Centrale - Algèbre

Exercice 1 *(Centrale - 2024)*
Un entier $n \geqslant 2$ est un faux premier (FP) s'il n'est pas premier et si, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier à n, $a^{n-1} \equiv 1[n]$.

1. Montrer que, si n est FP, n est impair.
2. On suppose que n s'écrit $\prod_{i=1}^{r} p_i$ où $r \geqslant 2$, les p_i sont des nombres premiers impairs distincts tels que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $p_i - 1$ divise $n-1$. Montrer que n est FP.
3. On admet que, pour tout p premier impair et tout $v \in \mathbb{N}^*$, le groupe multiplicatif $\left(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z}\right)^\times$ est cyclique. En déduire la réciproque de la question précédente.

Exercice 2 *(Centrale - 2024)*
Soient G un groupe admettant un nombre fini de générateurs, H un groupe fini, $f : G \to G$ un morphisme de groupes surjectif et $g : G \to H$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que l'ensemble des morphismes de groupes de G vers H est fini.
2. Soit $a \in \ker f$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b_n \in G$ tel que $f^n(b_n) = a$, puis calculer $g \circ f^m(b_n)$ pour tout $m > n$.
3. Montrer que $\ker f \subset \ker g$.
4. On pose $\Gamma = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det M = 1\right\}$. Montrer que Γ est un groupe, engendré par les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que tout endomorphisme surjectif de Γ est bijectif.

Exercice 3 *(Centrale - 2023)*
Soit $(G, \cdot)$) un groupe fini commutatif tel que le nombre d'automorphismes de G est 3.

1. Donner la définition d'un automorphisme. Montrer que $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.
2. Montrer que, pour tout $x \in G, x^2 = e$.
3. Montrer que G possède un sous-groupe V d'ordre 4 et préciser les automorphismes de V.

Exercice 4 *(Centrale - 2023)*

1. Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux éléments de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab?
2. Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu' il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
3. Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.

Exercice 5 *(Centrale - 2016)*
Soient G un groupe fini de cardinal n, S une partie non vide de G. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A(k) = \left\{s_1 \dots s_k, (s_1, \dots, s_k) \in S^k\right\}$ et $a_k = |A(k)|$.

1. Montrer que la suite (a_k) est croissante.
2. Montrer que, pour $k \geqslant n$, $a_{k+1} = a_k$.
3. Montrer que $A(n)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 6 *(Centrale - 2015)*
Soit H l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.

1. Représenter H.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $A(H) \subset H$.
3. Montrer que $H \cap \mathbb{N}^2$ est infini.
4. Montrer que $H \cap \mathbb{N}^2 = \{A^k X_0, k \in \mathbb{N}\}$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 *(Centrale - 2012)*
Soit $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib,(a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ et $v:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{N}$ définie par $v(a+ib)=a^b+b^2$ si $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que, pour tout $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[i]$, $v(z_1z_2)=v(z_1)v(z_2)$.
2. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Montrer que 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
4. Soit $(z,w)\in\mathbb{Z}[i]\times\mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}[i]^2$ tels que $z=wq+r$ avec $v(r)<v(w)$. Ce couple est-il nécessairement unique?
5. Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux.

Exercice 8 *(Centrale - 2024)*
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, $p=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g$, $V^G=\{x\in E;\forall g\in G,g(x)=x\}$.

1. Montrer que, si $h\in G, g\in G\mapsto h\circ g\in G$ est une bijection de G sur lui-même, puis que p est un projecteur.
2. Montrer que $\dim\left(V^G\right)=\frac{1}{|G|}\sum\mathrm{tr}(g)$.
3. Montrer que tout sous-espace V de E stable par tous les éléments de G admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G. On pourra partir d'un projecteur q de E sur V et considérer $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g\circ q\circ g^{-1}$.

Exercice 9 *(Centrale - 2023)*
Soient $a_1<a_2<\cdots<a_p$ et $b_1<b_2\cdots<b_p$ des réels et $M=\left(e^{a_ib_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.

1. Calculer $\det M$ lorsque $b_k=k-1$ pour tout k.
2. Montrer que M est inversible, puis que $\det M>0$.

Exercice 10 *(Centrale - 2019)*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\mathrm{Com}(M)$ la comatrice de M.

1. Soit $r\in\{0,\dots,n\}$. Déterminer la comatrice de J_r^n, la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant r coefficients égaux à 1 puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.
2. Pour A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathrm{Com}(AB)=\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.
3. Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $\mathrm{Com}(M)$?
4. L'application Com est-elle injective? Quelle est son image?

Exercice 11 *(Centrale - 2024)*
Pour $a\in\mathbb{Z}$, on pose $S_a=\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}$ et $T_a=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$.

1. Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est un groupe et que $S_a,T_a\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour tout $a\in\mathbb{Z}$.
3. Que vaut $T_bS_aT_b^{-1}$ pour $a,b\in\mathbb{Z}$?
4. Soit $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique X^2-1. Montrer qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $M=PS_0P^{-1}$ ou $M=PS_1P^{-1}$.

Exercice 12 *(Centrale - 2023)*

1. Énoncer et démontrer la caractérisation du rang par les matrices extraites.
2. Soit $\Omega_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M=\left(M_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(K)$ telles que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, la matrice $M_k:=\left(M_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ soit inversible. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(K)$ appartient à $\Omega_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M s'écrit TT' où T (resp. T') est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure (resp. supérieure) inversible.

Exercice 13 *(Centrale - 2021)*
Soient $n\geqslant 3$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Com}(A)^TA=\det(A)I_n$.
2. Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de A.
3. Résoudre $\mathrm{Com}(A)=A$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 *(Centrale - 2024)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module majoré par 1. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in S_n$. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P éventuellement confondues.

1. (a) Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.
   (b) Montrer que $\forall k \in [\![0; n-1]\!], |a_k| \leqslant \binom{n}{k}$.
   (c) Conclure que S_n est fini.
2. Montrer que P est le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \exists Q_p \in S_n, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, Q_p\left(z_i^p\right) = 0$.
   (b) Conclure que les racines non nulles de P sont de module 1.

Exercice 15 *(Centrale - 2023)*

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes réels définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Montrer que $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$ pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que, pour $n \geqslant m, 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
   On considère l'équation différentielle $(E) : \left(1 - x^2\right) P'^2 = n^2 \left(1 - P^2\right)$.
4. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n et $-T_n$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que tout polynôme solution de (E) est de degré n, puis déterminer les polynômes solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 *(Centrale - 2021)*

Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $U_0 = 1, U_1 = 2X$ et, pour $n \geqslant 2, U_n(X) = 2XU_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de U_n.
2. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$.
3. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que U_n possède n racines distinctes et écrire U_n sous forme de produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $n \geqslant 2$. Étudier les racines rationnelles de $V_n(X) = U_n\left(\frac{X}{2}\right)$.
5. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'irrationalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 17 *(Centrale - 2024)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Montrer que, pour tout hyperplan H de E, il existe $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
2. Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\langle x_i, x_j \rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$, où α est un réel strictement négatif fixé. Déterminer α.
3. Montrer l'existence d'une telle famille.

Exercice 18 *(Centrale - 2024)*

Pour tout $t \in]-1, 1[$, on note $\omega(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\omega(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \left(X^2 - 1\right) P'' + (2X + 1)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer ses valeurs propres.
4. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres de degrés échelonnés.

Exercice 19 *(Centrale - 2023)*
Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ un vecteur unitaire, et H l'hyperplan orthogonal à la droite vectorielle dirigée par a. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H, et p la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$.
2. Montrer que, pour $x \in E$, $p(x) = x - \langle a, x\rangle\, a$.
3. Soit $\Omega = \{x \in E, \langle a, x\rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle x, \sigma(x)\rangle \leqslant 0\}$.
   Montrer les équivalences suivantes, pour $x \in E$:
   (a) $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x\rangle \leqslant \|p(x)\|$,
   (b) $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega, \left\langle x, y\right\rangle \leqslant 0$.

Exercice 20 *(Centrale - 2021)*

1. Montrer qu'il existe une unique suite (H_n) de polynômes tels que :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\, t^n.$$
2. Montrer que $H_n' = H_{n-1}$ et $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$.
3. Montrer que les H_n forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

Exercice 21 *(Centrale - 2017)*
On considère $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

1. Donner la définition d'un endomorphisme symétrique et énoncer le théorème spectral.
2. Soit f un endomorphisme symétrique de E à valeurs propres positives. Soit $x \in E$ tel que $\left\langle x, f(x)\right\rangle = 0$. Montrer que $f(x) = 0$.
3. Soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$ à valeurs propres positives. Montrer que $E = \ker(f \circ g) \oplus \mathrm{Im}\,(f \circ g)$.
4. Soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$ à valeurs propres positives. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.
   Indication : Poser $F = \mathrm{Im}\, f$, $f_1 = F_{|F}$ et $h = (f \circ g)_{|F}$ et considérer le produit scalaire sur F défini par $\varphi(x,y) = \left\langle f_1^{-1}(x), y\right\rangle$.

Exercice 22 *(Centrale - 2024)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désigne par μ_A son polynôme minimal.

1. Montrer que tout idéal de $\mathbb{C}[X]$ est de la forme $P\mathbb{C}[X]$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.
2. Pour $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, on note $\mu_{A,x}$ le générateur unitaire de l'idéal annulateur ponctuel $\{P \in \mathbb{C}[X], P(A)x = 0\}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mu_{A,x} = \mu_A$.
3. Soit A une matrice diagonale par blocs dont la diagonale vaut (A_1, A_2) où A_1 et A_2 sont des matrices de Frobenius (compagnon) et $\chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} = 1$. Montrer que A est semblable à une matrice de Frobenius.

Exercice 23 *(Centrale - 2024)*

1. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable.
   Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.
2. (a) Montrer que $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inversibles.
   (b) Montrer que, pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AD - DB = C$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les matrices A et B pour que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 24 *(Centrale - 2024)*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Calculer, en fonction de $\mathrm{tr}\, u$ et de $\mathrm{tr}\left(u^2\right)$, les coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2} du polynôme caractéristique de u.
2. On suppose u de rang 2.
   (a) Montrer que l'on peut écrire $\chi_u = X^{n-2}P(X)$, où P est un polynôme de degré 2 dont on précisera les coefficients en fonction de $\mathrm{tr}\, u$ et $\mathrm{tr}\left(u^2\right)$.
   (b) À quelle condition l'endomorphisme u est-il trigonalisable ?

Exercice 25 *(Centrale - 2023)*

Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in S_P(A)} |\lambda|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{tr}\,(A^n)|}$.

1. Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, montrer que (u_n) converge vers $\rho(A)$.
2. Donner un exemple de matrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que (u_n) ne converge pas.
   On suppose maintenant que A a au moins deux valeurs propres distinctes.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de (z^n). Montrer que $\rho(A)$ est valeur d'adhérence de u_n.

Exercice 26 *(Centrale - 2021)*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On pose $k = \min\left\{j \in \mathbb{N}^*, \ker\left(u^j\right) = \ker\left(u^{j+1}\right)\right\}$.

1. Montrer que k est bien défini et, que, pour $j \geqslant k$, $\ker\left(u^j\right) = \ker\left(u^k\right), \mathrm{Im}\,\left(u^j\right) = \mathrm{Im}\,\left(u^k\right)$.
   On pose $K_u = \ker\left(u^k\right), I_u = \mathrm{Im}\,\left(u^k\right)$. On note u_I et u_K les endomorphismes induits par u sur I_u et sur K_u.
2. Montrer que u_K est nilpotente et que u_I est un automorphisme.
3. Montrer que $K_u \oplus I_u = E$
4. Si K et I sont des sous-espaces de E, on note $\mathrm{Nil}(K)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de K, $\mathrm{Aut}(I)$ l'ensemble des automorphismes de I. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des (K, I, v, w) avec (K, I) couple de sous-espaces supplémentaires de E, $v \in \mathrm{Nil}(K)$, $w \in \mathrm{Aut}(I)$. Montrer que l'application $\Phi : u \in \mathscr{L}(E) \mapsto (K_u, I_u, u_K, u_I)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{C}$.
5. Montrer que k est la multiplicité de 0 comme que racine du polynôme minimal de u.

Exercice 27 *(Centrale - 2021)*

Soient $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ qui lui est canoniquement associé.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathscr{B}_u(x) = \left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ soit libre.
2. On note $F = \mathrm{Vect}\mathscr{B}_u(x)$. Montrer que $\mathscr{B}_u(x)$ est une base de F et que F est stable par u. Donner la matrice J_p, dans la base $\mathscr{B}_u(x)$, de l'endomorphisme induit par u sur F.
3. Montrer qu'il existe une forme linéaire ϕ sur E telle que $\phi\left(u^{p-1}(x)\right) \neq 0$. Montrer que $\left(\phi \circ u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
4. On note $G = \displaystyle\bigcap_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \ker\left(\phi \circ u^k\right)$. Montrer que G est stable par u et que $F \oplus G = E$.
5. Montrer que N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme J_r, puis que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\lambda I_r + J_r$.

Exercice 28 *(Centrale - 2019)*

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Comparer les spectres de B et ${}^tB$. En déduire que, si A et B ont une valeur propre commune, il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \backslash \{0\}$ telle que $AC = CB$.
2. On suppose qu'il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \backslash \{0\}$ telle que $AC = CB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
3. Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$. On suppose qu'il existe il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$. Montrer que $\chi_A \wedge \chi_B$ est de degré supérieur ou égal à r.
4. Étudier la réciproque de la question précédente.

Exercice 29 *(Centrale - 2017)*

On considère G un sous-groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments M vérifient $M^p = I_n$. On identifiera matrice et endomorphisme canoniquement associé.

1. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables et que les valeurs propres sont dans $\mathbb{U}_p$.
2. Soient A et B deux matrices diagonalisables qui commutent.
   (a) Montrer que l'endomorphisme B stabilise tous les sous-espaces propres de A.
   (b) Montrer que A et B sont codiagonalisables.
3. Montrer que les matrices de G sont codiagonalisables.
4. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.
5. Montrer que si p est premier alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 *(Centrale - 2015)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux endomorphismes non nuls de $\mathbb{C}^n$ tels que $f \circ g = 0$.

1. Que dire de $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, g$?
2. Soit λ une valeur propre non nulle de g. Montrer qu'il existe un vecteur propre de g associé à λ appartenant à $\ker f$.
3. En déduire que f et g sont cotrigonalisables.

Exercice 31 *(Centrale - 2024)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Omega = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), I_n + M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.

1. Montrer que $(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.
2. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \Omega$.
   On pose $f : M \in \Omega \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$.
3. Montrer que, pour tout $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \cap \Omega$, $f(M) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $f(f(M)) = M$.
4. Montrer que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ telle que $\det(M + J) \neq 0$.
   Indication : on pourra faire une récurrence et comparer deux déterminants.
5. Soit $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = Jf(A)$.

Exercice 32 *(Centrale - 2023)*

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit (E, ϕ) un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que la matrice $\left(\phi\left(e_i, e_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique définie positive.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $L_p = \dfrac{d^p}{dX^p}\left[X^p(1-X)^p\right] \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $\left(L_p\right)$ est orthogonale pour le produit scalaire de la question a. Est-elle orthonormale ?
4. Soit $M = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$. Montrer que la matrice M est symétrique définie positive et calculer $\det M$.

Exercice 33 *(Centrale - 2023)*
Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique définie positive avec $A_1 \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathscr{S}_q(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A_1 et A_2 sont définies positives.
2. Montrer qu'il existe R_1 et R_2 symétriques définies positives telles que $R_1^2 = A_1$ et $R_2^2 = A_2$.
3. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(A_1)\det(A_2)$.

Exercice 34 *(Centrale - 2023)*
On considère la relation binaire pour $(A, B) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2$ $A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une partie de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour $\preceq$.
3. Montrer que toute suite croissante majorée pour $\preceq$ converge.
4. Soient A et B dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \preceq B \Longrightarrow B^{-1} \preceq A^{-1}$.

Exercice 35 *(Centrale - 2021)*
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est normale si et seulement si $AA^T = A^T A$.

1. Déterminer les matrices normales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que toute matrice normale stabilise un sous espace de dimension 1 ou 2.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice normale. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme (a) avec $a \in \mathbb{R}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

Exercice 36 *(Centrale - 2012)*
Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note Φ_A la restriction à $S_n(\mathbb{R})$ de l'application $M \mapsto AMA^T$. On veut montrer que $|\det \Phi_A| = |\det A|^{n+1}$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme. A-t-on $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$?
2. Montrer que $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(MN)$ définit un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$. Donner l'adjoint de Φ_A pour ce produit scalaire. En déduire le résultat lorsque A est orthogonale.
3. Donner une base de $S_n(\mathbb{R})$. En déduire le résultat si A est diagonale, puis si A est symétrique.
4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(Q, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.
5. Conclure.

Centrale - Analyse

Exercice 37 *(Centrale - 2024)*
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. On munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\| \|$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\||\,\||$ d'opérateur associé.

1. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme ?
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \rho(A) \leqslant \left\|A^k\right\|^{1/k}$.
3. Montrer que, pour toute norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), N\left(A^k\right)^{1/k} \to \rho(A)$.

Exercice 38 *(Centrale - 2024)*
On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$. On munit E de la norme $\| \|_\infty$ et on définit $T(f)$ pour tout $f \in E$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|} f(t)\mathrm{d}t.$$

1. (a) Rappeler le théorème de Heine.
   (b) Montrer que $f \in E$ est uniformément continue.
2. Montrer que $T \in \mathscr{L}(E)$ puis que T est continu.
3. Déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 39 *(Centrale - 2023)*
Soient (E, N) et $\left(E', N'\right)$ deux espaces vectoriels normés.
Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_d X^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max\left(\left|p_0\right|, \ldots, \left|p_d\right|\right)$.

1. Vérifier que l'application $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$. Montrer que l'ensemble $Y = \left\{y_n, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{\ell\}$ est compact.
   (b) Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de $E', f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un fermé de E, alors $f(F)$ est un fermé de E'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leqslant \|P\| + 1$. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 40 *(Centrale - 2021)*
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées.
Pour $u \in E$, on note $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

1. Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?
   On munit désormais E de la norme N_∞.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est d'intérieur vide. Quelle est son adhérence ?
3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des suites à valeurs strictement positives.

Exercice 41 *(Centrale - 2021)*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$. On note R_p l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang p.

1. Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et N sont de même rang si et seulement s'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$.
2. Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C}\backslash F$ est connexe par arcs.
3. Montrer que R_p est connexe par arcs.
4. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de R_p.

Exercice 42 *(Centrale - 2019)*
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que, pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g dans $\mathbb{C}^*$ tel que $V \cap G = \{g\}$.

1. Montrer que, pour tout compact K de $\mathbb{C}^*, G \cap K$ est fini.
2. Montrer que $G \cap \mathbb{U}$ est cyclique.
3. On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $\Lambda = \{z \in G, |z| > 1\}$. Montrer que Λ admet un plus petit élément (pour la norme). En déduire G.

Exercice 43 *(Centrale - 2017)*

Soient N une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et S la sphère unité. On pose $N^*(A) = \sup\{\mathrm{tr}(AB), B \in S\}$.

1. Montrer que N^* est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : M \mapsto \det M$. Montrer qu'il existe $A_0 \in S$ telle que $f(A_0) = \max_S f$. Montrer que A_0 est inversible et que $f(A_0) = \max_{N(X)\leqslant 1} f(X)$.
3. Montrer que $N^*(A_0^{-1}) = n$.

Exercice 44 *(Centrale - 2024)*

1. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable et admettant en a et b une même limite finie.
2. On définit la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.
   (a) Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{2n}} f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
   (b) Quel est le degré de P_n ?
   (c) Que dire du nombre de zéros de $f^{(n)}$?

Exercice 45 *(Centrale - 2024)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $d_n = \mathrm{card}\{p \in [\![1 ; n]\!] ; p \mid n\}$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $f(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant x} d_k$.

1. Cours : comparaison série-intégrale. L'utiliser pour montrer l'équivalent $H_n \sim \ln n$.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer le deuxième terme du développement asymptotique de f.

Exercice 46 *(Centrale - 2023)*

Soit $x \in]0, 1[$.

1. Montrer que l'on peut définir deux suites $\left(p_n\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(q_n\right)_{n\geqslant 1}$ de telle sorte que $p_1 = x$, $q_n = \left\lfloor \dfrac{1}{p_n} \right\rfloor + 1$ et $p_{n+1} = p_n q_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\left(q_n\right)_{n>1}$ est croissante et minorée par 2 .
3. Montrer que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$.
4. Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $(r_n)_{n\geqslant 1}$, croissante, minorée par 2 et telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{r_1 r_2 \cdots r_n}$
5. Montrer que x est rationnel si et seulement si $\left(q_n\right)_n$ est stationnaire.

Exercice 47 *(Centrale - 2021)*

Soit $n \geqslant 3$. On pose $F_n = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que F_n admet exactement deux racines $x_n < y_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante, tend vers 0 et vérifie $x_n \sim 1/n$.
3. Donner un équivalent de $x_n - 1/n$.

Exercice 48 *(Centrale - 2019)*

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ converge.
2. Déduire de la question précédente la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.
3. On pose, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^s}$. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\zeta(n)-1}{n}$.

Exercice 49 *(Centrale - 2015)*

1. Soit (u_n) une suite telle que $u_n = \mathrm{O}(1/n^2)$. Que peut-on dire de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$?
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{O}(1/n)$.
3. On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$. Convergence et somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Exercice 50 *(Centrale - 2011)*

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Nature des séries de termes généraux u_n et $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

Exercice 51 *(Centrale - 2021)*

1. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \mathrm{d}t$?
2. Nature de $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$?

Exercice 52 *(Centrale - 2021)*

Montrer la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t$ et déterminer son signe.

Exercice 53 *(Centrale - 2021)*

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si ff' admet une limite (éventuellement infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$.
2. On suppose f^2 et f''^2 intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'^2 l'est aussi et que l'on a $\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$.
   Montrer que f est uniformément continue et tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 54 *(Centrale - 2024)*

Soit $f : t \in [0, \pi/2[\mapsto -\ln(\cos(t))$.

1. Montrer que $f(t) \geqslant t^2/2$ pour tout $t \in [0, \pi/2[$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}x$.
   (b) Donner un équivalent de $I_n = \int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 55 *(Centrale - 2023)*

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b, \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, on pose
   $$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \mathrm{d}t.$$
   Même définition lorsque f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour $r > 0, \gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$.
   Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$.
3. En déduire, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à préciser), l'égalité $\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1} \mathrm{d}z$

Exercice 56 *(Centrale - 2016)*

Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et calculer $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \tan t)}{\tan t}\, dt$.

Exercice 57 *(Centrale - 2015)*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ vérifie $(E) : x^2y' + y = x$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) telle que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$.
4. Montrer que g n'est pas rationnelle.

Exercice 58 *(Centrale - 2024)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité, $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, $\Lambda(n) = \displaystyle\sum_{d|n} \lambda(d)$.

1. Montrer que, si m et n sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$ et $\Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $\Lambda(n)$.
3. Montrer que, si $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$.

Exercice 59 *(Centrale - 2023)*

Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}\right)$ croissante telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$ où $a > 0$.

1. Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.
2. Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 60 *(Centrale - 2019)*

1. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, justifier l'existence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{-nx}\right)$.
2. Montrer que la série de fonctions de la question précédente converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0, +\infty[$?
3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en 0.

Exercice 61 *(Centrale - 2024)*

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n}\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$.
3. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-x^2t^2\right)}}$.
   (a) Ensemble de définition ?
   (b) Développer F en série entière au voisinage de 0.
   (c) Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 62 *(Centrale - 2023)*

1. Rappeler la règle de d'Alembert pour une série numérique à termes positifs.
2. On considère une suite croissante $\left(q_n\right)_n \geqslant 1$ d'entiers $\geqslant 2$.
   (a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{q_1 \dots q_n}$?
   (b) Montrer que si la suite $\left(q_n\right)$ est stationnaire alors le réel $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_n}$ appartient à $\mathbb{Q} \cap]0, 1]$.
   (c) On admet réciproquement que si $\left(q_n\right)$ tend vers $+\infty$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels e, $\operatorname{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
3. Montrer la réciproque admise ci-dessus.

Exercice 63 *(Centrale - 2023)*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]-r, r[$,

$$\det(\mathrm{id} - tu) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \mathrm{tr}\left(u^k\right)}{k}\right).$$

Exercice 64 *(Centrale - 2021)*

1. Rappeler et démontrer le théorème de la limite monotone.
2. On pose $a_0]0, \pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin a_n$. Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Déterminer la nature de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 65 *(Centrale - 2021)*

1. Soit (u_n) une suite tendant vers 0 . Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} u_n = 0$.

   On fixe une suite (a_n) et l'on note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que cette série entière a un rayon de convergence égal à 1 et que $\lim_{x\to 1} S(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
2. On suppose (a_n) positive. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$. Est-ce vrai sans l'hypothèse de positivité ?
3. On suppose $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 66 *(Centrale - 2024)*
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique. Soient $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : X' = -AX + B$. On suppose que l'ensemble $S = \left\{U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) ; AU = B\right\}$ est non vide.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont positives.
2. Quelles sont les solutions constantes de (E) ?
3. Soient X et Y deux solutions de (E). Montrer que $t \mapsto \|X(t) - Y(t)\|$ est décroissante. En déduire que toute solution est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
4. Soit X une solution de (E). Montrer que $X(t)$ admet une limite X_∞ quand t tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $\|X(0) - X_\infty\| = \inf_{U\in S} \|X(0) - U\|$.

Exercice 67 *(Centrale - 2017)*
Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = qy$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note y_α l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \alpha$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $y_0(x)y_0'(x) > 0$. Montrer que y_0 est strictement croissante.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, $y_\alpha(x) = y_0(x)\left(1 + \int_0^x \frac{\alpha}{y_0(t)^2}\, dt\right)$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha_1 < 0$ tel que l'on ait équivalence entre « y_α s'annule sur $\mathbb{R}^+$ » et « $\alpha < \alpha_1$ ». Calculer α_1.

Exercice 68 *(Centrale - 2017)*
Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On note $E = M_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E et $\mathcal{U} = \{I_n + N, N \in \mathcal{N}\}$. Pour $N \in \mathcal{N}$, on pose $L(N) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$.

1. Soit $A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, E)$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ et $A'(t)$ commutent. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)'(t) = kA'(t)A^{k-1}(t)$.
2. Soit $N \in \mathcal{N}$. Montrer que $L(N)$ est nilpotente, de même indice de nilpotence que N.
3. Soit $N \in \mathcal{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(L(tN)) = I_n + tN$. En déduire que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$ sont homéomorphes.

Exercice 69 *(Centrale - 2016)*

1. Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(-x)$.
2. On donne $\alpha \in]-1, 1[$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière au voisinage de tout point telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

Exercice 70 *(Centrale - 2015)*
On se donne $\phi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi(s+t) = \psi(s)\phi(t)$.

1. On suppose dans cette question de ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = \phi'(0)\phi(t)$. En déduire qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(tA)$.
2. Soit $\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour $|x| > \alpha$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-t)\phi(t)\,dt$. Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \phi(x)A$.
3. Déterminer ϕ.

Exercice 71 *(Centrale - 2012)*
Soit $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathscr{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ et $(E) : y'' = qy$.

1. Soit f une fonction non nulle solution de (E) vérifiant $f(a) \geqslant 0$ et $f'(a) \geqslant 0$:
   (a) Montrer que pour $x > a$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont strictement positifs.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soient u et v deux solutions de (E) telles que $u(a) = 1$, $u'(a) = 0$, $v(a) = 0$ et $v'(a) = 1$.
   (a) Calculer $u'v - v'u$.
   (b) Montrer que les fonctions u/v et u'/v' sont respectivement strictement décroissante et strictement croissante sur $]a, +\infty[$.
   (c) Montrer que les fonctions u/v et u'/v' possèdent la même limite $\ell > 0$ en $+\infty$.
3. (a) Montrer que (E) possède une unique solution φ telle que $\varphi(a) = 1$ et, pour $x \geqslant a$, $\varphi(x) \geqslant 0 \geqslant \varphi'(x)$.
   (b) Déterminer φ pour $a > 0$ et $q : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$.

Exercice 72 *(Centrale - 2024)*
Soit $f : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, et calculer sa différentielle.
2. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\dim\ker \mathrm{d}f(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 73 *(Centrale - 2023)*
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.
2. On définit la fonction $d_F : E \backslash F \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 74 *(Centrale - 2019)*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si :
$$\forall (a,b) \in U^2, f(b) \geqslant f(a) + \left\langle \nabla f(a), b-a \right\rangle.$$

Exercice 75 *(Centrale - 2016)*
Soient $a > 0$, $k \in]0,1[$. On note $I =]-a, a[$ et on considère $f : I \times I \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que, pour tout $(x, y) \in I^2$, on a la majoration $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant k$.

1. Soient (x, y) et (x_0, y_0) dans I^2. Montrer que l'application $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty)$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On donne $(\alpha, \beta) \in I^2$ et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|)$. Montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente et que la suite (u_n) converge vers une limite indépendante de (α, β).

Centrale - Probabilités

Exercice 76 *(Centrale - 2024)*

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant t)$.

1. Montrer que, pour une variable aléatoire X, F_X est croissante de limite 1 en $+\infty$.
   Soient E un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}, (X_n)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E et X une variable à valeurs dans E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x)$.
2. Montrer que $\sum\limits_{x\in E} \mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x) \to 0$.
   Ind. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer une partie finie $I \subset E$ telle que $\mathbf{P}(X \in I) > 1 - \varepsilon$.
3. Montrer que $\left(F_{X_n}\right)$ converge uniformément vers F_X.

Exercice 77 *(Centrale - 2024)*

1. Soient p un réel > 1 et $q = \dfrac{p}{p-1}$.
   (a) Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que $X \in L^p$ et $Y \in L^q$. Montrer que $XY \in L^1$ et que $\mathbf{E}(|XY|) \leqslant \mathbf{E}(X^p)^{1/p}\mathbf{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$.
2. Soient maintenant deux réels tels que $1 \leqslant p < q$. Montrer que si $X \in L^q$, alors $X \in L^p$ et que $\mathbf{E}(X^p)^{1/p} \leqslant \mathbf{E}\left(X^q\right)^{1/q}$.
3. Soient $(\varepsilon_n)_{n\geqslant1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et p un réel $\geqslant 1$. Montrer que, si $X \in \operatorname{Vect}(\varepsilon_n)_{n\geqslant1}$, alors $\mathbf{E}(X^p)^{1/p} \leqslant C\sqrt{p}\mathbf{E}\left(X^2\right)^{1/2}$, où C est une constante absolue.

Exercice 78 *(Centrale - 2024)*

Une suite $(Z_n)_{n\geqslant1}$ de variables aléatoires entières est dite transiente si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{Z}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \in A) < +\infty$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}, (X_i)_{i\geqslant1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*, X_i \sim \mathscr{P}\left(\dfrac{\alpha}{i}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$? La suite $(Y_n)_{n\geqslant1}$ est-elle transiente ?
2. Soient $p \in]0, 1[$ et $(R_i)_{i\geqslant1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_i = 1) = p, \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. La suite $(S_n)_{n\geqslant1}$ est-elle transiente ?

Exercice 79 *(Centrale - 2021)*

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $V = \min\{X, Y\}$ et $W = X - Y$.
   Donner la loi de (V, W). En déduire les lois de V et de W. Montrer que V et W sont indépendantes.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi. $W = X - Y$ on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) \neq 0$, et que les variables $V = \min\{X, Y\}$ et $W = X - Y$ sont indépendantes. Montrer que X et Y sont des variables géométriques.

Exercice 80 *(Centrale - 2021)*

1. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que, pour tous $n, \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.
   Montrer que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant1}$ converge vers le réel $L = \inf\left\{u_k/k, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et, pour n dans $\mathbb{N}^*, S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit a un réel strictement positif tel que $\mathbb{P}(X_1 \geqslant a) > 0$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geqslant na))\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.