Algèbre et géométrie

Exercice 1 *(Centrale MP 2019)*

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} |t| P(t) Q(t) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Programmer une fonction phi (P, Q) renvoyant $\varphi(P, Q)$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite orthonormale $(P_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, pour tout n, P_n soit de degré n à coefficient dominant positif.

d) Programmer une fonction retournant P_n. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Tracer les graphes des fonctions polynomiales associées sur $[-1, 1]$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont dans $]-1, 1[$.

f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n séparent celles de P_{n+1}.

Exercice 2 *(Centrale MP 2018)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $x^2 - py^2 = 1$ d'inconnues x, y dans $\mathbb{N}$.

a) Écrire une fonction prenant en argument un entier n et renvoyant un booléen indiquant si n est premier ou non (la fonction pourra être rudimentaire).

b) Donner la liste de tous les entiers p premiers dans $[\![3;1000]\!]$ tels que $p-2$ soit un carré parfait.

c) Écrire une fonction `solutions` prenant en argument p et n et renvoyant les n plus petites solutions de E_p (dans l'ordre lexicographique). Donner les 10 premières solutions de E_3. Pour chaque entier p trouvé en b), donner les trois premières solutions de (E_p).

d) On fixe $p = 3$. On note $z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où (x_n, y_n) est la n-ième solution de (E_3).

  i) Déterminer $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $z_1 = Mz_0$ et $z_2 = Mz_1$.

  ii) À l'aide de Python calculer les premiers termes de Mz_n. Conjecture?

  iii) En admettant cette conjecture, déterminer z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Montrer que si p est premier et $p-2$ un carré parfait, il existe (x, y) solution de (E_p) telle que $x = p-1$. Montrer qu'il s'agit de la première solution après $(1, 0)$.

Exercice 3 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Soit Φ_P l'application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans lui-même qui à T associe le reste de la division euclidienne de TP' par P.

a) Montrer que Φ_P est linéaire.

b) Écrire une fonction Python qui donne la matrice de Φ_P dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$., puis une fonction Python qui renvoie $\det(\Phi_P)$.

c) On suppose que P admet n racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Exprimer $\det \Phi_P$ en fonction des $P'(\lambda_i)$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_P soit inversible.

Exercice 4 *(Centrale MP 2018)*

Une matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est dite strictement stochaqtique si tous les m_{ij} sont strictement positifs et si, pour $i = 1, \ldots, n$, $m_{i1} + \ldots + m_{in} = 1$.

a)

  i) Écrire une fonction `stocha(n)` qui renvoie une matrice strictement stochastique aléatoire de taille n. On fixe `B=stocha(3)`.

  ii) Trouver x et y de coordonnées strictement positives tels que $Bx = x$ et ${}^tBy = y$.

  iii) On pose $L = \dfrac{x\,{}^ty}{{}^txy}$. Observer que (B^k) converge vers L.

b) Une particule se déplace aléatoirement sur d points numérotés de 1 à d. À l'instant n, la particule reste là où elle se trouve avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et se déplace sur l'un des autres points de façon uniformé. On note X_n la variable aléatoire qui donne la position à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = d) \end{pmatrix}$.

  i) Montrer qu'il existe une matrice strictement stochastique Q telle que $P_1 = QP_0$ et l'expliciter.

  ii) En déduire P_n en fonction de n, Q et P_0.

  iii) Montrer (sans calcul) que Q est diagonalisable. Exprimer ses éléments propres.

  iv) Déterminer la limite de (P_n).

Exercice 5 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

Pour i et n dans $\mathbb{N}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$P_{n,i} = (1-X)^i(1+X)^{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \beta_{n,i,j} X^j \text{ et } M_n = \left(\beta_{n,i,j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

a) Écrire une fonction Python qui calcule $P_{n,i}$. Écrire une fonction Python qui calculer M_n. Calculer M_n^2 pour différentes valeurs de n. Que peut-on conjecturer?

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $U_n(x_0) = {}^t(1, x_0, \dots, x_0^n)$. Montrer que $M_n U_n(x_0) = (1+x_0)^n U_n(y_0)$ où $y_0 = \dfrac{1-x_0}{1+x_0}$. En déduire que $M_n^2 = 2^n I_{n+1}$. Peut-on conclure que M_n est diagonalisable?

c) Pour $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on définit la matrice de Vandermonde $V_n(x) = \left(x_i^j\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. On pose $x_i = i$ et $y_i = \dfrac{1-i}{1+i}$ pour $i \in [\![0;n]\!]$. Montrer que

$$\det(V_n(y)) = \frac{(-2)^{n(n+1)/2}}{(n+1)!^n} \det V_n(x).$$

d) En déduire que $\det M_n = (-2)^{n(n+1)/2}$. Que dire des valeurs propres de M_n?

Exercice 6 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

On considère $n \geqslant 2$ joueurs numérotés de 1 à n participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible. On définit la matrice $A = (a_{ij})$ de la manière suivante : $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si i a gagné contre j et $a_{i,j} = -1$ sinon.

a) Écrire une fonction renvoyant une matrice de tournoi aléatoire.

b) Calculer les déterminants de telles matrices pour des entiers n pairs et impairs. Qu'observe-t-on?

c) Démontrer le résultat pour les entiers impairs.

d) On note J_n la matrice de taille n constituée de 1.

i) Calculer $\det(J_n - I_n)$.

ii) Soient M et N deux matrices à coefficients entiers telles que $M - N$ ait tous ses coefficients pairs. Démontrer que $\det M$ et $\det N$ ont même parité.

iii) Démontrer la propriété conjecturée pour les entiers pairs.

Exercice 7 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On cherche à établir l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A \Omega$ ait sa diagonale constante.

a) Démontrer le résultat pour $n = 2$ et expliciter, en fonction de A une matrice $\Omega \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A \Omega$ a sa diagonale constante.

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner à l'aide de Python, B orthogonalement semblable à A de diagonale constante.

c) Soit $\Gamma = \{{}^t\Omega A \Omega, \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que Γ est compact.

d) Soit $f : M \in \Gamma \mapsto \sup\limits_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} |M_{i,i} - M_{j,j}|$. Montrer que f présente un minimum.

e) En déduire le résultat annoncé.

Exercice 8 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (X-k)$ et $R_n = \dfrac{P_n'}{P_n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{X-k}$.

a) Écrire une fonction qui calcule $R_n(x)$. Écrire une fonction qui trace $x \mapsto R_n(x)$ pour $x \in [-4, 8]$ (et des ordonnées dans $[-5, 5]$).

b) i) Pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, montrer que R_n admet un unique zéro dans $]k, k+1[$. On le note $a_{n,k}$.

ii) Écrire une fonction qui donne une approximation numérique de $a_{n,k}$.

iii) On fixe $k \in \mathbb{N}$. Étudier expérimentalement le comportement de $(a_{n,k})_{n\geqslant k}$.

c) L'entier k étant fixé, étudier la convergence de $(a_{n,k})_{n\geqslant k}$. On pourra comparer R_n et R_{n-1}.

d) Trouver la limite puis un équivalent de $\dfrac{1}{a_{n,k} - k}$. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $a_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

Soit (F_n) définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ si $n \in \mathbb{N}$. On admet, lorsque $M \in S_n(\mathbb{R})$ l'équivalence entre

- $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$,
- pour tout $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ non nul, ${}^tXMX > 0$.

Pour $n \geqslant 2$, on définit $A_n = (F_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Écrire une fonction Python qui prend n en argument en renvoie A_n sous forme d'un tableau numpy.

b) Écrire une fonction Python qui détermine les valeurs propres de A_n.

c) Quel est l'ordre de 0 comme valeur propre de A_n ?

d) Montrer que A_n admet deux valeurs propres telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.

e) Étudier le comportement des suites (α_n) et (β_n).

Exercice 10 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

On appellera fonction multiplicative toute application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \wedge n = 1$, $f(mn) = f(m)f(n)$.

a) Programmer une fonction Python `pgcd` qui retourne le pgcd de deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$.

b) On définit des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \mathrm{card}\left\{x \in [\![1\,;n]\!], x \wedge n = 1\right\}, \tau(n) = \mathrm{card}\left\{x \in [\![1\,;n]\!], x \text{ divise } n\right\}, \sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

et

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Montrer que ces quatre fonctions sont multiplicatives.

c) Programmer en Python ces fonctions.

d) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives non nulles. Pour $f, g \in \mathcal{M}$, on définit $f * g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. On admet que $\mathcal{M}$ est un groupe abélien. Soit $e : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $e(n) = \delta_{n1}$ et $\mathbf{1} : n \mapsto 1$. Montrer que e est l'élément neutre de $\mathcal{M}$ et que $\mathbf{1} * \mu = e$.

e) Soit $H \in \mathcal{M}$. On définit $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par $h(n) = \sum_{d|n} H(d)$. Montrer que $H = \mu * h$. Expliciter cette relation lorsque $H = \varphi$.

f) Soit $f \in \mathcal{M}$, $F = \mu * f$ et $M = \left(f(i \wedge j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$. On pose D la matrice diagonale de diagonale $(F(1), \dots, F(n))$ et $A = \left(1_{i|j}\right)$. Calculer ${}^tADA$ et en déduire $\det M$. Calculer $\det M$ pour $f = \mathrm{Id}$, $f = \sigma$ et $f = \tau$.

Analyse

Exercice 11 *(Centrale MP 2019 - Python)*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\sin t)\mathrm{d}t$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{x}\sin t)\mathrm{d}t$

a) Tracer le graphe de φ sur $[-3,5]$ et sur $[-1000,0]$.

b) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n}\mathrm{d}t$. Trouver une relation de récurrence entre les K_n. Exprimer K_n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que φ est somme d'une série entière, que l'on précisera.

e) Montrer que φ est positive sur $[-1,+\infty[$, croissante sur $[-2,+\infty[$, convexe sur $[-3,+\infty[$.

Exercice 12 *(Centrale MP 2019 - Python)*

On définit deux suites en posant : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{7-y_n}$, $y_{n+1} = \sqrt{7+y_n}$.

a) Montrer que les suites $(x_n)_n$ et $\left(y_n\right)$ sont bien définies.

b) Calculer avec Python les 20 premiers termes de ces suites et conjecturer leur limite.

c) On suppose que (x_n) et $\left(y_n\right)$ convergent; calculer leur limite.

d) On pose $K = [0,\sqrt{7}] \times [0,\sqrt{7+\sqrt{7}}]$, et on définit $f : \begin{cases} K & \to K \\ (x,y) & \mapsto (\sqrt{7-y}, \sqrt{7+x}) \end{cases}$. Montrer que φ est k-lipschitzienne, avec $k<1$, pour la norme $\|\cdot\|_1$.

e) Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, |l_x - x_n| \leqslant 10^{-3}$ et $\left|l_y - y_n\right| \leqslant 10^{-3}$. Vérifier à l'aide de Python.

f) Montrer que les suites ne sont pas monotones.

Exercice 13 *(Centrale MP 2018 - Python)*

Pout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k+x}$, $h_1(x) = \frac{\pi}{\tan(\pi x)}$ et $h_2(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$. On définit l'équation focntionnelle $(*)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

a) i) Écrire une fonction `S(x,n)` qui calcule $S_n(x)$. La tester avec $S_{10}(0,7)$.

ii) Afficher sur une même figure les graphes sur $]0,1[$ de h_1 et S_n pour $n \in \{10,20,30,40,50\}$. Conjecture?

iii) Afficher sur une même figure les graphes sur $]0,1[$ de h_1 et $x \mapsto h_1(x/2) + h_1((x+1)/2)$.

iv) Étudier graphiquement $h_1 - S_n$ au voisinage de 0. Que peut-on en déduire?

b) Montrer que h_1 et h_2 sont bien définies, impaires, de période 1 et continues sur $]0,1[$.

c) Montrer que h_1 est solution de $(*)$.

d) Montrer que $h_2 - h_1$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer que $h_1 = h_2$ sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

f) Montrer que $\frac{\pi x}{\tan(\pi x)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2-n^2}$.

g) En déduire que $\frac{\pi x}{\tan(\pi x)} = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k)x^{2k}$ avec $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

h) Donner une valeur approchée de $\zeta(2k)$ pour $k \in [\![1;5]\!]$.

Exercice 14 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

a) Montrer que Q_n possède une unique racine strictement positive x_n.

b) Écrire un programme prenant n en paramètre et calculant une valeur approchée de x_n. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de x_n?

c) Prouver que (x_n) converge et déterminer sa limite.

d) Montrer que $2^n(2-x_n)$ tend vers 1.

e) Poursuivre le développement asymptotique de x_n.

Exercice 15 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

On définit des suites par $x_0 = y_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}$ et $y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$.

a) Montrer que ces suites sont bien définies.

b) Calculer les 10 premiers termes de ces suites. Conjecturer leur comportement.

c) Déterminer les limites possibles.

d) Montrer la convergence des suites.

e) Montrer que (x_n) et (y_n) ne peuvent être monotones, même à partir d'un certain rang. Donner un rang n_0 à partir duquel les limites sont approchées à 10^{-3} près.

Exercice 16 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Soient $a > b > 0$ et (γ) l'arc paramétré : $(x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t)$ avec $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Tracer (γ) avec 100 points avec une même échelle en x et y.

b) Définir une fonction $L(a,b)$ calculant $L(a,b) = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\mu^2\sin^2 t}\,dt$ avec $c = \sqrt{a^2-b^2}$ et $\mu = c/a$.

c) On pose $\alpha_k = \dfrac{1}{(2k-1)4^k}\dbinom{2k}{k}$. Écrire une fonction calculant α_k et représenter $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant 10}$.

d) On définit $g : x \in]-\infty, 1] \mapsto \sqrt{1-x}$.

i) Montrer que, pour tout $x < 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(x) = -k!\alpha_k(1-x)^{-k+1/2}$.

ii) Montrer que $g(x) + \sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k = -(n+1)\alpha_{n+1}\int_0^x\left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n\dfrac{dt}{\sqrt{1-t}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$.

iii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1[$, $\left|g(x) + \sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k\right| \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 17 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

On considère $a \in \mathbb{R}$ et x_a une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant $x_a(0) = a$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_a'(t) = \cos t + \cos(x_a(t))$.

a) Utiliser la méthode d'Euler pour tracer le graphe de x_a sur $[0, T]$ pour différentes valeurs de a et de T.

b) Si x$\in \mathscr{C}^0([0,T],\mathbb{R}) = E$, on pose $\phi(x) : t \mapsto a + \sin t + \int_0^t \cos(x(s))\,ds$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x, y \in E, t \in [0,T], \left[\phi^n(x)(t) - \phi^n(y)(t)\right| \leqslant \frac{t^n}{n!}\|x-y\|_\infty.$$

c) Avec les notations précédentes, soit $x \in E$, montrer que $(\phi^n(x))$ converge uniformément vers un élément z de E et que z vérifie les propriétés de x_a.

Exercice 18 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n+x}$.

a) i) Donner une relation entre a_n et a_{n+1}.

ii) Écrire une fonction `seqa(n)` qui renvoie la liste des $(n+1)$ premières valeurs de (a_k).

iii) Écrire une fonction `somp(n,x)` qui renvoie la somme partielle $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{k+x}$.

iv) Tracer le graphe de S_{100} sur $[-4,001; 4,001]$ en limitant la fenêtre des ordonnées à $[-5,5]$.

b) Montrer que S est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

c) i) Montrer que, pour tout $t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

ii) En déduire que $S(x) = \int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{\sqrt{1-t}}\,dt$ pour tout $x > 0$.

d) Donner un équivalent de S en 0 et $+\infty$.

Exercice 19 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On notera $B_0 = 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

b) Écrire une fonction `Bell(n)` donnant $(B_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

c) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

d) Soit $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f. Donner une expression de B_n.

Exercice 20 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

a) Tracer les représentations graphiques de P_n sur $[-2, 2]$ pour $n \in [\![0;5]\!]$.

b) Étudier le signe et les variations de P_n.

c) Montrer que P_n présente un minimum a_n atteint en un seul point.

d) Étudier la suite a_n.

Exercice 21 *(Centrale MP 2017 - Python*)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres de A. On cherche à démontrer que, si la série $\sum \frac{\operatorname{tr}(A^k)}{k}$ converge, alors $\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tr}(A^k)}{k}\right) = \frac{1}{\det(I_n - A)}$.

a) Écrire une fonction renvoyant $\sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{tr}(A^k)}{k}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et A donnés.

b) On suppose que $\rho(A) \leqslant 1$ et que 1 n'est pas valeur propre de A. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tr}(A^k)}{k} = -\int_0^1 \frac{P_A'(t)}{P_A(t)}\, dt,$$

lorsque $P_A(X) = X^n \chi_A(1/X)$.

c) On suppose que $\sum \frac{\operatorname{tr}(A^k)}{k}$ converge. Montrer que $\rho(A) \leqslant 1$ et que 1 n'est pas valeur propre de A. En déduire le résultat cherché.

Exercice 22 *(Centrale MP 2017 - Python*)*

Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit l'applciation T sur E par

$$T(f) : x \mapsto 1 - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$

a) Écrire une fonction qui pour $(f, x) \in E \times \mathbb{R}$ renvoie $T(f)(x)$.

b) Vérifier que $T - 1 \in \mathscr{L}(E)$ et que l'image de T est contenue dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c) Tracer les graphes des fonctions cosinus et $T(\cos)$. Que conjecturer ?

d) Déterminer toutes les fonctions de E qui vérifient $T(f) = f$

e) On définit la suite de fonctions (f_n) par $f_0 \in E$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = T^n(f_0) = T(f_{n-1})$. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Justifier que la série de fonctions $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur les segments de $\mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction à préciser.

Probas

Exercice 23 *(Centrale MP 2018 - Python)*

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

a) Coder une fonction `aleat(n,N)` qui renvoie une liste de N réalisations de M_n.

b) Espérance et variance de M_n ?

c) Quelles sont les valeurs prises par M_n ? on les notes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$.

d) Après avoir estimé $p_k = \mathbb{P}\left(|M_n| \geqslant \varepsilon_k\right)$ avec `aleat`, tracer une courbe reliant les points (ε_k, p_k).

e) On fixe deux réels strictement positifs ε et λ. Montrer que $\mathbb{P}\left(|M_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathbb{E}\Big(\exp(\lambda M_n) e^{-\lambda\varepsilon}\Big)$.

f) Calculer $\mathbb{E}\big(\exp(\lambda M_n)\big)$.

g) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \leqslant \exp(x^2/2)$.

h) En déduire que $\mathbb{P}\left(|M_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.

i) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 24 *(Centrale MP 2018 - Python)*

Un rat est dans une cage avec 3 portes. :

- une porte mène à l'air libre en t_1 secondes,
- une porte mène dans un tunnel qui le reconduit à la cage en t_2 secondes,
- une porte mène dans un tunnel qui le reconduit à la cage en t_3 secondes.

On s'intéresse au temps que prend le rat pour sortir de la cage. Dans chacun des trois cas suivants, simuler numériquement l'expérience en Python et estimer la durée moyenne de la sortie puis, à l'aide d'une modélisation mathématique, calculer l'espérance du temps de sortie :

a) le rat ne reprend jamais une porte qu'il a déjà prise,

b) le rat ne reprend jamais deux fois de suite une porte,

c) le rat n'a aucune mémoire

Exercice 25 *(Centrale MP 2016 - Python)*

On s'intéresse à un examen passé par N candidats qui ont chacun une probabilité $p \in]0,1[$ de réussir l'examen à chaque passage. Les candidats passent l'examen jusqu'à ce qu'ils réussissent. Les passages des candidats sont mutuellement indépendants. On note X_k pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ le nombre de passages nécessaires au candidat k pour réussir l'examen. On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$ et $Y = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$.

a) Déterminer expérimentalement les espérances des variables X et Y. On prendra par exemple $N = 3$ et $p = 1/3$.

b) Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

c) Donner la loi de X, son espérance et sa variance (on pourra utiliser des fonctions génératrices).

d) Donner la probabilité $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$. En déduire la loi de Y.

Exercice 26 *(Centrale MP 2016 - Python)*

Aux cinq sommets d'un pentagone sont postés des joueurs de discoplane (le terme officiel français pour frisbee). Au début du jeu, deux des joueurs voisins immédiats ont entre les mains un discoplane. Ils envoient le discoplane à gauche ou à droite et ainsi de suite. Le jeu s'arrête lorsque deux discoplanes sont entre les mains d'un même joueur. On note T la variable aléatoire qui numérote l'étape à laquelle le jeu s'arrête.

a) Estimer numériquement $\mathbb{E}(T)$.

b) Soit $n \geqslant 1$. On note a_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de voisins immédiats à l'étape n et b_n celle que les deux discoplanes soient entre les mains de joueurs différents et non voisins immédiats. On pose $A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ et $B(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)\, z^n$ à l'aide de $A(z)$ et $B(z)$.

c) Conclure. Généraliser au polygone à $2p + 1$ cotés.

Exercice 27 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Soit h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = -x\ln x$ si $x > 0$ et $h(0) = 0$. Soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'entropie de X par $H(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} h(\mathbb{P}(X = x))$ (si la famille est sommable).

a) i) Écrire une fonction `entropie(p)` qui renvoie le couple (e,d) avec $e = H(X)$ et $d = e - \ln n$ où n est le nombre de valeurs prises par X et p est la liste des probabilités correspondantes.

ii) Écrire une fonction `loibin(n,p)` et `loiuni(N)` qui renvoie respectivement la liste des probabilités d'une variable aléatoire suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $U(\{0,\ldots,N\})$.

iii) Calculer $H(X)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15,2/5)$ puis lorsque $X \hookrightarrow U(\{0,\ldots,15\})$.

iv) Montrer que tout variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs admet une entropie avec $0 \leqslant H(x) \leqslant \ln n$.

v) Caractériser les cas d'égalité.

b) On considère une urne avec une boule noire et une boule rouge. On tire une boule. Si elle est rouge, on s'arrête ; sinon on la remet dans l'urne avec une autre boule noire et l'on recommence. On note X le nombre de tirages, avec $X = 0$ si l'on n'obtient jamais de boule rouge. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une entropie ?

c) Pour $n \geqslant 2$, on pose $\mathbb{P}(X = n) = \ln 2\left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$. Montrer que l'on définit bien une loi. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une entropie ?

Exercice 28 *(Centrale MP 2015 - Python)*

a) i) Écrire une fonction $S(n,p)$ qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$ où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

ii) En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k,S_k), puis les points $\left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$ et enfin les $\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

b) i) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$. Montrer que $\exp(tx) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$.

ii) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\big(\exp(tX)\big) \leqslant \operatorname{ch} t \leqslant \exp(t^2/2)$.

c) i) Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telle que, pour tout i, $|X_i| \leqslant a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $\mathbb{E}\big(\exp(tS_n)\big) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

iii) En choisissant une bonne valeur de t, montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$.

iv) Commenter le résultat observé à la première question.

Exercice 29 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement il se trouve en case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ième étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ qui donne la position du pion à l'instant n, $f_i = \mathbb{P}(Y_1 = i)$ et $u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$.

a) On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

  i) Écrire une fonction qui prend un paramètre entier k et qui renvoie 1 si le pion atteint la case k et 0 sinon.

  ii) Écrire une fonction qui, sur une trentaine d'essais, renvoie la proportion de fois où le pion atteint la case k. Comparer à $1/\mathbb{E}(Y_1)$.

b) On note E_k l'événement « le pion atteint la case k », et $u_k = \mathbb{P}\left(E_k\right)$.

  i) Décrire l'événement E_k à l'aide des variables aléatoires S_n.

  ii) Calculer $\mathbb{P}\left(E_k \cap \{Y_1 = j\}\right)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

  iii) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j$.

  iv) Justifier la définition de $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ et montrer que $f(t) = \dfrac{1}{1-u(t)}$.

  v) Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et en déduire les u_k.

  vi) On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tels que $\mathbb{P}(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $1/\mathbb{E}(Y_1)$.

Exercice 30 *(Centrale MP 2017 - Python)*

On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires entre 1 et n soient premiers entre eux. On veut montrer que la limite de $r_n = \dfrac{6}{\pi^2}$. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. On définit une fonction μ par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

a) À l'aide de Python, vérifier la conjecture sur la limite de (r_n).

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \{(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2, a \wedge b = 1\}$, on note $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $U_=\{(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2, p_i | a$ et $p_i | b\}$. Exprimer A_n en fonction des U_i.

c) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de multiple de ℓ inférieurs ou égaux à n.

d) En déduire le cardinal de $\bigcap_{i \in I} U_i$ où I est une partie non vide de $[\![1\,;k]\!]$.

e) Montrer que $\operatorname{card}(A_n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \dfrac{n}{d} \right\rfloor^2$.

f) Conclure.