Exercice 1 *(TPE MP 2019)*
Un nombre complexe α est dit algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul a coefficients entiers. Soit α un nombre algébrique.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$, unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d le degré de Π.

b) On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \left\{P(\alpha); P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\right\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$

c) Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

Exercice 2 *(IMT MP 2018)*
Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, le système $x + y = 4, xy = 10$.

Exercice 3 *(IMT MP 2016)*
Soie E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

b) Montrer que E est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. Est-ce un corps ?

Exercice 4 *(TPE MP 2015)*

a) Soit p un nombre premier. Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n^2 + 13n + 20$ soit divisible par 9.

Exercice 5 *(Télécom Sud MP 2013)*
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est de dimension finie.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

b) Montrer que $\operatorname{tr}(f_{|\operatorname{Im} f}) = \operatorname{tr}(f)$.

Exercice 6 *(IMT MP 2019)*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

b) Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P'.

Exercice 7 *(TPE MP 2013)*
Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Exercice 8 *(TPE MP 2019)*
Montrer de deux manières différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 9 *(TPE MP 2018)*
Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B inversible. Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 10 *(IMT MP 2016)*
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et ϕ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. On note $f : M \mapsto M - \phi(M)A$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que ϕ soit bijective de $M_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Exercice 11 *(TPE MP 2016)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & -a \\ -b & 0 & -c \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 *(IMT MP 2016)*
Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = D$.

Exercice 13 *(IMT MP 2018)*
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ distincts et pour $j \in [\![1; n]\!]$, $P_j = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} (X - a_j)$. Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \\ P_1(x) & \ldots & P_n(x) \end{vmatrix}$$

Exercice 14 *(IMT MP 2019)*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\begin{pmatrix} \cos\frac{a}{n} & \sin\frac{a}{n} \\ \sin\frac{a}{n} & \cos\frac{a}{n} \end{pmatrix}^n$.

Exercice 15 *(IMT MP 2018)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer sans calcul que A est diagonalisable.
b) Quel est le range de A? En déduire que 0 est valeur propre et déterminer une base de l'espace propre associé.
c) Trouver α tel que $A^3 = \alpha A$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$ et les sous-espaces propres associés.
d) Calculer $\mathrm{tr}(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 *(IMT MP 2018)*
Pour $n \geqslant 2$, on pose $E = \mathbb{C}_n[X]$ et on définit l'application $\varphi : P \in E \mapsto (X^2+X)P(1) + (X^2-X)P(-1)$.

a) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer son image et noyau.
b) Déterminer les éléments propres de φ. Cet endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 17 *(IMT MP 2018)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A.
b) Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ soient diagonales.
c) Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 18 *(IMT MP 2018)*
Soit $\mathcal{E}$ le sous-espaces de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ constitué des suites convergentes. Pour $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{E}$, on définit la suite $c(u)$ par $c(u)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que c est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
b) Déterminer les éléments propres de c

Exercice 19 *(IMT MP 2017)*
Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 20 *(IMT MP 2017)*
Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres pour que $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 21 *(IMT MP 2016)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en position $(i, n+1-i)$ qui valent 1. On note $A_n = \begin{pmatrix} J_n & I_n \\ I_n & J_n \end{pmatrix}$. Diagonaliser J_n. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 22 *(TPE MP 2016)*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et μ le polynôme minimal de u. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(u)$ est dans $GL(E)$ si et seulement si μ et P sont premiers entre eux.

Exercice 23 *(TPE MP 2019)*
Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, un espace euclidien, H un hyperplan de E, s la réflexion orthogonale d'hyperplan H, $f \in \mathscr{O}(E)$.

a) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale, en déterminer les espaces propres.
b) Déterminer les éléments de $\mathscr{O}(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

Exercice 24 *(IMT MP 2019)*
Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme symétrique de E à valeurs propres strictement positives.

a) Montrer que $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle f(x)|y\rangle$ est un produit scalaire sur E.
b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g de E à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $f = g^2$.

Exercice 25 *(IMT MP 2018)*
Déterminer le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 26 *(TPE MP 2013)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

b) Soit $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

Exercice 27 *(TPE MP 2010)*
On note G l'ensemble des fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

a) Déterminer les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

b) Montrer que G contient $g_0 : x \mapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Montrer que g_0 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Déterminer G.

Exercice 28 *(IMT MP 2019)*
Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n \mathrm{d}t\right| ; n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 29 *(IMT MP 2019)*
Soit, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, e_λ la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$. On note F le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$. Montrer qu'en posant $\forall f \in F, N(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$, on définit une norme sur F.

Exercice 30 *(IMT MP 2018)*
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre

a) la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,

b) la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et la suite $(\operatorname{tr}(A^k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 31 *(IMT MP 2018)*
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

b) Monter que $\{M \in M_n(\mathbb{K}), M \text{ nilpotente}\}$ est un fermé non compact d'intérieur vide.

Exercice 32 *(IMT MP 2017)*
Soient E un espace vectoriel normé, A un ouvert de E, B une partie quelconque de E.

a) Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.

b) Donner un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert.

Exercice 33 *(TPE MP 2017)*
Soient $d \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de $\mathbb{R}_d[X]$.

a) On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est dans $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Montrer que (P_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 34 *(IMT MP 2019)*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln^\alpha(k)$.

Exercice 35 *(IMT MP 2019)*
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, $n \geqslant 2$.

Exercice 36 *(IMT MP 2018)*
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{a\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)}$ où $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$?

Exercice 37 *(IMT 2017)*
On pose pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln k$ et $u_n = \dfrac{1}{S_n}$.

a) Trouver un équivalent de S_n.

b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 38 *(IMT MP 2019)*
Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln\left(x+e^{ax}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 39 *(TPE MP 2017)*
Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} e^{-n/k}$.

Exercice 40 *(TPE MP 2016)*
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que f' est intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge.

Exercice 41 *(IMT MP 2016)*
Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto x^\alpha \ln(1+x^\beta)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en fonction de α et β.

Exercice 42 *(IMT MP 2019)*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes réels telle que $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f et $\left(P_n'\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

Exercice 43 *(IMT MP 2019)*
Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
c) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 44 *(IMT MP 2017)*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$. Calculer I_n.
c) Quelle est la limite de la suite (I_n) ? La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$.
d) Soit $a > 0$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

Exercice 45 *(IMT MP 2017)*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 46 *(TPE MP 2016)*
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \ln 2$.

Exercice 47 *(TPE MP 2016)*

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+\frac{t}{2}) \leqslant \frac{t}{2}$ et $-t\ln 2 \leqslant \ln(1-\frac{t}{2}) \leqslant 0$.
b) On définit une suite de fonctions (f_n) sur $]-1,1[$ par $f_0 : x \mapsto x$ et $f_{n+1} : x \mapsto \ln\left(1-\frac{1}{2}f_n(x)\right)$. Montrer que cette suite est bien définie et étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

Exercice 48 *(IMT MP 2016)*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.
b) Trouver la limite puis un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Trouver la limite de f en 0.

Exercice 49 *(TPE MP 2016)*
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$ pour $x > 0$. Justifier l'existence et étudier la continuité de f.

Exercice 50 *(IMT MP 2019)*

Soient a et b des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $t \in]0,1]$, soit $f(t) = \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb+a}$.

Exercice 51 *(TPE MP 2019)*

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}\ln(x)x^{2n+2}$ si $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 52 *(IMT MP 2017)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$.

a) Calculer I_0, I_1 et I_2.

b) Déterminer la limite I de (I_n).

c) Trouver un équivalent de $I_n - I$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 53 *(IMT MP 2017)*

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}$.

a) Étudier l'intégrabilité de f sur $]0,1[$.

b) Exprimer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ comme somme d'une série.

c) Calculer I en utilisant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 54 *(TPE MP 2016)*

On définit la fonction par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que G continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*_+$.

b) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

c) Montrer que $G(x) - G'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 55 *(IMT MP 2016)*

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+t}\,dt$.

a) Montrer que F est bien définie et continue.

b) On pose $G(x) = F(x) - \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt$. Montrer que $G(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En déduire un équivalent de F en $+\infty$.

c) Donner un équivalent de F en 0^+.

Exercice 56 *(IMT MP 2019)*

Pour $x \in]-1,1[$, soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$. Développer f en série entière. Exprimer f au moyen des fonctions usuelles.

Exercice 57 *(IMT MP 2019)*

a) Développer $(1-x)^{-1/2}$ en série entière sur $]-1,1[$. On écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ce développement.

b) Donner un équivalent de a_n.

c) Trouver un équivalent en 1^- de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 58 *(IMT MP 2018)*
On définit $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

a) Montrer que pour out $n \geqslant 2$, $\frac{1}{3} n! \leqslant d_n \leqslant n!$.

b) En déduire le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

c) Trouver une équation différentielle vérifiée par S et en déduire S.

Exercice 59 *(IMT MP 2017)*
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} x^n$.

a) Trouver le rayon de convergence R de cette série entière.

b) La série converge-t-elle pour $x = R$? A-t-on convergence normale sur $]-R, R[$?

c) Justifier que S est dérivable sur $]-R, R[$. Exprimer $(1-x)S'(x)$ en fonction de $S(x)$.

d) En déduire $S(x)$.

Exercice 60 *(TPE MP 2016)*
Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$.

a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{b_n}{n!} x^n$.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ lorsque cela a un sens.

Exercice 61 *(TPE MP 2019)*
Trouver les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

Exercice 62 *(IMT MP 2019)*

a) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ sont les

$$x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t) e^{-\sqrt{t}} \mathrm{d}t \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Montrer qu'une seule des solutions admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 63 *(TPE MP 2016)*
Soit (S) le système différentiel $(2x' + y' - 3x - y = t, x' + y' - 4x - y = e^t)$. Écrire (S) sous la forme $X' = AX + B(t)$ où X est un vecteur colonne. Résoudre ce système.

Exercice 64 *(TPE MP 2016)*
Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x' & = & 5x + y - z \\ 2y' & = & x + 5y - z \\ z' & = & 2z \end{array} \right.$$

Exercice 65 *(IMT MP 2016)*
Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + z \\ y' & = & x \\ z' & = & x + y + z \end{array} \right.$$

Exercice 66 *(TPE MP 2019)*
La fonction f est définie sur $[0,1]^2$ par $f(1,1) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x,y) \neq (1,1)$,

a) Montrer que f est continue.

b) Déterminer le maximum de f.

Exercice 67 *(TPE MP 2016)*
Étudier les extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - 3y - 2$.

Exercice 68 *(TPE MP 2016)*
Étudier les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Exercice 69 *(TPE MP 2011)*
Soit $A > 0$. Quel est le maximum de xyz pour x, y, z dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x + y + z = A$? tels que $x + 2y + 3z = A$?

Exercice 70 *(TPE MP 2019)*
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

a) Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}\left((X-x)^2\right)$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $\mathrm{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 71 *(TPE MP 2019)*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $Z = X/Y$.

Exercice 72 *(IMT MP 2019)*
Dans un jardin de $n \geqslant 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0,[1$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit à l'année k, elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i. Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

a) Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.

b) Pour tout k, calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et en déduire la loi de X.

c) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 73 *(IMT MP 2018)*

a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

b) Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant e^{-2x}\mathbb{E}\left(e^{2X}\right)$.

Exercice 74 *(IMT MP 2018)*
Soit T une variable aléatoire de distribution uniforme sur $[\![1;6]\!]$, $X_1, \dots, X_6$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

a) Montrer que les X_k admettent une espérance finie et une variance puis les calculer.

b) On pose $Z(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{T(\omega)} (X_k(\omega) - 1)$. Montrer que Z est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 75 *(IMT MP 2016)*
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent les lois binomiales $B(n,p)$ et $B(n',p')$. À quelle condition $X+Y$ suit-elle une loi binomiale ? À quelle condition supplémentaire $n - X + Y$ suit-elle aussi une loi binomiale ?