Algèbre et géométrie

Exercice 1 *(Centrale MP/MPI 2025 - Python)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{0,1,\ldots,n-1\}$.

a) Une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0),\ldots,\sigma(n-1)]$.

   i) Écrire une fonction Python prenant en argument deux permutations $\sigma,\tau \in \mathscr{S}_n$ et retournant la composée $\sigma\circ\tau$.

   ii) Écrire une fonction Python `cycles_disjoints` qui prend en argument une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$ et retourne une liste de listes représentant sa décomposition en cycles à supports disjoints.

   iii) Écrire une fonction Python prenant en argument une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$ et retournant le nombre de cycles non triviaux dans sa décomposition en cycles à supports disjoints.

   Pour $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on note $L(\sigma)$ le cardinal de son support $\mathrm{Supp}(\sigma)$, $C(\sigma)$ le nombre de cycles non triviaux dans sa décomposition en cycles à supports disjoints, $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ, et $T(\sigma)$ le nombre minimal de transpositions dont la composée vaut σ.

b) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_6$ représentée par $[5,1,2,4,3,0]$. Calculer $L(\sigma), C(\sigma), N(\sigma), T(\sigma)$.

c) i) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Exprimer $N(\sigma)$ en fonction de $C(\sigma), L(\sigma)$ et n.

   ii) On admet la propriété $(*)$: $N(\tau\circ\sigma) = N(\sigma)\pm 1$ pour toute transposition τ. Montrer que $T(\sigma) \geqslant L(\sigma)-C(\sigma)$.

   iii) Montrer d'abord pour un cycle, puis pour une permutation quelconque, que $T(\sigma) = L(\sigma)-C(\sigma)$.

   iv) Montrer la propriété (*) admise en ii).

d) On pose $S_{n+1,i} = \{\sigma \in S_{n+1}, \sigma(n) = i\}$ pour $i \in [\![0;n]\!]$. Donner une bijection entre $S_{n+1,i}$ et $\mathscr{S}_n$.

Exercice 2 *(Centrale MP/MPI 2025 - Python)*

a) Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier Montrer que $v_p(a,b) = v_p(a)+v_p(b)$, où v_p est la valuation p-adique.

b) i) Écrire une fonction Python `v(n,p)` qui retourne $v_p(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier.

   ii) Écrire une fonction Python `sommeBase(n,p)` qui retourne la somme des chiffres de l'écriture de l'entier n en base p.

   iii) Écrire une fonction Python `nzd(n)` qui retourne le nombre de 0 à droite dans l'écriture décimale de $n!$. La tester avec $n=500$ et $n=2025$.

   iv) Conjecturer un lien entre `n-sommeBase(n, 5)` et `nzd(n)`.

   v) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n. À l'aide de la fonction `isprime` de la bibliothèque `sympy`, tracer $\pi(2n)$ et $\dfrac{2\ln(2)}{\ln(2n)}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10000$. Conjecture ?

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier.

   i) Combien d'entiers inférieurs ou égaux à n sont multiples de p ?

   ii) Combien d'entiers inférieurs ou égaux à n sont multiples de p et pas de p^2 ?

   iii) Montrer que
$$v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\right),$$
   puis que $v_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$.

   iv) Retrouver (sans Python) `nzd(2025)`.

   v) On écrit n en base p : $n = a_r p^r + \cdots + a_0 p^0$, et on pose $s = a_r + \cdots + a_0$. Montrer que $v_p(n) = \dfrac{n-s}{p-1}$.

Exercice 3 *(Centrale MP/MPI 2025 - Python)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres complexes distinctes de A et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On pose alors $Q_A(X) = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_p)$.

a) On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

i) Écrire une fonction Python prenant en argument un polynôme P et retournant le PGCD de P et P'.

ii) On pose $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - Q_A(A_n)\, Q_A(A_n)^{-1}$. Calculer avec Python les matrices A_n pour $n \in [\![0;20]\!]$ en admettant provisoirement le résultat de la question c). Que constate-t-on ?

iii) Recommencer en utilisant la matrice B au lieu de la matrice A.

On revient au cas général.

b) Montrer que Q'_A et χ_A sont premiers entre eux.

c) Montrer que $\chi_A = Q_A \,\mathrm{PGCD}(\chi_A, \chi'_A)$.

d) Soient R un anneau, $n \in R$ un élément nilpotent et $j \in R$ un élément inversible tels que $nj = jn$. Montrer que $n + j$ est inversible.

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit (P_n) : « A_n existe, est un polynôme en A et vérifie $Q'_A(A_n)$ inversible et $Q_A(A_n) \in Q_A(A)^{2^n}\mathbb{C}[A]$ ». Montrer que la propriété (P_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite (A_n) est bien définie.

f) Montrer que la suite (A_n) converge vers une matrice D diagonalisable et que $N = A - D$ est nilpotente. Justifier que N et D sont polynômes en A.

Exercice 4 *(Centrale MP 2024 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$, on note $B_{k,n} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

a) Établir une relation de récurrence entre $B_{k,n}$, $B_{k-1,n-1}$ et $B_{k,n-1}$.

b) Donner un code récursif qui prend en argument n et renvoie la liste des $B_{k,n}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 B_{k,n}(t)\mathrm{d}t$ pour tous k et n.

d) Montrer que l'application T_n de $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à f associe

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(X)$$

est surjective.

Exercice 5 *(Centrale MP 2024 - Python*)*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P'(X) - nXP(X)$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Écrire une fonction `matrice(n,a,b)` qui renvoie la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire une fonction `propre(n,a,b)` qui renvoie les valeurs propres et les vecteurs propres de M.

c) Déterminer les éléments propres de f pour $n = 2, a = 1, b = 0$ et $n = 2, a = 2, b = 1$.

d) La matrice M est elle diagonalisable ?

Exercice 6 *(Centrale MP 2024 - Python*)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ et $\widehat{H_n} = \mathscr{M}_n([-1,1])$, ainsi que $M_n = \max\det(H_n)$ et $\widehat{M_n} = \max\det\left(\widehat{H_n}\right)$.

a) Justifier l'existence de M_n et $\widehat{M_n}$.

b) i) Écrire une fonction Python `MaxiDetAlea(n)` calculant le déterminant maximal de 10000 matrices aléatoires de H_n et qui renvoie le maximum trouvé ainsi qu'une matrice en laquelle il est atteint.

ii) Procéder de même avec $\widehat{H_n}$.

iii) Les instructions suivantes renvoient un itérateur L parcourant tous les N-uplets d'éléments de $\{-1,1\}$:

```
from itertools import product
L=product([-1,1],repeat=N)
```

Écrire une fonction calculant M_n.

Soit $A \in H_n$. On pose $B = A^T A$.

c) i) Montrer que B est diagonalisable à valeurs propres positives, puis que $\det(B) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(B)}{n}\right)^n$.

ii) Montrer que $\det(A) \leqslant n^{n/2}$.

d) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} A$ est orthogonale si et seulement si $|\det(A)| = n^{n/2}$.

Exercice 7 *(Centrale MP 2022 - Python*)*

Dans cet exercice, on note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{P}_n$) l'ensemble des nombres premiers (respectivement, des nombres premiers inférieurs ou égaux à n). Pour $p \in \mathscr{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers.

a) i) Écrire une fonction PYTHON premiers (n) renvoyant une liste de taille $n+1$ telle que `premier(n)[k]=1` si k est premier et 0 sinon.

ii) Afficher les fonctions $n \mapsto \sum_{p \in \mathscr{P}_n} \frac{\ln p}{p}$, $n \mapsto \ln(n) - \ln(4) - 1$ et $n \mapsto \ln(n) + \ln(4)$. Formuler une conjecture.

b) On fixe dans cette question un nombre premier p et un entier $n \geqslant 1$.

i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Card}\left\{m \in [\![1;n]\!], v_p(m) = k\right\} = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor.$$

ii) En déduire que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

iii) Montrer l'encadrement $\frac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p-1}$.

iv) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$.

c) i) À l'aide d'une série entière, démontrer la convergence et calculer la somme $\sum_{k \geqslant 1} \frac{k}{2^k}$.

ii) Montrer que $\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\ln p}{p(p+1)} < +\infty$.

iii) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe $\theta_n \in [0,1]$ tel que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + 1 + \theta_n \ln(n)$.

iv) Montrer que $\prod_{p \in \mathscr{P}_n} p \leqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et conclure quant à la conjecture de la question a) ii) .

Exercice 8 *(Centrale MP 2021 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et l'on note $H_n = \frac{A_n}{B_n}$, avec $A_n \wedge B_n = 1$.

On souhaite étudier la propriété $(\mathscr{P})$: « pour tout p premier, on a $p^2 \mid A_{p-1}$. »

a) i) Écrire une fonction pgcd qui renvoie le pgcd de deux entiers.
   ii) Déterminer, en fonction d'un pgcd et de A_{k-1}, B_{k-1}, les expressions de A_k et B_k.
   iii) Écrire une fonction qui calcule A_n pour un n donné. Calculer A_{16}.
   iv) Vérifier la propriété $\mathscr{P}$ jusqu'à 500
   On pourra utiliser `sympy.primerange` ou `sympy.nextprime`.

b) Montrer le théorème de Wilson : p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1\,[p]$. On considère désormais un nombre premier $p \geqslant 5$.

c) Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on pose $a_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$. Exprimer $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ en fonction de H_{p-1}. En déduire que p divise A_{p-1}.

d) Montrer que $k^2 a_k \equiv 1\,[p]$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$. En déduire que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ et conclure.

Exercice 9 *(Centrale MP 2019 - Python*)*

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} |t| P(t) Q(t) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Programmer une fonction phi (P, Q) renvoyant $\varphi(P, Q)$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite orthonormale $(P_n)_{n \geqslant 0}$ telle que, pour tout n, P_n soit de degré n à coefficient dominant positif.

d) Programmer une fonction retournant P_n. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Tracer les graphes des fonctions polynomiales associées sur $[-1, 1]$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont dans $]-1, 1[$.

f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n séparent celles de P_{n+1}.

Exercice 10 *(Centrale MP 2018 - Python*)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $x^2 - py^2 = 1$ d'inconnues x, y dans $\mathbb{N}$.

a) Écrire une fonction prenant en argument un entier n et renvoyant un booléen indiquant si n est premier ou non (la fonction pourra être rudimentaire).

b) Donner la liste de tous les entiers p premiers dans $[\![3; 1000]\!]$ tels que $p-2$ soit un carré parfait.

c) Écrire une fonction `solutions` prenant en argument p et n et renvoyant les n plus petites solutions de E_p (dans l'ordre lexicographique). Donner les 10 premières solutions de E_3. Pour chaque entier p trouvé en b), donner les trois premières solutions de (E_p).

d) On fixe $p = 3$. On note $z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où (x_n, y_n) est la n-ième solution de (E_3).
   i) Déterminer $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $z_1 = Mz_0$ et $z_2 = Mz_1$.
   ii) À l'aide de Python calculer les premiers termes de Mz_n. Conjecture?
   iii) En admettant cette conjecture, déterminer z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Montrer que si p est premier et $p-2$ un carré parfait, il existe (x, y) solution de (E_p) telle que $x = p-1$. Montrer qu'il s'agit de la première solution après $(1, 0)$.

Exercice 11 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Soit Φ_P l'application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans lui-même qui à T associe le reste de la division euclidienne de TP' par P.

a) Montrer que Φ_P est linéaire.

b) Écrire une fonction Python qui donne la matrice de Φ_P dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$., puis une fonction Python qui renvoie $\det(\Phi_P)$.

c) On suppose que P admet n racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Exprimer $\det \Phi_P$ en fonction des $P'(\lambda_i)$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_P soit inversible.

Exercice 12 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On cherche à établir l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A\Omega$ ait sa diagonale constante.

a) Démontrer le résultat pour $n = 2$ et expliciter, en fonction de A une matrice $\Omega \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega A\Omega$ a sa diagonale constante.

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner à l'aide de Python, B orthogonalement semblable à A de diagonale constante.

c) Soit $\Gamma = \{{}^t\Omega A\Omega, \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que Γ est compact.

d) Soit $f : M \in \Gamma \mapsto \sup\limits_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} |M_{i,i} - M_{j,j}|$. Montrer que f présente un minimum.

e) En déduire le résultat annoncé.

Exercice 13 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(X-k)$ et $R_n = \dfrac{P_n'}{P_n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{X-k}$.

a) Écrire une fonction qui calcule $R_n(x)$. Écrire une fonction qui trace $x \mapsto R_n(x)$ pour $x \in [-4, 8]$ (et des ordonnées dans $[-5, 5]$).

b) i) Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, montrer que R_n admet un unique zéro dans $]k, k+1[$. On le note $a_{n,k}$.
   ii) Écrire une fonction qui donne une approximation numérique de $a_{n,k}$.
   iii) On fixe $k \in \mathbb{N}$. Étudier expérimentalement le comportement de $(a_{n,k})_{n\geqslant k}$.

c) L'entier k étant fixé, étudier la convergence de $(a_{n,k})_{n\geqslant k}$. On pourra comparer R_n et R_{n-1}.

d) Trouver la limite puis un équivalent de $\dfrac{1}{a_{n,k}-k}$. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $a_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

On appellera fonction multiplicative toute application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \wedge n = 1$, $f(mn) = f(m)f(n)$.

a) Programmer une fonction Python `pgcd` qui retourne le pgcd de deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$.

b) On définit des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \operatorname{card}\left\{x \in [\![1;n]\!], x \wedge n = 1\right\}, \tau(n) = \operatorname{card}\left\{x \in [\![1;n]\!], x \text{ divise } n\right\}, \sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

et

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Montrer que ces quatre fonctions sont multiplicatives.

c) Programmer en Python ces fonctions.

d) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives non nulles. Pour $f, g \in \mathcal{M}$, on définit $f * g : n \mapsto \sum\limits_{d|n} f(d)g(n/d)$. On admet que $\mathcal{M}$ est un groupe abélien. Soit $e : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $e(n) = \delta_{n1}$ et $\mathbf{1} : n \mapsto 1$. Montrer que e est l'élément neutre de $\mathcal{M}$ et que $\mathbf{1} * \mu = e$.

e) Soit $H \in \mathcal{M}$. On définit $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par $h(n) = \sum\limits_{d|n} H(d)$. Montrer que $H = \mu * h$. Expliciter cette relation lorsque $H = \varphi$.

f) Soit $f \in \mathcal{M}$, $F = \mu * f$ et $M = \big(f(i \wedge j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$. On pose D la matrice diagonale de diagonale $(F(1), \ldots, F(n))$ et $A = \big(1_{i|j}\big)$. Calculer ${}^tADA$ et en déduire $\det M$. Calculer $\det M$ pour $f = \mathrm{Id}$, $f = \sigma$ et $f = \tau$.

Analyse

Exercice 15 *(Centrale MP/MPI 2025 - Python)*

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels de $[0,1]$ est équirépartie si $\forall a<b\in[0,1]$, $\dfrac{S_n(a,b)}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$ où $S_n(a,b)=\mathrm{Card}\left(\{k\in[\![1;n]\!], a\leqslant u_k\leqslant b\}\right)$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ la partie fractionnaire de x.

a) Montrer que, si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie dans $[0,1]$, alors elle y est dense. La réciproque est-elle vraie ?

b) i) Écrire une fonction Python `S(u,n,a,b)` calculant $S_n(a,b)$ pour la suite $u\in[0,1]^{\mathbb{N}^*}$.

ii) La tester avec $u_n=\{\sqrt{2n}\}$, $v_n=\cos(n)$ et $w_n=\{n/2\}$. Ces suites semblent-elles équiréparties ?

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $D_n=\sup_{0\leqslant a<b\leqslant 1}\left|\dfrac{S_n(a,b)}{n}-(b-a)\right|$ et $D_n^*=\sup_{0\leqslant \alpha\leqslant 1}\left|\dfrac{S_n(0,\alpha)}{n}-\alpha\right|$.

c) Écrire une fonction Python `D(u,n)` calculant D_n pour la suite $u\in[0,1]^{\mathbb{N}^*}$.

d) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $D_n^*\leqslant D_n\leqslant 2D_n^*$.

e) Montrer qu'une suite $u\in[0,1]^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle.

f) Soit $u\in[0,1]^{\mathbb{N}^*}$. On veut montrer l'équivalence entre :

(A) u est équirépartie,

(B) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f$ pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ continue,

(C) $\displaystyle\forall p\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left(2i\pi p u_k\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

i) Montrer $(A)\Rightarrow(B)$.

ii) Montrer que $(B)\Rightarrow(A)$.

Indication : pour $a<b\in[0,1]$ et $\varepsilon>0$, on pourra montrer l'existence de ψ_ε et ϕ_ε continues sur $[0,1]$ telles que $\psi_\varepsilon\leqslant\mathbf{1}_{[a,b]}\leqslant\varphi_\varepsilon$ et $\displaystyle\int_0^1\left(\varphi_\varepsilon-\psi_\varepsilon\right)\leqslant\varepsilon$.

iii) On admet que toute fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de l'espace $T=\mathrm{Vect}(e_k,k\in\mathbb{Z})$ où $e_k:t\in\mathbb{R}\mapsto e^{2i\pi kt}$. Montrer que $(B)\Leftrightarrow(C)$.

Indication : pour $(C)\Rightarrow(B)$, on pourra commencer par $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ telle que $f(0)=f(1)$.

g) Soit $\theta>0$. Montrer que la suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si $\theta\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 16 *(Centrale MP 2024 - Python)*

On admet l'existence et unicité de la suite de polynômes (A_n) vérifiant $A_0 = 1, A'_{n+1} = A_n$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = A_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer A_1, A_2 et A_3.

b) i) Écrire une fonction Python `A(n)` qui renvoie le polynôme A_n. À l'aide de Python, conjecturer le comportement asymptotique de la suite (a_n).

ii) à l'aide de Python, comparer $A_n(0)$ et $A_n(1)$ pour différentes valeurs de n. Conjecture ? Comparer également $A_n(X)$ et $A_n(1-X)$ pour différentes valeurs de n. Conjecture ?

iii) Tracer sur un même graphe avec Python les courbes des fonctions

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda}{e^{-\lambda}-1} \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$$

pour $N \in [\![0;5]\!]$ sur l'intervalle $[-3,3]$. Conjecture ?

c) Démontrer la conjecture faite en b)ii). Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$.

d) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0)+f'(1)}{2} - \sum_{k=2}^{n} a_k\left(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\right) + (-1)^n \int_0^1 A_n(t) f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

e) i) Montrer que $\forall x \in [0,1], |A_n(x)| \leqslant 1$.

Ind. On pourra montrer que $\left|\hat{A}_{n+1}(x)\right| \leqslant 1/2$ où $\hat{A}_{n+1}(x) = \int_{1/2}^{x} A_n(t)\mathrm{d}t$.

ii) Montrer la conjecture faite en b) iii).

Ind. On utilisera la question ***d***) avec $f : x \mapsto e^{-\lambda x}$.

Exercice 17 *(Centrale MP 2024 - Python*)*

a) Résoudre l'équation $y' + y = e^x$.

b) Tracer la courbe représentative de $p : x \mapsto xe^{-x}$ et trouver graphiquement les antécédents de e^{-1}.

c) Montrer que p induit une bijection de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle qu'on précisera. On note Φ sa réciproque.

d) On pose, pour $N \in \mathbb{N}, S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n^{n-1}\frac{x^n}{n!}$. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum n^{n-1}\frac{x^n}{n!}$ et tracer la courbe de $x \mapsto S_8(p(x))$ sur l'intervalle $[0,1/3]$. La tracer sur l'intervalle $[0,1]$. Le choix $N = 8$ est-il raisonnable ? Quelle conjecture peut-on émettre ?

e) i) Soient $\lambda > 0$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Résoudre : $\left(x' = \lambda x + y, y' = \lambda y\right)$ avec $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

ii) À l'aide de Φ, montrer que l'on peut écrire, pour t suffisamment grand, $y(t) = F(x(t))$ où F est une fonction indépendante de t.

f) i) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $f^{(m-1)}(0)$ où $f(t) = \frac{\left(e^t-1\right)^m - (-1)^m}{m!}$.

ii) Résoudre $xy' - y = 0$ sur $]-R, R[$.

iii) Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k n^{n+k-1} x^{n+k}}{n!k!}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable pour $|x|$ assez petit. En sommant selon les paquets $I_m = \left\{(k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, k+n = m\right\}$, justifier la conjecture faite précédemment.

Exercice 18 *(Centrale MP 2022 - Python)*

Pour des entiers naturels $a_0, \ldots, a_n$, avec a_n non nul, on pose (fraction continue) :

$$[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

a) Écrire une fonction qui renvoie la fraction continue associée à $(a_0, \ldots, a_n)$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = [1, 2, \ldots, 2]$ avec n copies de 2 . Montrer que $(x_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$ et écrire une fonction retournant le plus petit rang à partir duquel $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-10}$.

c) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^*$, montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M(a_0) \cdots M(a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n]$.

d) Écrire une fonction qui retourne (p_n, q_n) à partir de $(a_0, \ldots, a_n)$.

e) Montrer que (p_n, q_n) est un représentant irréductible du rationnel $[a_0, \ldots, a_n]$.

f) Soit x un réel strictement positif. On pose $y_0 = x$ et, tant que c'est possible, $a_n = \lfloor y_n \rfloor$, $x_n = [a_0, \ldots, a_n]$ et $y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}$.

  i) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que x_{n+1} soit défini. Montrer successivement que $x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ et que $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}}$.

  ii) Montrer que le procédé de construction s'interrompt si et seulement si x est rationnel.

Exercice 19 *(Centrale MP 2021 - Python*)*

On pose $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$.

a) Coder une fonction qui calcule a_n et calculer pour de grandes valeurs $\frac{1}{n(a_n)^2}$. Émettre une conjecture et la démontrer.

b) Tracer les points (n, a_n) pour $n < 100$ et la courbe $x \to \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ pour $x \in [0, 100]$ sur une même fenêtre. Émettre une conjecture et la démontrer.

  On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^{2n}$.

c) Donner le domaine de définition de f et étudier sa continuité.

d) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.

e) Dériver $x \mapsto 1 + \sqrt{1 - x^2}$ et exprimer une primitive de $x \to \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}$ à l'aide d'un logarithme.

f) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$.

Exercice 20 *(Centrale MP 2021 - Python)*

Soit $\omega \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, x et y dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= -\omega(t)y(t) \\ y'(t) &= \omega(t)x(t) \end{cases}$$

avec $x(0)=1$ et $y(0)=1$.

a) Représenter graphiquement les solutions pour $\omega=1, \omega=\pi, \omega : t\mapsto t, \omega : t\mapsto \sin(t)+k$ où $k=1, e^{-1}, \sqrt{2}$. Dans quels cas les solutions sont-elles périodiques ?

b) Résoudre le système dans le cas ω constant.

On pose $U : t\mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}$, on suppose U périodique de période $T>0$ et ω non constante.

On pose $U_0 = U(0)$ et $\Omega(t)=\int_0^t \omega(u)\mathrm{d}u$. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

c) Calculer $e^{\alpha J}$.

d) Exprimer $U(t)$ à l'aide de Ω, puis montrer que $\|U\|$ est constant.

e) Calculer $xy'-x'y$; en déduire que ω est périodique.

f) Montrer l'existence d'une plus petite période $\tau>0$ pour U. Montrer que T est un multiple de τ.

g) Montrer que $\Omega(\tau)=r\pi$ avec $r\in\mathbb{Q}$.

h) Étudier la réciproque.

Exercice 21 *(Centrale MP 2022 - Python)*

a) Soit r la solution positive de $x^2+x-1=0$. On considère une fonction $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour laquelle il existe t_0 tel que f soit strictement décroissante sur $]-\infty, t_0[$ et strictement croissante sur $]t_0,+\infty[$. On construit une suite (a_n,b_n) par la récurrence suivante : on fixe a_0, b_0 tels que $a_0\leqslant t_0\leqslant b_0$. Puis, lorsque (a_n,b_n) est construit, on pose $\lambda_n = a_n + r^2 b_n$ et $\mu_n = a_n + r b_n$. Si $f(\lambda_n)\geqslant f(\mu_n)$, on pose $(a_{n+1},b_{n+1}) = (\lambda_n, b_n)$, sinon $(a_{n+1},b_{n+1})=(a_n,\mu_n)$.
Écrire l'algorithme. Montrer que (a_n,b_n) tend vers (t_0,t_0) quand $n\to+\infty$.

b) Soit $F\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ minorée, dont la restriction à toute droite affine vérifie la condition de a). On fixe X_0 puis, pour tout n, on pose $U_n = \dfrac{\nabla F(X_n)}{\|\nabla F(X_n)\|}$ et $X_{n+1} = X_n + \lambda^* U_n$, où λ^* est tel que $F(X_n+\lambda U_n)$ soit minimal. Si $\nabla f(X_n)=0$, on s'arrête.
Programmer l'algorithme. Montrer que $(F(X_n))_{n\geqslant 0}$ converge. Est-ce que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge ?

Exercice 22 *(Centrale MP 2016 - Python*)*

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $Q_n = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$.

a) Montrer que Q_n possède une unique racine strictement positive x_n.

b) Écrire un programme prenant n en paramètre et calculant une valeur approchée de x_n. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de x_n ?

c) Prouver que (x_n) converge et déterminer sa limite.

d) Montrer que $2^n(2-x_n)$ tend vers 1.

e) Poursuivre le développement asymptotique de x_n.

Exercice 23 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On notera $B_0=1$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$.

b) Écrire une fonction `Bell(n)` donnant $(B_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

c) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{B_n}{n!}x^n$ est strictement positif.

d) Soit $f : x\in]-R,R[\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{B_n}{n!}x^n$. Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f. Donner une expression de B_n.

Probas

Exercice 24 *(Centrale MP/MPI 2025 - Python)*

- Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $X \sim Y$. On veut établir l'inégalité $(*)$: $\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1$.
- Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de même loi. On veut établir l'inégalité $(**)$: $\mathbf{E}(|U - V|) \leqslant \mathbf{E}(|U + V|)$.

a) En Python tester $(*)$ sur des lois binomiales et géométriques

b) Faire de même pour $(**)$ avec des lois binomiales, Poisson, ...

c) Tracer à l'aide de python la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $[-3,3]$. Conjecture ?

d) Montrer $(*)$) dans le cas où X et Y sont indépendantes.
Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

e) On suppose que $\ln(X)$ est d'espérance finie, montrer $(*)$.
Indication : commencer par montrer que : $\ln(x) \leqslant x - 1$.

f) Soient $a, b > 0$ Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

g) Montrer $(*)$.

h) Vérifier la conjecture établie à la question c).

i) Montrer $(**)$.

Exercice 25 *(Centrale MP 2024 - Python)*

Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_k. On suppose que ces variables aléatoires ont toutes un moment d'ordre 2. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

a) i) Avec $a \leqslant b \in \mathbb{N}, \lambda > 0, X_1 \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ et $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$, écrire une fonction Python qui simule S_N.
ii) Vérifier avec Python que $\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$.
iii) Pour $\alpha < 0 < \beta$, on pose $T = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, S_k \leqslant \alpha \text{ ou } S_k \geqslant \beta\right\}$ en convenant que $T = 0$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k \in]\alpha, \beta[$. Dans le cas où $X_1 \sim \mathscr{U}(\{-1,0,1\})$, écrire une fonction Python simulant la variable T et l'utiliser pour vérifier que $\mathbf{E}(T) = \dfrac{3|\alpha\beta|}{2}$.

b) Montrer que $\forall t \in]-1,1[, G_{S_N}(t) = G_N\left(G_{X_1}(t)\right)$.

c) Montrer que $\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$.

d) On suppose X_1 bornée mais plus nécessairement à valeurs entières. On admet que T est d'espérance finie, et on pose $S_T = \displaystyle\sum_{k=1}^{T} X_k$. Justifier que S_T est d'espérance finie et que $\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X_1)$.
Ind. On montrera que $\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} X_j \left(1 - \mathbf{1}_{T<j}\right)\right)$.

Exercice 26 *(Centrale MP 2022 - Python)*

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ suivant la loi uniforme sur $[\![1;r]\!]$. Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, on note T_i le temps d'attente pour avoir i valeurs distinctes, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$, $T_i(\omega) = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Card}\{X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)\} = i\right\}$ en posant $T_i(\omega) = +\infty$ si l'on n'obtient jamais i valeurs distinctes.

a) Avec Python :
   i) Simuler la variable T_r.
   ii) Évaluer $\mathbf{E}(T_r)$.
   iii) Tracer les graphes sur $[0,3]$ des fonctions $\Phi : t \mapsto \mathbf{P}(T_r \in [r\ln r - tr, r\ln r + tr])$ et $f : t \mapsto \exp\left(-e^{-t}\right) - \exp\left(-e^{t}\right)$ et formuler une conjecture.

b) i) Montrer que T_i est presque sûrement finie.
   ii) Les T_i sont-elles indépendantes ?

c) Pour tout $i \in [\![2;r]\!]$, on pose $Z_i = T_i - T_{i-1}$. Étant donné une partie S de $[\![1;r]\!]$ à i éléments et des entiers $0 < t_1 < \cdots < t_i$, on pose :
$A(S, t_1, \ldots, t_i) = \left\{\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_i}\} = S, T_1 = t_1, \ldots, T_i = t_i\right\}$.
   i) Calculer les lois de Z_{i+1} conditionnellement à $A(S, t_1, \ldots, t_i)$ puis à $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{i} \{T_k = t_k\}$ et enfin la loi de Z_{i+1}.
   ii) Les variables Z_i sont-elles indépendantes ?

d) Calculer l'espérance et la variance de T_r.

Exercice 27 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

a) i) Écrire une fonction $S(n,p)$ qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$ où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   ii) En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), puis les points $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et enfin les $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

b) i) Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]-1,1[$. Montrer que $\exp(tx) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$.
   ii) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \operatorname{ch} t \leqslant \exp(t^2/2)$.

c) i) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telle que, pour tout i, $|X_i| \leqslant a_i$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Montrer que $\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.
   ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \dfrac{t^2}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.
   iii) En choisissant une bonne valeur de t, montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\dfrac{-\varepsilon}{2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$.
   iv) Commenter le résultat observé à la première question.

Exercice 28 *(Centrale MP 2015 - Python*)*

Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement il se trouve en case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ième étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ qui donne la position du pion à l'instant n, $f_i = \mathbb{P}(Y_1 = i)$ et $u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$.

a) On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

i) Écrire une fonction qui prend un paramètre entier k et qui renvoie 1 si le pion atteint la case k et 0 sinon.

ii) Écrire une fonction qui, sur une trentaine d'essais, renvoie la proportion de fois où le pion atteint la case k. Comparer à $1/\mathbb{E}(Y_1)$.

b) On note E_k l'événement « le pion atteint la case k », et $u_k = \mathbb{P}(E_k)$.

i) Décrire l'événement E_k à l'aide des variables aléatoires S_n.

ii) Calculer $\mathbb{P}\left(E_k \cap \{Y_1 = j\}\right)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

iii) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j$.

iv) Justifier la définition de $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ et montrer que $f(t) = \dfrac{1}{1-u(t)}$.

v) Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et en déduire les u_k.

vi) On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tels que $\mathbb{P}(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $1/\mathbb{E}(Y_1)$.

Exercice 29 *(Centrale MP 2017 - Python*)*

On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires entre 1 et n soient premiers entre eux. On veut montrer que la limite de $r_n = \dfrac{6}{\pi^2}$. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. On définit une fonction μ par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

a) À l'aide de Python, vérifier la conjecture sur la limite de (r_n).

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \{(a,b) \in [\![1;n]\!]^2, a \wedge b = 1\}$, on note $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $U_i = \{(a,b) \in [\![1;n]\!]^2, p_i | a \text{ et } p_i | b\}$. Exprimer A_n en fonction des U_i.

c) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de multiple de ℓ inférieurs ou égaux à n.

d) En déduire le cardinal de $\bigcap_{i \in I} U_i$ où I est une partie non vide de $[\![1;k]\!]$.

e) Montrer que $\operatorname{card}(A_n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \dfrac{n}{d} \right\rfloor^2$.

f) Conclure.