

Algèbre et géométrie

Exercice 1 (Centrale MP 2024 - Python)

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. On écrit $H_n = \frac{A_n}{B_n}$ et $S_n = \frac{C_n}{D_n}$ sous forme irréductible.

- Calculer A_n, B_n, C_n, D_n pour n variant de 1 à 30.
- Calculer le reste de la division euclidienne de A_{n-1} par n^2 pour n variant de 1 à 100. Que conjecturer?
- Calculer le reste de la division euclidienne de C_{n-1} par n pour n variant de 1 à 100. Que conjecturer?
- Calculer le reste de la division euclidienne de $\binom{2n-1}{n-1}$ par n^3 pour n variant de 1 à 100. Que conjecturer? Fixons désormais un nombre premier $p \geq 5$.
- Démontrer que, pour k entier dans $\llbracket 1; p-1 \rrbracket$, $k^2 \equiv 1[p]$ si et seulement si k vaut 1 ou $p-1$.
- En déduire que $(p-1)! \equiv -1[p]$.
- Démontrer que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} k^2$.

Exercice 2 (Centrale MP 2024 - Python*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note $B_{k,n} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

- Établir une relation de récurrence entre $B_{k,n}, B_{k-1,n-1}$ et $B_{k,n-1}$.
- Donner un code récursif qui prend en argument n et renvoie la liste des $B_{k,n}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- Calculer $\int_0^1 B_{k,n}(t) dt$ pour tous k et n .
- Montrer que l'application T_n de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à f associe

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(X)$$

est surjective.

Exercice 3 (Centrale MP 2024 - Python*)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P'(X) - nXP(X)$.

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Écrire une fonction `matrice(n, a, b)` qui renvoie la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire une fonction `propres(n, a, b)` qui renvoie les valeurs propres et les vecteurs propres de M .
- Déterminer les éléments propres de f pour $n=2, a=1, b=0$ et $n=2, a=2, b=1$.
- La matrice M est-elle diagonalisable?

Exercice 4 (Centrale MP 2024 - Python*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et $\widehat{H}_n = \mathcal{M}_n([-1, 1])$, ainsi que $M_n = \max \det(H_n)$ et $\widehat{M}_n = \max \det(\widehat{H}_n)$.

- Justifier l'existence de M_n et $\widehat{M}_n$.
- Écrire une fonction Python `MaxiDetAlea(n)` calculant le déterminant maximal de 10000 matrices aléatoires de H_n et qui renvoie le maximum trouvé ainsi qu'une matrice en laquelle il est atteint.
 - Procéder de même avec $\widehat{H}_n$.
- Les instructions suivantes renvoient un itérateur L parcourant tous les N -uplets d'éléments de $\{-1, 1\}$:


```
from itertools import product
L=product([-1,1], repeat=N)
```

 Écrire une fonction calculant M_n .
 Soit $A \in H_n$. On pose $B = A^T A$.
- Montrer que B est diagonalisable à valeurs propres positives, puis que $\det(B) \leq \left(\frac{\text{tr}(B)}{n}\right)^n$.
 - Montrer que $\det(A) \leq n^{n/2}$.
- Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} A$ est orthogonale si et seulement si $|\det(A)| = n^{n/2}$.

Exercice 5 (Centrale MP 2022 - Python*)

Dans cet exercice, on note $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{P}_n$) l'ensemble des nombres premiers (respectivement, des nombres premiers inférieurs ou égaux à n). Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers.

- Écrire une fonction PYTHON `premiers(n)` renvoyant une liste de taille $n+1$ telle que `premier(n)[k]=1` si k est premier et 0 sinon.
 - Afficher les fonctions $n \mapsto \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{\ln p}{p}$, $n \mapsto \ln(n) - \ln(4) - 1$ et $n \mapsto \ln(n) + \ln(4)$. Formuler une conjecture.
- On fixe dans cette question un nombre premier p et un entier $n \geq 1$.
 - Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Card} \{m \in \llbracket 1; n \rrbracket, v_p(m) = k\} = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor.$$

- En déduire que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
 - Montrer l'encadrement $\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}$.
 - En déduire un encadrement de $\ln(n!)$.
- À l'aide d'une série entière, démontrer la convergence et calculer la somme $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k}$.
 - Montrer que $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p(p+1)} < +\infty$.
 - Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $\theta_n \in [0, 1]$ tel que $\ln(n!) = n \ln(n) - n + 1 + \theta_n \ln(n)$.
 - Montrer que $\prod_{p \in \mathcal{P}_n} p \leq 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et conclure quant à la conjecture de la question a) ii).

Exercice 6 (Centrale MP 2021 - Python*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et l'on note $H_n = \frac{A_n}{B_n}$, avec $A_n \wedge B_n = 1$.

On souhaite étudier la propriété ($\mathcal{P}$) : « pour tout p premier, on a $p^2 \mid A_{p-1}$. »

- Écrire une fonction `pgcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers.
 - Déterminer, en fonction d'un pgcd et de A_{k-1}, B_{k-1} , les expressions de A_k et B_k .
 - Écrire une fonction qui calcule A_n pour un n donné. Calculer A_{16} .
 - Vérifier la propriété $\mathcal{P}$ jusqu'à 500.
On pourra utiliser `sympy.primerange` ou `sympy.nextprime`.
- Montrer le théorème de Wilson : p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$. On considère désormais un nombre premier $p \geq 5$.
- Pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on pose $a_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$. Exprimer $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ en fonction de H_{p-1} . En déduire que p divise A_{p-1} .
- Montrer que $k^2 a_k \equiv 1[p]$ pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. En déduire que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ et conclure.

Exercice 7 (Centrale MP 2021 - Python)

On munit $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $H_X = I_n - \frac{2}{\|X\|^2} X X^T$ si $X \neq 0$ et $H_0 = I_n$.

- Coder une fonction `H` qui calcule H_X .
 - Pour $X = (1, 1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^4$, calculer $H_X H_X^T$ et déterminer le spectre de H_X .
 - Pour $X \neq 0$, montrer que H_X est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $X^\perp$.
- Soient Y et Z dans $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $H_X Y = Z$. *Indication* : faire un dessin!
 - Coder une fonction qui donne $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $H_X Y = \|Y\| E_1$, où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}^T$.
- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note C_1 sa première colonne et $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $H_X C_1 = \|C_1\| E_1$. Expliciter au maximum $H_X A$.
- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $A = QT$. Cette décomposition est-elle unique?
- Donner un algorithme permettant d'obtenir une telle décomposition QR .

Exercice 8 (Centrale MP 2019 - Python*)

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 |t| P(t) Q(t) dt$.

- Montrer que φ est un produit scalaire.
- Programmer une fonction `phi(P, Q)` renvoyant $\varphi(P, Q)$.
- Montrer qu'il existe une unique suite orthonormale $(P_n)_{n \geq 0}$ telle que, pour tout n , P_n soit de degré n à coefficient dominant positif.
- Programmer une fonction retournant P_n . Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 . Tracer les graphes des fonctions polynomiales associées sur $[-1, 1]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont dans $] -1, 1[$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n séparent celles de P_{n+1} .

Exercice 9 (Centrale MP 2018 - Python*)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $x^2 - py^2 = 1$ d'inconnues x, y dans $\mathbb{N}$.

- Écrire une fonction prenant en argument un entier n et renvoyant un booléen indiquant si n est premier ou non (la fonction pourra être rudimentaire).
- Donner la liste de tous les entiers p premiers dans $\llbracket 3; 1000 \rrbracket$ tels que $p - 2$ soit un carré parfait.
- Écrire une fonction `solutions` prenant en argument p et n et renvoyant les n plus petites solutions de E_p (dans l'ordre lexicographique). Donner les 10 premières solutions de E_3 . Pour chaque entier p trouvé en b), donner les trois premières solutions de (E_p) .
- On fixe $p = 3$. On note $z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où (x_n, y_n) est la n -ième solution de (E_3) .
 - Déterminer $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $z_1 = Mz_0$ et $z_2 = Mz_1$.
 - À l'aide de Python calculer les premiers termes de Mz_n . Conjecture?
 - En admettant cette conjecture, déterminer z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que si p est premier et $p - 2$ un carré parfait, il existe (x, y) solution de (E_p) telle que $x = p - 1$. Montrer qu'il s'agit de la première solution après $(1, 0)$.

Exercice 10 (Centrale MP 2016 - Python*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Soit Φ_P l'application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans lui-même qui à T associe le reste de la division euclidienne de TP' par P .

- Montrer que Φ_P est linéaire.
- Écrire une fonction Python qui donne la matrice de Φ_P dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, puis une fonction Python qui renvoie $\det(\Phi_P)$.
- On suppose que P admet n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Exprimer $\det \Phi_P$ en fonction des $P'(\lambda_i)$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_P soit inversible.

Exercice 11 (Centrale MP 2016 - Python*)

Pour i et n dans $\mathbb{N}$ avec $0 \leq i \leq n$, on pose

$$P_{n,i} = (1 - X)^i (1 + X)^{n-i} = \sum_{j=0}^n \beta_{n,i,j} X^j \text{ et } M_n = (\beta_{n,i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

- Écrire une fonction Python qui calcule $P_{n,i}$. Écrire une fonction Python qui calcule M_n . Calculer M_n^2 pour différentes valeurs de n . Que peut-on conjecturer?
- Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $U_n(x_0) = {}^t(1, x_0, \dots, x_0^n)$. Montrer que $M_n U_n(x_0) = (1 + x_0)^n U_n(y_0)$ où $y_0 = \frac{1 - x_0}{1 + x_0}$. En déduire que $M_n^2 = 2^n I_{n+1}$. Peut-on conclure que M_n est diagonalisable?
- Pour $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on définit la matrice de Vandermonde $V_n(x) = (x_i^j)_{0 \leq i,j \leq n}$. On pose $x_i = i$ et $y_i = \frac{1-i}{1+i}$ pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que

$$\det(V_n(y)) = \frac{(-2)^{n(n+1)/2}}{(n+1)!^n} \det V_n(x).$$

- En déduire que $\det M_n = (-2)^{n(n+1)/2}$. Que dire des valeurs propres de M_n ?

Exercice 12 (Centrale MP 2015 - Python*)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On cherche à établir l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A \Omega$ ait sa diagonale constante.

- Démontrer le résultat pour $n = 2$ et expliciter, en fonction de A une matrice $\Omega \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A \Omega$ a sa diagonale constante.
- On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner à l'aide de Python, B orthogonalement semblable à A de diagonale constante.
- Soit $\Gamma = \{{}^t\Omega A \Omega, \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que Γ est compact.
- Soit $f : M \in \Gamma \mapsto \sup_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} |M_{i,i} - M_{j,j}|$. Montrer que f présente un minimum.
- En déduire le résultat annoncé.

Exercice 13 (Centrale MP 2015 - Python*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$ et $R_n = \frac{P'_n}{P_n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{X - k}$.

- Écrire une fonction qui calcule $R_n(x)$. Écrire une fonction qui trace $x \mapsto R_n(x)$ pour $x \in [-4, 8]$ (et des ordonnées dans $[-5, 5]$).
- Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, montrer que R_n admet un unique zéro dans $]k, k+1[$. On le note $a_{n,k}$.
 - Écrire une fonction qui donne une approximation numérique de $a_{n,k}$.
 - On fixe $k \in \mathbb{N}$. Étudier expérimentalement le comportement de $(a_{n,k})_{n \geq k}$.
- L'entier k étant fixé, étudier la convergence de $(a_{n,k})_{n \geq k}$. On pourra comparer R_n et R_{n-1} .
- Trouver la limite puis un équivalent de $\frac{1}{a_{n,k} - k}$. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $a_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (Centrale MP 2016 - Python*)

On appellera fonction multiplicative toute application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \wedge n = 1$, $f(mn) = f(m)f(n)$.

- Programmer une fonction Python pgcd qui retourne le pgcd de deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$.
- On définit des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \text{card} \{x \in \llbracket 1; n \rrbracket, x \wedge n = 1\}, \tau(n) = \text{card} \{x \in \llbracket 1; n \rrbracket, x \text{ divise } n\}, \sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

et

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Montrer que ces quatre fonctions sont multiplicatives.

- Programmer en Python ces fonctions.
- On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives non nulles. Pour $f, g \in \mathcal{M}$, on définit $f * g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. On admet que $\mathcal{M}$ est un groupe abélien. Soit $e : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $e(n) = \delta_{n1}$ et $\mathbf{1} : n \mapsto 1$. Montrer que e est l'élément neutre de $\mathcal{M}$ et que $\mathbf{1} * \mu = e$.
- Soit $H \in \mathcal{M}$. On définit $h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ par $h(n) = \sum_{d|n} H(d)$. Montrer que $H = \mu * h$. Expliciter cette relation lorsque $H = \varphi$.
- Soit $f \in \mathcal{M}$, $F = \mu * f$ et $M = (f(i \wedge j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. On pose D la matrice diagonale de diagonale $(F(1), \dots, F(n))$ et $A = (1_{i|j})$. Calculer tADA et en déduire $\det M$. Calculer $\det M$ pour $f = \text{Id}$, $f = \sigma$ et $f = \tau$.

Analyse

Exercice 15 (Centrale MP 2024 - Python)

On admet l'existence et unicité de la suite de polynômes (A_n) vérifiant $A_0 = 1, A'_{n+1} = A_n$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = A_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer A_1, A_2 et A_3 .
- Écrire une fonction Python $A(n)$ qui renvoie le polynôme A_n . À l'aide de Python, conjecturer le comportement asymptotique de la suite (a_n) .
 - à l'aide de Python, comparer $A_n(0)$ et $A_n(1)$ pour différentes valeurs de n . Conjecture? Comparer également $A_n(X)$ et $A_n(1-X)$ pour différentes valeurs de n . Conjecture?
 - Tracer sur un même graphe avec Python les courbes des fonctions

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda}{e^{-\lambda} - 1} \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n$$

pour $N \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ sur l'intervalle $[-3, 3]$. Conjecture?

- Démontrer la conjecture faite en b)ii). Dédurre que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$.
- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} - \sum_{k=2}^n a_k \left(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0) \right) + (-1)^n \int_0^1 A_n(t) f^{(n+1)}(t) dt.$$

- Montrer que $\forall x \in [0, 1], |A_n(x)| \leq 1$.
Ind. On pourra montrer que $|\hat{A}_{n+1}(x)| \leq 1/2$ où $\hat{A}_{n+1}(x) = \int_{1/2}^x A_n(t) dt$.
 - Montrer la conjecture faite en b) iii).
Ind. On utilisera la question **d**) avec $f : x \mapsto e^{-\lambda x}$.

Exercice 16 (Centrale MP 2024 - Python*)

- Résoudre l'équation $y' + y = e^x$.
- Tracer la courbe représentative de $p : x \mapsto xe^{-x}$ et trouver graphiquement les antécédents de e^{-1} .
- Montrer que p induit une bijection de $] -\infty, 1]$ sur un intervalle qu'on précisera. On note Φ sa réciproque.
- On pose, pour $N \in \mathbb{N}, S_N(x) = \sum_{n=1}^N n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$ et tracer la courbe de $x \mapsto S_8(p(x))$ sur l'intervalle $[0, 1/3]$. La tracer sur l'intervalle $[0, 1]$. Le choix $N = 8$ est-il raisonnable? Quelle conjecture peut-on émettre?
- Soient $\lambda > 0$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Résoudre : $(x' = \lambda x + y, y' = \lambda y)$ avec $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.
 - À l'aide de Φ , montrer que l'on peut écrire, pour t suffisamment grand, $y(t) = F(x(t))$ où F est une fonction indépendante de t .
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $f^{(m-1)}(0)$ où $f(t) = \frac{(e^t - 1)^m - (-1)^m}{m!}$.
 - Résoudre $xy' - y = 0$ sur $] -R, R[$.
 - Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k n^{n+k-1} x^{n+k}}{n! k!} \right)_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable pour $|x|$ assez petit. En sommant selon les paquets $I_m = \{(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, k + n = m\}$, justifier la conjecture faite précédemment.

Exercice 17 (Centrale MP 2022 - Python)

Pour des entiers naturels $a_0, \dots, a_n$, avec a_n non nul, on pose (fraction continue) :

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

- Écrire une fonction qui renvoie la fraction continue associée à $(a_0, \dots, a_n)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = [1, 2, \dots, 2]$ avec n copies de 2. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$ et écrire une fonction retournant le plus petit rang à partir duquel $|x_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-10}$.
- Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^*$, montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M(a_0) \cdots M(a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n]$.
- Écrire une fonction qui retourne (p_n, q_n) à partir de $(a_0, \dots, a_n)$.
- Montrer que (p_n, q_n) est un représentant irréductible du rationnel $[a_0, \dots, a_n]$.
- Soit x un réel strictement positif. On pose $y_0 = x$ et, tant que c'est possible, $a_n = \lfloor y_n \rfloor$, $x_n = [a_0, \dots, a_n]$ et $y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que x_{n+1} soit défini. Montrer successivement que $x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ et que $|x - x_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$.
 - Montrer que le procédé de construction s'interrompt si et seulement si x est rationnel.

Exercice 18 (Centrale MP 2021 - Python)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $U_n(f) = n \left(S_n(f) - \int_0^1 f \right)$ et $V_n(f) = (n+1)S_{n+1}(f) - nS_n(f)$.

- Étudier la convergence de la suite $(S_n(f))_{n \geq 1}$.
- Représenter $V_n(f)$ pour $1 \leq n \leq 20$ si f est la fonction racine carrée, puis si f est la fonction cube. Que peut-on conjecturer?
- On suppose f de classe C^1 . On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+x}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \text{ et } I_n(f) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) g_n(x) dx.$$

Montrer que $(I_n(f))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Exprimer $I_n(f)$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et $U_n(f)$. En déduire les limites de $(U_n(f))_{n \geq 1}$ et $(V_n(f))_{n \geq 1}$.

- On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi n!x)}{n^{3/2}}$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la suite $(U_n(f))_{n \geq 1}$.

Exercice 19 (Centrale MP 2022 - Python)

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. On pose $A = \{a_0, \dots, a_n\}$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\|P\|_A = \max\{|P(a_0)|, \dots, |P(a_n)|\}$. Soit $d_{A,n} = \inf\{\|X^n - P\|_A, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

- Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- En utilisant la fonction `fmin` du module `scipy.optimize` pour minimiser une fonction de deux variables, calculer $d_{\{0,1\},1}$ et $d_{\{0,1,2\},2}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $X^n - P = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{i \neq k} (X - a_i)$.
- Exprimer les b_i en fonction des a_i et des $P(a_i)$. Calculer $b_0 + \dots + b_n$.
- Montrer que, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\prod_{i \neq k} |a_k - a_i| \geq \frac{n!}{\binom{n}{k}}$.
- Montrer que $\|X^n - P\|_A \geq \frac{n!}{2^n}$.
- Calculer $d_{\{0, \dots, n\}, n}$.
- La norme $\|\cdot\|_A$ est-elle issue d'un produit scalaire?

Exercice 20 (Centrale MP 2021 - Python*)

On pose $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$.

- Coder une fonction qui calcule a_n et calculer pour de grandes valeurs $\frac{1}{n(a_n)^2}$. Émettre une conjecture et la démontrer.
- Tracer les points (n, a_n) pour $n < 100$ et la courbe $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ pour $x \in [0, 100]$ sur une même fenêtre. Émettre une conjecture et la démontrer.
On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^{2n}$.
- Donner le domaine de définition de f et étudier sa continuité.
- Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.
- Dériver $x \mapsto 1 + \sqrt{1-x^2}$ et exprimer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}$ à l'aide d'un logarithme.
- Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$.

Exercice 21 (Centrale MP 2022 - Python)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soient $f_n(t) = \frac{1}{t^4 + n^4}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n$.

- Justifier la définition de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Écrire une fonction PYTHON définissant f ; trouver $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tel que $t \mapsto t^m f(t)$ admette une limite finie non nulle en $+\infty$.
- Montrer que f est de classe C^1 . Étudier ses variations.
- Justifier la convergence de I_n et celle de $I = \int_0^{+\infty} f$.
- Montrer que $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I_1}{t^5}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\left| \int_0^a f - \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \right| \leq \frac{\zeta(2)}{a}$.

Exercice 22 (Centrale MP 2022 - Python)

- Soit r la solution positive de $x^2 + x - 1 = 0$. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour laquelle il existe t_0 tel que f soit strictement décroissante sur $] -\infty, t_0[$ et strictement croissante sur $] t_0, +\infty[$. On construit une suite (a_n, b_n) par la récurrence suivante : on fixe a_0, b_0 tels que $a_0 \leq t_0 \leq b_0$. Puis, lorsque (a_n, b_n) est construit, on pose $\lambda_n = a_n + r^2 b_n$ et $\mu_n = a_n + r b_n$. Si $f(\lambda_n) \geq f(\mu_n)$, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (\lambda_n, b_n)$, sinon $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, \mu_n)$. Écrire l'algorithme. Montrer que (a_n, b_n) tend vers (t_0, t_0) quand $n \rightarrow +\infty$.
- Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ minorée, dont la restriction à toute droite affine vérifie la condition de a). On fixe X_0 puis, pour tout n , on pose $U_n = \frac{\nabla F(X_n)}{\|\nabla F(X_n)\|}$ et $X_{n+1} = X_n + \lambda^* U_n$, où λ^* est tel que $F(X_n + \lambda U_n)$ soit minimal. Si $\nabla f(X_n) = 0$, on s'arrête. Programmer l'algorithme. Montrer que $(F(X_n))_{n \geq 0}$ converge. Est-ce que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge?

Exercice 23 (Centrale MP 2017 - Python*)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres de A . On cherche à démontrer que, si la série $\sum \frac{\text{tr}(A^k)}{k}$ converge, alors $\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k}\right) = \frac{1}{\det(I_n - A)}$.

- Écrire une fonction renvoyant $\sum_{k=1}^m \frac{\text{tr}(A^k)}{k}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et A donnés.
- On suppose que $\rho(A) \leq 1$ et que 1 n'est pas valeur propre de A . Montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k} = - \int_0^1 \frac{P'_A(t)}{P_A(t)} dt,$$

lorsque $P_A(X) = X^n \chi_A(1/X)$.

- On suppose que $\sum \frac{\text{tr}(A^k)}{k}$ converge. Montrer que $\rho(A) \leq 1$ et que 1 n'est pas valeur propre de A . En déduire le résultat cherché.

Exercice 24 (Centrale MP 2016 - Python*)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

- Montrer que Q_n possède une unique racine strictement positive x_n .
- Écrire un programme prenant n en paramètre et calculant une valeur approchée de x_n . Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de x_n ?
- Prouver que (x_n) converge et déterminer sa limite.
- Montrer que $2^n(2 - x_n)$ tend vers 1.
- Poursuivre le développement asymptotique de x_n .

Exercice 25 (Centrale MP 2015 - Python*)

On définit des suites par $x_0 = y_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}$ et $y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$.

- Montrer que ces suites sont bien définies.
- Calculer les 10 premiers termes de ces suites. Conjecturer leur comportement.
- Déterminer les limites possibles.
- Montrer la convergence des suites.
- Montrer que (x_n) et (y_n) ne peuvent être monotones, même à partir d'un certain rang. Donner un rang n_0 à partir duquel les limites sont approchées à 10^{-3} près.

Exercice 26 (Centrale MP 2015 - Python*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On notera $B_0 = 1$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.
- Écrire une fonction `Bell(n)` donnant $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$.
- Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif.
- Soit $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f . Donner une expression de B_n .

Exercice 27 (Centrale MP 2015 - Python*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

- Tracer les représentations graphiques de P_n sur $[-2, 2]$ pour $n \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$.
- Étudier le signe et les variations de P_n .
- Montrer que P_n présente un minimum a_n atteint en un seul point.
- Étudier la suite a_n .

Probab

Exercice 28 (Centrale MP 2024 - Python)

Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_k . On suppose que ces variables aléatoires ont toutes un moment d'ordre 2. On pose $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$.

- a) i) Avec $a \leq b \in \mathbb{N}, \lambda > 0, X_1 \sim \mathcal{U}([a, b])$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, écrire une fonction Python qui simule S_N .
 ii) Vérifier avec Python que $\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$.
 iii) Pour $\alpha < 0 < \beta$, on pose $T = \min\{k \in \mathbb{N}^*, S_k \leq \alpha \text{ ou } S_k \geq \beta\}$ en convenant que $T = 0$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k \in]\alpha, \beta[$. Dans le cas où $X_1 \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$, écrire une fonction Python simulant la variable T et l'utiliser pour vérifier que $\mathbf{E}(T) = \frac{3|\alpha\beta|}{2}$.
- b) Montrer que $\forall t \in]-1, 1[, G_{S_N}(t) = G_N(G_{X_1}(t))$.
- c) Montrer que $\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$.
- d) On suppose X_1 bornée mais plus nécessairement à valeurs entières. On admet que T est d'espérance finie, et on pose $S_T = \sum_{k=1}^T X_k$. Justifier que S_T est d'espérance finie et que $\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X_1)$.
- Ind. On montrera que $\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} X_j (1 - \mathbf{1}_{T < j})\right)$.

Exercice 29 (Centrale MP 2024 - Python)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. La variable S_n modélise le gain d'un joueur jouant à pile ou face, gagnant 1 point lorsqu'il fait pile, en perdant 1 sinon. On s'intéresse à la durée pendant laquelle le gain est positif. On pose :

$$K_n = \text{Card}(\{k \in \{1, \dots, n\}, S_{k-1} \geq 0 \text{ et } S_k \geq 0\}).$$

- a) Coder une fonction $K(n)$ renvoyant la valeur K_n . On remarque qu'elle ne prend que des valeurs paires, ce que l'on admet par la suite.
- b) Coder une fonction $\text{occurrences}(nb, n)$ qui simule nb fois le jeu pour $2n$ lancers et renvoie une liste L où $L[k]$ est la proportion de simulations pour lesquelles $K_{2n} = 2k$. La tester pour $nb = 2000$ et $n = 200$.
- c) Tracer sur un même graphique $n \cdot L[k]$ en fonction de k/n et la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0, 1[$.

On admet que $\mathbf{P}(K_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$. Soient $0 < a < b < 1$.

- d) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leq b\right) = \sum_{k=\lfloor na \rfloor + 1}^{\lfloor nb \rfloor} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$$

- e) Prouver que

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leq b\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n} \sum_{k=\lfloor na \rfloor + 1}^{\lfloor nb \rfloor} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$$

- f) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leq b\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 30 (Centrale MP 2022 - Python)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1; r \rrbracket$. Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on note T_i le temps d'attente pour avoir i valeurs distinctes, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$, $T_i(\omega) = \min \{k \in \mathbb{N}^*, \text{Card} \{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\} = i\}$ en posant $T_i(\omega) = +\infty$ si l'on n'obtient jamais i valeurs distinctes.

- a) Avec Python :
 - i) Simuler la variable T_r .
 - ii) Évaluer $\mathbf{E}(T_r)$.
 - iii) Tracer les graphes sur $[0, 3]$ des fonctions $\Phi : t \mapsto \mathbf{P}(T_r \in [r \ln r - tr, r \ln r + tr])$ et $f : t \mapsto \exp(-e^{-t}) - \exp(-e^t)$ et formuler une conjecture.
- b)
 - i) Montrer que T_i est presque sûrement finie.
 - ii) Les T_i sont-elles indépendantes?
- c) Pour tout $i \in \llbracket 2; r \rrbracket$, on pose $Z_i = T_i - T_{i-1}$. Étant donné une partie S de $\llbracket 1; r \rrbracket$ à i éléments et des entiers $0 < t_1 < \dots < t_i$, on pose :

$$A(S, t_1, \dots, t_i) = \{\{X_{t_1}, \dots, X_{t_i}\} = S, T_1 = t_1, \dots, T_i = t_i\}.$$
 - i) Calculer les lois de Z_{i+1} conditionnellement à $A(S, t_1, \dots, t_i)$ puis à $\bigcap_{k=1}^i \{T_k = t_k\}$ et enfin la loi de Z_{i+1} .
 - ii) Les variables Z_i sont-elles indépendantes?
- d) Calculer l'espérance et la variance de T_r .

Exercice 31 (Centrale MP 2015 - Python*)

- a)
 - i) Écrire une fonction $S(n, p)$ qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$ où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
 - ii) En déduire une fonction $\text{test}(n, p)$ qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k) , puis les points $\left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$ et enfin les $\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on?
- b)
 - i) Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$.
 - ii) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et $\mathbf{E}(\exp(tX)) \leq \cosh t \leq \exp(t^2/2)$.
- c)
 - i) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telle que, pour tout i , $|X_i| \leq a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.
 - ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.
 - iii) En choisissant une bonne valeur de t , montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^n a_i^2}\right)$.
 - iv) Commenter le résultat observé à la première question.

Exercice 32 (Centrale MP 2015 - Python*)

Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement il se trouve en case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i -ième étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ qui donne la position du pion

à l'instant n , $f_i = \mathbb{P}(Y_1 = i)$ et $u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$.

- a) On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
 - i) Écrire une fonction qui prend un paramètre entier k et qui renvoie 1 si le pion atteint la case k et 0 sinon.
 - ii) Écrire une fonction qui, sur une trentaine d'essais, renvoie la proportion de fois où le pion atteint la case k . Comparer à $1/\mathbb{E}(Y_1)$.
- b) On note E_k l'événement « le pion atteint la case k », et $u_k = \mathbb{P}(E_k)$.
 - i) Décrire l'événement E_k à l'aide des variables aléatoires S_n .
 - ii) Calculer $\mathbb{P}(E_k \cap \{Y_1 = j\})$ pour $1 \leq j \leq k$.
 - iii) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \sum_{j=1}^k u_{k-j} f_j$.
 - iv) Justifier la définition de $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ et montrer que $f(t) = \frac{1}{1-u(t)}$.
 - v) Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et en déduire les u_k .
 - vi) On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tels que $\mathbb{P}(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $1/\mathbb{E}(Y_1)$.

Exercice 33 (Centrale MP 2017 - Python*)

On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires entre 1 et n soient premiers entre eux. On veut montrer que la limite de $r_n = \frac{6}{\pi^2}$. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On définit une fonction μ par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

- a) À l'aide de Python, vérifier la conjecture sur la limite de (r_n) .
- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \{(a, b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a \wedge b = 1\}$, on note $p_1, \dots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $U_i = \{(a, b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, p_i | a \text{ et } p_i | b\}$. Exprimer A_n en fonction des U_i .
- c) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de multiple de ℓ inférieurs ou égaux à n .
- d) En déduire le cardinal de $\bigcap_{i \in I} U_i$ où I est une partie non vide de $\llbracket 1; k \rrbracket$.
- e) Montrer que $\text{card}(A_n) = \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$.
- f) Conclure.