Exercices à préparer

Lundi 18 mai (10h-12h)

Exercice 1 *(CCINP MP 2016)*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ coefficients non tous nuls.

a) Quel est le rang de A ?

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

c) On pose $B = 2A - \operatorname{tr}(A) I_n$. Calculer $\det B$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

d) Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

Exercice 2 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

Nature de la série $\sum \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$?

Exercice 3 *(CCINP MP/MPI 2025)*

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{t^2+1} \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t|\sin(t)|}{t^2+1} \mathrm{d}t$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1} \mathrm{d}u$.

c) L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

Exercice 4 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Calculer $g''(x)$ et en déduire une équation différentielle vérifiée par g.

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Exercice 5 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles admettant une variance. On introduit la matrice $S = \left(\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par : $\forall U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(U) = \dfrac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n u_i X_i\right)$.

a) Montrer que S est diagonalisable.

b) Prouver que pour tout $U \in \mathbb{R}^n, U^T S U = \mathbf{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n u_i X_i\right)$.

c) On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$. Soit $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   i) Montrer que $U^T S U \leqslant \lambda_1 \|U\|^2$.

   ii) En déduire que $f(U) \leqslant \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si et seulement si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1.

d) i) Soit $a \in]0,1[$. On choisit ici $S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de S.

   ii) En déduire $\max\limits_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(U)$ et donner les vecteurs U pour lesquels ce maximum est atteint.

Mardi 26 mai (10h-12h)

Exercice 6 *(CCINP MP 2019)*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un morphisme de corps.

a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x)=(f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.

b) Soit $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$. Montrer que $f(nx)=nf(x)$.

c) Soit $x\in\mathbb{Q}$, montrer que $f(x)=x$.

d) Montrer que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 *(CCINP MP 2019)*

a) Montrer que $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & 1 & 4\\ -4 & 4 & 7\end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

b) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que 2 quelconques des 3 assertions suivantes impliquent la troisième :
- u est une isométrie.
- $u^2=-id$.
- $\forall x\in E,\langle x,u(x)\rangle=0$.

Exercice 8 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soit $f:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\exp\left(-xt^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t$.

a) Domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

c) Donner une expression simplifiée de $f(x)$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n:x\in[0,\pi/2]\mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

a) Étudier la convergence simple de (f_n).

b) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi/2]$? *Indication* : Considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}f_n(t)\mathrm{d}t$.

c) Soit $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha,\pi/2]$?

d) Soit $g\in\mathscr{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}f_n(t)g(t)\mathrm{d}t=g(0)$.

Exercice 10 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soient $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x,y\geqslant 0 \text{ et } 0\leqslant x+y\leqslant 1\right\}$ et $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto xy(1-x-y)$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur K et les déterminer.

Mardi 2 juin (13h-15h)

Exercice 11 *(CCINP MP 2018)*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (a, b et c à déterminer).

c) En déduire les solution du système $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x+3y \end{array} \right.$

Exercice 12 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle\rangle,)$.

a) Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.

b) Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v.

c) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x+y+z=0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s.

Exercice 13 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} \mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

Exercice 14 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 . On note (E_n) l'équation $e^x = nx$, où $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3, (E_n)$ admet exactement deux solutions, notées par la suite α_n et β_n avec $\alpha_n < \beta_n$.

b) Montrer que $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geqslant 3$.

c) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.

d) Déterminer la limite de (α_n).

e) Donner un équivalent simple de α_n en $+\infty$.

f) Donner un développement asymptotique à deux termes de α_n.

Exercice 15 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

   i) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

   ii) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».

b) On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$

   i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   ii) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Mercredi 10 juin (10h-12h)

Exercice 16 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ avec $A \neq 0$.

a) Trouver un polynôme annulateur non nul de A.

b) Lorsque $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, trouver $\mathrm{Sp}(A)$ et montrer que A est orthogonalement semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 *(CCINP MP 2022)*

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, p le projecteur orthogonal sur F.

a) i) Montrer que $F = \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

ii) Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

iii) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. Que signifie ce résultat ?

b) On considère p_F et p_G deux projecteurs orthogonaux sur deux sous-espaces vectoriels F et G respectivement. On suppose que H est un sous-espace vectoriel tel que $p_F \circ p_G$ est le projecteur orthogonal sur H.

i) Montrer que $F \cap G = H$.

ii) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.

Exercice 18 *(CCINP MP 2019)*

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E, \lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$.

a)

i) Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.

ii) Montrer que convergence forte implique convergence faible

b) Montrer que (x_n) converge fortement vers $x \iff (x_n)$ converge faiblement vers x et $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

c) Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Exercice 19 *(CCINP MP/MPI 2025)*

Soit $f : x \in [0,1] \mapsto 2x(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g que l'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?

b) Soit $a \in]0, 1/2[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 1-a]$.

Exercice 20 *(CCINP MP 2022)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2x^2}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)$.

a) Quel est l'ensemble de définition de S ?

b) Étudier la limite de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

d) Donner un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0 .

Mardi 16 juin (13h-15h)

Exercice 21 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner la matrice de la rotation R autour de la droite D d'équation $x-y+z = x+y+z = 0$ et telle que $R(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$.

Exercice 22 *(CCINP MP/MPI 2025)*

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

b) Étudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.

c) Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 23 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ la norme $\|\cdot\|_\infty$. Si $f \in E$, on pose $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que u est un endomorphisme continu et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 24 *(CCINP MP/MPI 2025)*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et f, g définies sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle u(x), x\rangle$ et $g(x) = \|x\|^2 - 1$.

a) On pose $K = g^{-1}\{0\}$. Montrer que K est compact.

b) Montrer que $f_{|K}$ admet un maximum en $a \in K$.

c) Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.

d) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.

e) Montrer que a est un vecteur propre de u.

Exercice 25 *(CCINP MP/MPI 2024)*

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 2xy = 1$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 0$.

b) Résoudre sous forme intégrale le problème de Cauchy $(y' - 2xy = 1, y(0) = 0)$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercices classiques / usuels

Exercice 26 *(CCINP MP 2021)*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

a) Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id})$. Déterminer la limite de $(v_n(x))$.

b) Soit $x \in \mathrm{Im}\,(\ker - \mathrm{Id})$. Déterminer la limite de $(v_n(x))$.

c) Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) = E$.

d) Montrer que (v_n) converge vers le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 27 *(CCINP MP 2018)*

Soit $u \in \mathscr{L}(R^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

a) Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$

b) Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \ker(u^2 + \mathrm{Id})$.

c) Montrer que u n'est pas injective (on pourra raisonner par l'absurde).

d) Montrer que $\mathrm{rg}\, u = 2$.

e) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 28 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) On suppose u nilpotent. Prouver que $u^n = 0$.

b) On suppose que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Résoudre l'équation $X^2 = A$.

Exercice 29 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur.

a) Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$ à l'aide du lemme des noyaux.

b) Montrer l'équivalence suivante :

   i) $u \circ p = p \circ u$,

   ii) $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont stables par u.

c) Quel lien existe-t-il entre $\mathrm{rg}\,(p)$ et $\mathrm{tr}\,(p)$?

d) Tout endomorphisme f vérifiant $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$ est-il nécessairement un projecteur ?

Exercice 30 *(CCINP MP 2018)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On note U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Calculer $\det A(-1)$.

b) On note $P(x) = \det(A(a) + xU)$. Montrer que P est polynomiale de degré au plus 1.

c) Calculer $P(-a)$ et $P(1)$. En déduire $\det A(a)$.

d) Étudier la continuité de $a \mapsto \det A(a)$ et retrouver la valeur de $\det A(-1)$.

Exercice 31 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et non nuls tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$.

b) Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et commutant deux à deux. Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 32 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de f.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que si deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient $M_1^2 = M_2^2 = 0$, alors elles sont semblables.

d) Montrer que deux matrices carrées quelconques mais semblables ont le même rang.

e) Deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1^2 = M_2^2 = 0$ sont-elles nécessairement semblables ?

Exercice 33 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

a) Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A, montrer que $\dim \mathscr{C}(A) = \dim \mathscr{C}(B)$

b) Si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, montrer que $\dim \mathscr{C}(A) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda)^2$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ.

Exercice 34 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

a) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp} N = \mathrm{Sp} N^T$.

b) Soient $U, V \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right)^2$. Montrer que : $UV^T \neq 0$.

c) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que, pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp} A \times \mathrm{Sp} B$, $\alpha + \beta \in \mathrm{Sp}\Phi$.

d) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\Phi$ et M un vecteur propre associé.

  i) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$.

  ii) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp} A \times \mathrm{Sp} B$ tel que : $\lambda = \alpha + \beta$.

Exercice 35 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $t > 0$. On note $\mathscr{B}$ la base $\left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$.

a) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

b) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sim}(N)$ la classe de similitude de N. Montrer que la matrice N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$.

Exercice 36 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X], P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 37 *(CCINP MP 2021)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes. Déterminer le nombre de $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $v^2 = u$.

Exercice 38 *(CCINP MP 2013)*

a) Montrer que l'application trace est une forme linéaire sr $M_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $F : X \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto -X + \mathrm{tr}(X) I_n$. Calculer la trace de F.

c) Trouver les valeurs propres de F.

d) L'endomorphisme F est-il diagonalisable ? Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 39 *(CCINP MP 2019)*

On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

a) Montrer que $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Calculer P_1 et P_2.

b) On considère $x \in]-2,2[$ et on pose $x = 2\cos a$, avec $a \in]0,\pi[$. Montrer que $\mathrm{P}_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin a}$.

c) En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 40 *(CCINP MP 2019)*

a) Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'en posant, pour $(f,g) \in E^2, \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} fg$, on définit un produit scalaire sur E.

b) Déterminer $\inf\left\{\int_{-1}^{1}\left(e^t - at - b\right)^2 \mathrm{d}t ; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 41 *(CCINP MP 2010)*

Soit $E = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Si $f,g \in E$, on pose $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg + f'g'$.

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) On pose $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 42 *(CCINP 2025)*

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on fixe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) On pose $H_v = I_n - 2\dfrac{v^T v}{\|v\|^2}$. Montrer que $H_v \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_v ?

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\|x\| = \|y\|$.

   i) Montrer que les vecteurs $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux.

   ii) Montrer qu'il existe $V \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Vx = y$.

Exercice 43 *(CCINP MP 2022)*

Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$.

a) Montrer que l'on définit là un produit scalaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

c) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$.

d) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathbb{R}I_n$. Déterminer $G^\perp$ et $\mathrm{d}\left(M, G^\perp\right)$.

Exercice 44 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soient E un espace euclidien de dimension n et F un sous-espace de dimension $r \in [\![1\,;n-1]\!]$. Soit p le projecteur orthogonal sur F. On note $\mathscr{C} = \{f \in \mathscr{S}(E), p \circ f = f \circ p\}$.

a) Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Montrer que $f \in \mathscr{C}$ si et seulement si $f(F) \subset F$.

b) Soit $f \in \mathscr{S}^+(E)$. Montrer que $f^2 = p$ si et seulement si $f = p$.

Exercice 45 *(CCINP MP 2017)*

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 3$. Soit (a,b) une famille libre de E de deux vecteurs unitaires. On considère l'application $f : x \in E \mapsto \langle a,x\rangle\, a + \langle b,x\rangle\, b$.

a) Démontrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) Calculer $f(a+b)$.

d) Déterminer le spectre et une base de vecteurs propres de f.

Exercice 46 *(CCINP MP 2022)*

Soient $(E, \|\,\|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) On suppose qu'il existe $r > 0$ et $x_0 \in E$ tels que $B_o(x_0, r) \subset F$. Montrer que, pour tout $y \in E$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha x_0 + \beta y \in B_o(x_0, r)$. En déduire que $F = E$.

c) On suppose ici que $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathscr{N}$ est fermé et d'intérieur vide. Montrer que $\operatorname{Vect} \mathscr{N}$ est d'intérieur vide.
Indication : Trouver une contradiction en considérant I_n.

Exercice 47 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 48 *(CCINP MP 2018)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1}{3^n n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$.

a) Montrer que pour n assez grand, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. On pourra utiliser un développement asymptotique.

b) En utilisant $\dfrac{u_n}{v_n}$, montrer que $\sum u_n$ diverge.

c) En considérant $w_n = \frac{2}{3}\ln\dfrac{n+1}{n} + \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{2/3}}$.

Exercice 49 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

a) Déterminer le domaine de définition D_F de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

c) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D_F$.

Exercice 50 *(CCINP MP 2022)*

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

b) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

c) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\sin t}{t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 51 *(CCINP MP/MPI 2024)*

On donne $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a) Déterminer le rayon de convergence et la limite en 1 de $f : x \mapsto \displaystyle\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $g : x \mapsto \displaystyle\sum\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Exprimer g à l'aide de ln. Donner les limites en en 1 et 0 de $x \mapsto \ln(x)g(x)$.

c) Soient a et b deux réels, $0 < a < b < 1$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b\frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

d) Montrer que $\displaystyle\int_a^b\frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n\geqslant 0}\int_a^b\ln(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x$.

e) Calculer $\displaystyle\int_a^b\ln(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x$.

f) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 52 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^3\right)^n}$.

a) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.

c) On pose $u_n = n^{1/3} I_n$. Étudier la convergence de la suite (u_n). *Indication* : Poser $v_n = \ln(u_n)$.

d) Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

Exercice 53 *(CCINP MP/MPI 2023)*

a) Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

b) Montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 54 *(CCINP MP 2019)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Pour $t \in]0,1[$, écrire $\dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.

b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^1 |u_n(t)| \, \mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

c) Soit $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \mathrm{d}t = \lim_{N \to +\infty} \int_0^1 S_N(t) \mathrm{d}t$.

d) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

e) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 55 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

On pose, pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \cos^n(x)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi[$ puis calculer f'.

Exercice 56 *(CCINP MP 2021)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.

a) Étudier la convergence simple et la convergence normale de cette série de fonctions.

b) Soit $A > 0$. Montrer l'existence de M tel que : $\forall x \in [0, A], \left| \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)} \right| \leqslant \frac{M}{\ln(n)}$. Que peut-on en déduire ?

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) Montrer que, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 57 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant n! 4^{n+1}$.

b) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Donner l'intervalle de définition de f et montrer que, sur cet intervalle, $f'(x) = f(x)^2$.

c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

d) Donner une expression de u_n.

Exercice 58 *(CCINP MP 2018)*

On définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives.

a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle f(h), h \rangle > 0$.

b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ par $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.

  i) Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.

  ii) Montrer que g admet un unique point critique en $z_0 = f^{-1}(u)$.

  iii) Montrer que g admet un maximum global en z_0 (on pourra étudier le signe de $g(z_0 + h) - g(z_0)$).

Exercice 59 *(CCINP MP 2021)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier la diagonalisabilité de A. Donner une base de vecteurs propres.

b) Résoudre le système différentiel $(x' = x + 2z, y' = y, z' = 2x + z)$.

Exercice 60 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

a) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f'(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Plus généralement, montrer que si $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 61 *(CCINP MP 2022)*

Soit l'équation différentielle $(*) : t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$.

a) Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Écrire $(*)$ sous la forme d'une système différentiel linéaire.

c) Soit l'équation différentielle $(**) : t^2 y'' + 4ty' + 2y = e^t$. En utilisant la méthode de variation des constantes, donner les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) On propose une autre méthode de résolution. Vérifier qu'il existe une solution particulière de $(**)$ de la forme $y(t) = \frac{z(t)}{t}$, avec z de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'ensemble des solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 62 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. En posant $\min \varnothing = +\infty$, on définit $T_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$ et $T_2 = \min\{n > T_1, X_n = 1\}$.

a) Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.

b) Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2 - T_1 = k, T_1 = n)$.

c) Vérifier que $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2.

Autres

Exercice 63 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer que, si a divise c et b divise c alors ab divise c.

a) Trouver une solution de $(*) : x \equiv 6[17]$ et $x \equiv 4[15]$.

b) Trouver toutes les solutions de (*).

Exercice 64 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \dots, x_n$ ses racines. On note également $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

a) Montrer que $\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i^2\right)$, puis que $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

b) Quelles sont les valeurs possibles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$?

c) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$.

d) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Exercice 65 *(CCINP MP 2018)*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n$.

a) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   i) Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.

   ii) Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.

   iii) Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.

   iv) Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1}$ et $\widetilde{P^{-1}}$.

b) Soient A et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   i) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \times \widetilde{A}$.

   ii) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\tilde{A}P$.

c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   i) Montrer que A diagonalisable $\Longrightarrow \tilde{A}$ diagonalisable.

   ii) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 66 *(CCINP 2025)*

Soit $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) La matrice A est-elle inversible ?

b) Trouver un polynôme annulateur de A.

c) Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

d) Donner les sous-espaces propres de A.

e) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec A. Montrer que $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont stables par M.

Exercice 67 *(CCINP MP/MPI 2023)*

a) Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\chi_A(0), \lim\limits_{+\infty} \chi_A$ et $\lim\limits_{-\infty} \chi_A$.

c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 68 *(CCINP MP 2022)*

Soit $n \geqslant 2, E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) i) Montrer que $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}) = \mathbb{R}$.
   ii) Déterminer $\dim \ker(\operatorname{tr})$.
   iii) Montrer que $E = \ker(\operatorname{tr}) \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.

b) Soit $f : E \to E, M \mapsto M + \operatorname{tr}(M) I_n$. Montrer que f est diagonalisable.

c) Soit J une matrice non nulle et de trace nulle. On note $g : M \in E \mapsto M + \operatorname{tr}(M) J$. Montrer que $P = X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Exercice 69 *(CCINP MP 2019)*

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ et $f \in E$ Soit

$$g : x \mapsto \int_0^1 \inf(x,t) f(t) \mathrm{d}t$$

définie sur $[0;1]$.

a) Montrer que g est continue.

b) Soit $x \in [0;1]$. Tracer $t \mapsto \inf(x,t)$ sur $[0;1]$ pour déduire une nouvelle expression de g.

c) Montrer que g est $\mathscr{C}^2$. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x) \forall x \in [0;1]$. On pose :

$$u : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \inf(x,t) f(t) \mathrm{d}t \right)$$

définie de E dans E.

d)
   i) Montrer que u est linéaire.
   ii) Montrer que u est injective.
   iii) Est-elle surjective ?

e) Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u.

Exercice 70 *(CCINP MP 2017)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $\beta = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. On dit que x est un u-générateur de E.

a) Donner la forme de la matrice de u dans la base β. Montrer que $\pi_u = \chi_u$.

b) On suppose u nilpotent. Montrer que u est cyclique si et seulement si u est nilpotent d'indice n.

c) On suppose que u admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes. Montrer que u est cyclique (Indic : montrer que $x = x_1 + \ldots + x_n$ est u-générateur de E avec $(x_1, \dots, x_n)$ base de vecteurs propres de u).

Exercice 71 *(CCINP MP 2013)*

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (kx + y + z, x + ky + z, x + y + kz)$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de f.

b) Déterminer le rang de f suivant k.

c) Déterminer les sous-espaces propres de f^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 72 *(CCINP MP 2010)*

Écrire, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ autour du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 73 *(CCINP 2025)*

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathscr{S}(E)$. On note a (resp. b) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de f.

a) Montrer que $a \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant b \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

b) Soit $r \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in E, \langle f(x), x \rangle \leqslant r \|x\|^2$. Montrer que $b \leqslant r$.

c) Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,i} = k, a_{i,j} = 1$ si $i = j \pm 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que la plus grande valeur propre de A est inférieure ou égale à $k + 2$.

Exercice 74 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

a) Déterminer les éléments de $\mathscr{S}^+(E) \cap \mathscr{O}(E)$.

b) Montrer la stabilité de $\mathscr{S}^+(E)$ par addition. L'ensemble $\mathscr{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?

c) Soit $u \in \mathscr{S}^+(E)$. Montrer l'existence de $v \in \mathscr{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.

d) En déduire que pour tous $u, v \in \mathscr{S}^+(E)$, $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$ et $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$.

Exercice 75 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

a) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp} u$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

b) Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

c) Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.

d) Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est symétrique.

Exercice 76 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Montrer que $(M,N) \mapsto \mathrm{tr}\left(M^T N\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soient $M, N \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}\left(M^T N\right) \leqslant n$.

c) Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

  i) Montrer que $\mathrm{tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \mathrm{tr}\left(A^2 B^2\right)$.

  ii) Montrer que $\mathrm{tr}\left((AB+BA)^2\right) \leqslant 4\sqrt{\mathrm{tr}\,(A^4)}\sqrt{\mathrm{tr}\,(B^4)}$.

Exercice 77 *(CCINP MP 2019)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang m.

a) Si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, montrer que $X^T A X > 0$

b) Montrer que $n \geqslant m$.

c) Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 78 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a) Quel est le rang de A ?

b) Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

c) Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de f pour la structure euclidienne canonique.

Exercice 79 *(CCINP MP/MPI 2025)*

On note $E = \mathbb{C}[X]$ et, pour $P = \sum\limits_{k \geqslant 0} a_k X^k$, $\|P\| = \sup_{k \geqslant 0} |a_k|$.

a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme de E.

b) Soit $b \in \mathbb{C}$. On souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.

  i) Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.

  ii) Étudier la continuité de f lorsque $|b| = 1$ à l'aide des polynômes $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{b}^k X^k$.

  iii) Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.

Exercice 80 *(CCINP MP 2022)*

Soit E un espace vectoriel normé.

a) Montrer que E est connexe par arcs.

b) Soit F un autre espace vectoriel normé, et $f : E \to F$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs pour tout connexe par arcs A de E.

c) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

d) Soit U une partie de E. Montrer que l'indicatrice de U dans E est continue si U est à la fois ouverte et fermée dans E. En déduire les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 81 *(CCINP MP 2019)*

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair, f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant |P(t)|$

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.

b) Montrer que f est la fonction nulle.

c) Le résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

Exercice 82 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Soient $a, b > 0$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2} + t^{1/2}}$. On effectuera le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $2\arctan \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant R_n \leqslant 2\arctan \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

d) Déterminer un équivalent simple de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 83 *(CCINP MP 2022)*

On donne $\alpha > 0, u_1 > 0$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$, et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$

a) Justifier l'existence, pour tout n de $\ln(S_{n+1})$, et l'exprimer à l'aide de $\ln(S_n)$.

b) Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.

d) Pour $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, déterminer la limite de $(\ln(S_{n+1}))$; conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_n u_n$.

Exercice 84 *(CCINP MP 2018)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}\, du$. En utilisant les fonctions $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{x+u}\, dt$ et $h : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}\, du$, montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

c) Montrer que pour $x \in D$, $0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x+u} \leqslant \frac{u}{x^2}$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

d) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une nouvelle expression intégrale de f.

Exercice 85 *(CCINP MP/MPI 2025)*

Soit $f \in \mathscr{C}^1(]0,1], \mathbb{R})$ telle que $|f'(t)| \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$.

a) Déterminer un équivalent en 0^+ de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 |f'(t)|\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que $x f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 86 *(CCINP MP/MPI 2024)*

a) Donner le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum (-1)^n \ln(n) x^n$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1\left[, S(x) = \dfrac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) x^{n+1}\right.$.

c) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} S(x) = \dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

d) Calculer cette limite à l'aide de la formule de Wallis : $\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1-\dfrac{1}{4k^2}\right)$.

Exercice 87 *(CCINP MP 2018)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \displaystyle\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\, dt = 0$.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge vers $\ln(2)$.

c) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $I_n(\theta) = \displaystyle\int_\pi^\theta \sum_{k=1}^n e^{ikt}\, dt$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\theta) = \dfrac{i}{2} \ln\left(\sin(\dfrac{\theta}{2})\right) + \dfrac{\pi - \theta}{2}$.

d) En déduire que la série $\sum \dfrac{e^{int}}{n}$ converge et donner sa somme.

Exercice 88 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 . Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.

c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 89 *(CCINP MP/MPI 2024)*

On pose, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n (\ln x)^p \mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer cette expression.

b) On considère $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}}$. Justifier son existence et calculer sa valeur.

c) La famille $\left(\dfrac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 90 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Déterminer les développements en série entière de $x \mapsto \ln\left(1+x-2x^2\right)$ et $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en 0.

Exercice 91 *(CCINP MP 2018)*

a) Montrer la fonction $t \mapsto \arctan t$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b) On considère la série entière $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Déterminer son rayon de convergence. On note $f(x)$ sa somme.

c) Donner une expression simplifiée de f' puis de f.

d) Que peut-on dire de la convergence sur $[-R,R]$?

e) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 92 *(CCINP MP/MPI 2024)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(x,y) = \dfrac{2x^2 + xy^2 + 6x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^a}$.

a) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

b) La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

c) Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 93 *(CCINP MP/MPI 2023)*

On recherche les fonctions $x,y,z,u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant le système $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y - 2z \\ y' = x - y + u \\ z' = x - z + u \\ u' = 2y - 2z + u \end{array}\right.$. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

a) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.

b) Justifier avec un minimum de calcul que f n'est pas diagonalisable.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Résoudre le système différentiel.

Exercice 94 *(CCINP MP 2018)*

Résoudre sur $[0,\pi/2]$ puis sur $[0,\pi]$: $\cos(x)y' - \sin(x)y = \cos^3 x$.

Exercice 95 *(CCINP MP/MPI 2023)*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.

a) Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $G_X(t), \mathbf{E}(X), \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.

c) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.

d) On pose $Z = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.

e) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

Exercice 96 *(CCINP MP 2019)*

Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = {}^tUU$.

a) i) Si $k \in [\![1,n]\!]$, déterminer la loi de probabilité de X_k^2.

ii) Calculer ${}^tUU$ en fonction de S.

iii) Calculer M^2 en fonction de M et S. Donner un polynôme annulateur de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de son spectre ?

b) i) Déterminer les coefficients de M.

ii) Déterminer la loi de $\mathrm{tr}(M)$, donner son espérance et sa variance.

iii) Donner les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(M)$. Donner sa loi de probabilité.

c) Donner la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.

Exercice 97 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres.

Exercice 98 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quels réels a la suite $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-telle ?

Exercice 99 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soient $E = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), A, B \in E\setminus\{0\}$ et $f : M \in E \mapsto \mathrm{tr}(AM)B$.

a) Quels sont les éléments propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) On note $\mathscr{C} = \left\{k \in \mathbb{R}^+ ; \forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}\left(f(M)^2\right) \leqslant k\,\mathrm{tr}\left(M^2\right)\right\}$. Montrer que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ et déterminer son minimum.

Exercice 100 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. À quelles conditions sur a, b, c la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 101 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sigma(3n) = 4n, \sigma(3n+1) = 4n+2$ et $\sigma(3n+2) = 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que σ est bijective.

b) On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, et calculer leurs sommes.

Exercice 102 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de I_n. Montrer que $I_n \sim n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}u$.

Exercice 103 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Est-il possible de truquer deux dés à six faces de sorte que la somme obtenue pour un double lancer suive une loi uniforme ?

Exercice 104 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

On dispose de N coffres. Avec probabilité p, on place dans l'un des coffres un trésor (le choix du coffre est effectué sous loi uniforme). Quelle est la probabilité que le N-ième coffre contienne un trésor sachant que les $N-1$ autres coffres sont vides ?

Exercice 105 *(Mines-Telecom MP/MPI 2025)*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par $\mathbb{P}\left(X_k = -k^\lambda\right) = \mathbb{P}\left(X_k = k^\lambda\right) = \dfrac{1}{2}$, où $\lambda \in]0, 1/2[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}$.

a) Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $V(S_n)$.

b) Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n k^\alpha$, où $\alpha > 0$.

c) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \alpha)$.

Exercice 106 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

Soient $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ et $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ telles que $\mathrm{rg}\,(f \circ g) = 2$. Calculer $\mathrm{rg}\,f$ et $\mathrm{rg}\,g$.

Exercice 107 *(Mines-Telecom MP/MPI 2024)*

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 108 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que $\dim(E)$ est pair.

b) Montrer que, pour tout $x \in E, \mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

c) Montrer que, si $\dim(E) = 2n$, il existe des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ de E tels que la famille $(e_1, f(e_1), \cdots, e_n, f(e_n))$ soit une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 109 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

Soit $\Phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(M)A - M^T$.

a) L'application Φ est-elle un automorphisme ?

b) L'application Φ est elle diagonalisable ? Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Exercice 110 *(Mines-Telecom MP/MPI 2023)*

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathscr{M}_2$ (C) vérifiant $\exp(M) = A$.

a) Montrer que M admet une unique valeur propre de la forme $ik\pi$. Préciser k.

b) Montrer que M est triangulaire supérieure.

c) Déterminer les $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = A$.

Exercice 111 *(Mines-Telecom MP 2022)*

On admet : $\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$. Soient $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte. Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

a) Déterminer la loi de X.

b) Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 112 *(Mines-Telecom MP 2019)*

a) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ sont les

$$x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Montrer qu'une seule des solutions admet une limite finie en $+\infty$.