calculer $V^T U$ et A^2.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) On suppose $a \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 9 *(CCP MP 2018)*

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (a, b et c à déterminer).

c) En déduire les solution du système $\begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$

Exercice 10 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.

b) Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

Exercice 11 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Rappeler l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien E, lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de F.

b) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite d'équation $6x = 4y = z$.

Exercice 12 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

a) Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X])$.

b) Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P.

c) Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.

Exercice 13 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

a) Justifier que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp} M = \mathrm{Sp} M^T$.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp} A$.

c) Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable

Exercice 14 *(CCP MP 2019)*

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et $f \in E$ Soit

$$g : x \mapsto \int_0^1 \inf(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

définie sur $[0;1]$.

a) Montrer que g est continue.

b) Soit $x \in [0;1]$. Tracer $t \mapsto \inf(x,t)$ sur $[0;1]$ pour déduire une nouvelle expression de g.

c) Montrer que g est $\mathscr{C}^2$. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x) \forall x \in [0;1]$. On pose :

$$u : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \inf(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right)$$

définie de E dans E.

d)

i) Montrer que u est linéaire.

ii) Montrer que u est injective.

iii) Est-elle surjective ?

e) Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u.

Exercice 15 *(CCP MP 2018)*

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A : en se ramenant à la définition de valeur propre et de vecteur propre ; en utilisant le polynôme caractéristique ; en utilisant le polynôme minimal.

b) La matrice A est-elle trigonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{R})$?

c) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{C})$? Si oui, exprimer une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 16 *(CCP MP 2016)*

Soit $E = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg + f'g'$.

a) Montrer que cela définit un produit scalaire sur E.

b) On note U l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f(1) = 0$ et V l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f'' = f$. Montrer que U et V sont deux sous-espaces vectoriels de E, orthogonaux pour le produit scalaire précédent. A-t-on $U \oplus V = E$?

Exercice 17 *(CCP MP 2019)*

a) Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'en posant, pour $(f,g) \in E^2, \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 fg$, on définit un produit scalaire sur E.

b) Déterminer $\inf\left\{\displaystyle\int_{-1}^1 \left(e^t - at - b\right)^2 \mathrm{d}t ; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 18 *(CCINP MP 2022)*

Pour $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$.

a) Montrer que l'on définit là un produit scalaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

c) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$.

d) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathbb{R}I_n$. Déterminer $G^\perp$ et $\mathrm{d}\left(M, G^\perp\right)$.

Exercice 19 *(CCINP MP 2021)*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ antisymétrique c'est-à-dire tel que, pour tous $x, y \in E, \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E, \langle f(x), x\rangle = 0$ et $\langle f^2(x), x\rangle \leqslant 0$.

b) Soit e une base orthonormée de E. Que peut-on dire de la matrice A de f dans e ?

c) En calculant $\det(A^T)$, montrer que si f est inversible alors la dimension de E est paire.

d) Montrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^-$.

Exercice 20 *(CCP MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang m.

a) Si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, montrer que ${}^tXAX > 0$

b) Montrer que $n \geqslant m$.

c) Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 21 *(CCINP MP 2022)*

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) On suppose qu'il existe $r > 0$ et $x_0 \in E$ tels que $B_o(x_0, r) \subset F$. Montrer que, pour tout $y \in E$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha x_0 + \beta y \in B_o(x_0, r)$. En déduire que $F = E$.

c) On suppose ici que $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathscr{N}$ est fermé et d'intérieur vide. Montrer que $\operatorname{Vect} \mathscr{N}$ est d'intérieur vide.
Indication : Trouver une contradiction en considérant I_n.

Exercice 22 *(CCP MP 2019)*

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.

c) On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'intégrale.

d) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 23 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Soient $a, b > 0$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2} + t^{1/2}}$. On effectuera le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $2\arctan \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant R_n \leqslant 2\arctan \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

d) Déterminer un équivalent simple de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 24 *(CCINP MP 2022)*

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

b) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t + \cos t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25 *(CCP MP 2019)*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

b) Énoncer et redémontrer le théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.

c) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 26 *(CCINP MP 2022)*

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On définit la fonction z par $z(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ quand l'intégrale existe.

a) Justifier l'existence de $z(0)$ et montrer que $z(0)=\sqrt{\pi}$.

b) Montrer que z est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$.

c) Montrer que $z'(x)=-\dfrac{1}{2(x+i)}z(x)$.

d) Donner les parties réelle et imaginaire de $-\dfrac{1}{2(x+i)}$ et en déduire $z(x)$.

Exercice 27 *(CCP MP 2019)*

Soit $a,b\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Pour $t\in]0,1[$, écrire $\dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.

b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

c) Soit $S_N(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n(t)$. Démontrer $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t=\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)\mathrm{d}t$.

d) En déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$.

e) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 28 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $f : x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)-\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(at)-\arctan(bt)}{t}\mathrm{d}t$ pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 29 *(CCINP MP/MPI 2023)*

a) Justifier l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 30 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$ la série $\sum e^{-nx}$ converge-t-elle ?

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $x\to e^{-nx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

c) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-nx}\mathrm{d}x$.

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 31 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\exp\left(-xt^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t$.

a) Domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

c) Donner une expression simplifiée de $f(x)$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 32 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Donner le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum(-1)^n \ln(n) x^n$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

d) Calculer cette limite à l'aide de la formule de Wallis : $\dfrac{2}{\pi} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$.

Exercice 33 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 . Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.

c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 34 *(CCINP MP 2021)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

a) Étudier la convergence simple et la convergence normale de cette série de fonctions.

b) Soit $A > 0$. Montrer l'existence de M tel que : $\forall x \in [0,A]$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}\right| \leqslant \frac{M}{\ln(n)}$. Que peut-on en déduire ?

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) Montrer que, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 35 *(CCP MP 2019)*

a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \ln(n)x^n$, dont on note $g(x)$ la somme.

b) Montrer que $\forall x \in]-R,R[$, $(x-1)g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.

c) En remarquant que, pour $n \geqslant 2$, $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) = \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}$, encadrer $(x-1)g(x)$ pour $x \in]-1,1[$

d) Déterminer un équivalent de $g(x)$ en R^-.

Exercice 36 *(CCINP MP/MPI 2024)*

On pose, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^p\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer cette expression.

b) On considère $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{a_{n,p}}$. Justifier son existence et calculer sa valeur.

c) La famille $\left(\dfrac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 37 *(CCINP MP 2022)*

Soit l'équation différentielle $(*) : t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$.

a) Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Écrire $(*)$ sous la forme d'une système différentiel linéaire.

c) Soit l'équation différentielle $(**)$: $t^2y'' + 4ty' + 2y = e^t$. En utilisant la méthode de variation des constantes, donner les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) On propose une autre méthode de résolution. Vérifier qu'il existe une solution particulière de $(**)$ de la forme $y(t) = \dfrac{z(t)}{t}$, avec z de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'ensemble des solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 38 *(CCINP MP/MPI 2024)*

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 2xy = 1$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 0$.

b) Résoudre sous forme intégrale le problème de Cauchy $(y' - 2xy = 1, y(0) = 0)$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 39 *(CCP MP 2018)*

On définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives.

a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle f(h), h \rangle > 0$.

b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ par $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$.

i) Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.

ii) Montrer que g admet un unique point critique en $z_0 = f^{-1}(u)$.

iii) Montrer que g admet un maximum global en z_0 (on pourra étudier le signe de $g(z_0 + h) - g(z_0)$).

Exercice 40 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x, y) = \dfrac{2x^2 + xy^2 + 6x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^a}$.

a) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

b) La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

c) Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 41 *(CCP MP 2019)*

Intégrer l'équation aux dérivées partielles $z\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = -x^2 - y^2$ où $z = z(x, y)$. On utilisera les coordonnées polaires.

Exercice 42 *(CCINP MP/MPI 2023)*

a) Déterminer les extrema de $f : (u, v) \in [0,1]^2 \mapsto uv(1 - u - v)$.

b) Soit (A, B, C) un triangle d'aire égale à 1 . Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.

Exercice 43 *(CCP MP 2019)*

Soient λ et μ dans $\mathbb{R}^{+*}, X$ et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnellement à l'événement $(X + Y = n)$

Exercice 44 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. En posant $\min \varnothing = +\infty$, on définit $T_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$ et $T_2 = \min\{n > T_1, X_n = 1\}$.

a) Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.

b) Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2 - T_1 = k, T_1 = n)$.

c) Vérifier que $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2.

Exercice 45 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.

a) Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

b) Calculer $G_X(t), \mathbf{E}(X), \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.

c) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.

d) On pose $Z = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.

e) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

Exercice 46 *(CCINP MP 2021)*

a) Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) = \dfrac{p}{n}\mathbb{P}(X=n-1)$. Déterminer la loi de X.

b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

  i) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X_1}\right)$.

  ii) Donner la loi de $X_1 + X_2$.

  iii) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Préciser l'espérance et la variance.

c) Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de (U,V).

Exercice 47 *(CCP MP 2017)*

On considère $S_1, \ldots, S_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre $p_1, \ldots, p_n$. On note $p = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n}$ et $S = S_1 + \ldots + S_n$.

a) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

b) Déterminer les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ pour lesquelles $\mathrm{V}(S)$ est maximale.

c) Déterminer la loi de S dans ce cas et calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

Exercice 48 *(CCP MP 2019)*

On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$.

b) i) Combien y-a-t-il de tirages possibles?

  ii) En déduire que, pour tout $k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{(n-p)!k!p}{n!(k-p)!k}$.

  iii) Calculer l'espérance de X.

c) i) Donner la loi de Y.

  ii) Montrer que $\mathbb{E}(Y) = p\mathbb{E}(X)$.

Exercice 49 *(CCP MP 2018)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ telles que pour tout $i, j \in [\![1;n+1]\!], \mathbb{P}(X=i, Y=j) = a_{ij} = \lambda \dbinom{n}{i-1}\dbinom{n}{j-1}$ où $\lambda > 0$.

a) Montrer que $\lambda = \frac{1}{4^n}$.

b) Déterminer les lois de X et Y.

c) Les variables sont-elles indépendantes?

d) Trouver, à l'aide de $X-1$ l'espérance et la variance de X.

e) On note $B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $b_{ij} = \mathbb{P}(X=j, Y=i)$. Calculer B^2

f) Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable? Déterminer la dimension des sous-espaces propres.