

Mines - exercices classiques ou « simples »

Exercice 1 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit G un groupe commutatif de cardinal pq avec p, q deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique. Trouver un contre-exemple dans le cas où G n'est pas commutatif.

Exercice 3 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Soit $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \frac{su + us}{2}$. Déterminer les éléments propres de Φ puis étudier sa diagonalisabilité.

Exercice 4 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est $\text{Vect}(I_n, M, \dots, M^{n-1})$.

Exercice 5 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = (\text{tr } A)A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour quels entiers n existe-t-il de telles matrices A ?

Exercice 6 (Mines MP/MPI - 2021)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On suppose AB diagonalisable et inversible. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 7 (Mines MP/MPI - 2019)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .
2. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 8 (Mines MP/MPI - 2021)

$$\text{Soient } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer un réel d pour lequel $A^3 + dA = 0$.
2. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A^{2n} en fonction de n, d et A^2 .
3. Montrer que $\exp A = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ pour des réels α et β à déterminer.

Exercice 9 (Mines MP/MPI - 2016)

Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$, $A, B_1, \dots, B_p$ dans $M_n(\mathbb{C})$, $b_1, \dots, b_p$ des complexes distincts. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $A^k = \sum_{i=1}^p b_i^k B_i$.

1. Montrer que pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $B_i \in \mathbb{C}[A]$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Mines MP/MPI - 2019)

1. Soit φ un isomorphisme du groupe G sur le groupe H . Montrer que x est générateur de G si et seulement si $\varphi(x)$ est générateur de H .
2. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 11 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\ker u = \ker u^2$
 - (ii) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$
 - (iii) $\ker u \oplus \text{Im } u = E$.
2. En dimension infinie, donner des contre-exemples.
3. En dimension finie ou infinie, montrer que : (iii) $\iff$ ((i) et (ii)).

Exercice 12 (Mines MP/MPI - 2023)

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ un endomorphisme d'algèbre. Montrer que $\text{tr} \circ g = \text{tr}$.

Exercice 13 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx$. Justifier l'existence de f et trouver son minimum.

Exercice 14 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, H et K deux hyperplans de E , s_H et s_K les symétries orthogonales associées. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou si $H^\perp \subset K$.

Exercice 15 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit $a \in]0, 1[$. On définit (u_n) par $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) est définie et étudier sa convergence.
2. On pose $F : x \mapsto \int_a^x \frac{dt}{t^2 \ln t}$. Montrer que $F(u_{n+1}) - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
3. En déduire un équivalent de $F(u_n)$. Qu'en déduire sur u_n ?

Exercice 16 (Mines MP/MPI - 2019)

Soient f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.
2. Si f est dérivable en 0, que dire de $(u_n)_{n \geq 1}$?

Exercice 17 (Mines MP/MPI - 2018)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que f'^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 18 (Mines MP/MPI - 2019)

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx$ est-elle convergente?

Exercice 19 (Mines MP/MPI - 2024)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1 - t^2} dt$.

1. Montrer la convergence de I_n .
2. Étudier la convergence et la limite éventuelle de (I_n) .
3. Trouver un équivalent simple de I_n .

Exercice 20 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt$.

1. Donner le domaine de définition et étudier la continuité de f .
2. Donner une expression de $f(x)$.

Exercice 21 (Mines MP/MPI - 2013)

Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

Exercice 22 (Mines MP/MPI - 2023)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n(n+x)}}$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On note $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur les segments de la forme $[0, M]$ avec $M > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
3. Étudier la continuité de f . Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
4. Soient $n \geq 1$ et $x_0 \geq n$. Montrer : $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
5. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$.

Exercice 23 (Mines MP/MPI - 2024)

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$ pour tout n . Trouver u_n en considérant la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$.

Exercice 24 (Mines MP/MPI - 2024)

On considère l'équation différentielle (E) : $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et qui soit la somme d'une série entière.
2. Donner une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
3. À l'aide du changement de fonction inconnue $y = zf$, résoudre (E).

Exercice 25 (Mines MP/MPI - 2023)

1. Résoudre l'équation : $(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant des solutions développables en série entière.
2. Résoudre : $(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1 + t^2}$.

Exercice 26 (Mines MP/MPI - 2017)

Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de période 1 et y une solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y(k) = 0$.

Exercice 27 (Mines MP/MPI - 2024)

Extrema de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$.

Exercice 28 (Mines MP/MPI - 2018)

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que la fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x^2 - y^2)$ vérifie $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Exercice 29 (Mines MP/MPI - 2024)

Un magasin dispose d'un stock de N produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre λ et chaque client a une probabilité p d'acheter le produit. Quelle est la probabilité que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée?

Exercice 30 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 31 (Mines MP/MPI - 2018)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $D = \text{Diag}(X_1, \dots, X_n)$ et $M = PDP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Lois et espérance de $\text{tr}(M)$, $\det(M)$ et $\text{rg}(M)$?
2. Probabilité pour que les sous-espaces propres de M aient tous la même dimension?
3. Soit $U = (X_1, \dots, X_n)$ et $A = U^T U$. Donner la loi des coefficients de A . Donner la loi de $\text{tr}(A)$ et $\text{rg}(A)$.

Exercice 32 (Mines MP/MPI - 2016)

Pour un entier $n \geq 2$, on donne $M \in M_n(\mathbb{C})$ où m_{ij} sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, admettant une espérance. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$.

Mines

Exercice 33 (Mines MP/MPI - 2021)

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(M^k) = 0$.
2. Soient G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $M \in G$, $M^N = I_n$ et $(M_1, \dots, M_p)$ une base de $\text{Vect}(G)$. Montrer que l'application $A \in G \mapsto (\text{tr}(AM_1), \dots, \text{tr}(AM_p))$ est injective. Qu'en déduit-on sur G ?

Exercice 34 (Mines MP/MPI - 2018)

Soient m et n deux entiers strictement positifs. Trouver tous les morphismes de groupes de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 35 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient G un groupe fini et $\Omega = G^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme.

On pose : $C = \{(x, y) \in G^2; xy = yx\}$ et $p = \mathbf{P}(C)$.

1. Montrer que $p > 0$. Que dire si $p = 1$?
Dans la suite, on suppose que G n'est pas commutatif.
2. Calculer p lorsque $G = \mathcal{S}_3$ puis lorsque $G = \mathcal{S}_4$.
3. On définit la relation $\sim$ sur G^2 par : $x \sim y \iff \exists g \in G, x = gyg^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
4. On note s le nombre de classes d'équivalence. Montrer que : $p = \frac{s}{\text{card } G}$.

Exercice 36 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \text{SL}_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 37 (Mines MP/MPI - 2017)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, G une partie finie et non vide de $\text{GL}(E)$ stable par produit et $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.
2. Montrer que p est un projecteur d'image $E^G = \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}_E)$. En déduire une expression de $\dim E^G$.

Exercice 38 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^T J M = J\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.
2. Caractériser les éléments de $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap G$.

Exercice 39 (Mines MP/MPI - 2024)

1. Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Trouver une relation entre χ_{MN} et χ_{NM} .
2. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = (1 + a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on écrit $A^{-1} = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on pose enfin $S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{ij}$. Trouver une relation entre $\det A$, $\det B$ et S .

Exercice 40 (Mines MP/MPI - 2024)

Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble $\{M^k; k \in \mathbb{N}\}$ soit fini?

Exercice 41 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit F un plan stable par f . Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré au plus 2 tel que : $F \subset \ker P(f)$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré 2 divisant le polynôme minimal de f . Montrer qu'il existe un plan F stable par f tel que $F \subset \ker P(f)$.

Exercice 42 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur χ_u pour que les seuls sous-espaces stables par u soient $\{0\}$ et E .

Exercice 43 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de taille 1, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 44 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = j$ si $i \neq j$ et 0 sinon.

1. Calculer $\det(A + kI_n)$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
2. (a) Montrer que A a n valeurs propres distinctes.
(b) Pour λ valeur propre de A , montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
3. Déterminer la somme et le produit des valeurs propres de A .

Exercice 45 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f tel que 0 soit racine simple de P . Montrer que : $E = \text{Im } f \oplus \ker f$.
On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.
3. Soit $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer que $f_1, \dots, f_p$ sont cotrigonalisables.
4. Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Calculer $f_1 \circ \dots \circ f_n$.

Exercice 46 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
2. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
(a) λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ I_n & A^{-1}B \end{pmatrix}$,
(b) il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t} x$ soit solution de $Ay'' - By' - Cy = 0$.

Exercice 47 (Mines MP/MPI - 2021)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\Phi_a : P \in E \mapsto (X^2 - 1)P' - 2(nX - a)P$. Montrer que Φ_a est un endomorphisme de E . Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 48 (Mines MP/MPI - 2021)

Soient $n \geq 2$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ des réels non nuls. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

possède n valeurs propres

Exercice 49 (Mines MP/MPI - 2021)

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbb{N}^*$, $n = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); AM = MA\}$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\sum_{i=1}^r \alpha_i^2$.
2. Soit $C'(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); \forall M \in C(A), XM = MX\}$. Montrer que $C'(A) = \mathbb{C}[A]$.

Exercice 50 (Mines MP/MPI - 2021)

Pour toutes matrices A et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi_A(M) = \text{tr}(AM)$ et $f_A(M) = AM - MA$.

1. Montrer que l'application $(U, V) \mapsto \text{tr}(U^T V)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour toute forme linéaire ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \phi_A$.
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\ker(f_N) \subset \ker(\phi_N)$. Montrer qu'il existe une forme linéaire ψ telle que $\phi_N = \psi \circ f_N$.
4. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = BN - NB$.

Exercice 51 (Mines MP/MPI - 2019)

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer le spectre de la comatrice de A .

Exercice 52 (Mines MP/MPI - 2018)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si il existe n hyperplans $H_1, \dots, H_n$ de E , stables par f tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

Exercice 53 (Mines MP/MPI - 2012)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

- On suppose que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.
 - Montrer que B est nilpotente.
 - Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\text{tr}(BAM) = 0$.
 - En déduire que $BA = 0$.
- On suppose que $BA = 0$ et B nilpotente. Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Exercice 54 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, 2^n + 1 \equiv 0[n]\}$.

- Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A .
- Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3.

Exercice 55 (Mines MP/MPI - 2023)

- Soit $n > 6$ un entier. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.
- Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$.
Indication : Utiliser la première question avec $n = p_1 \cdots p_k$.

Exercice 56 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $uvu = u$ et $vuv = v$. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(v)$.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans E , F_1 un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ dans F . Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\ker v = F_1$, $\text{Im } v = E_1$, $uvu = u$ et $vuv = v$.

Exercice 57 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = \text{id}_E$.

- Montrer que E est de dimension infinie ou nulle.
- Montrer que f n'est pas nilpotent.
- Donner un exemple de triplet (E, f, g) vérifiant les conditions précédentes.

Exercice 58 (Mines MP/MPI - 2022)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 < p < n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\Phi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow Y$ est un isomorphisme de $\ker M$ sur $\ker(D - CA^{-1}B)$.
- En déduire que $\text{rg}(M) = p$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $p = \max\{\text{rg}(M), M \in V\}$. Le but des questions suivantes est de montrer que V est de dimension inférieure ou égale à np .
- Pourquoi peut-on supposer, sans perdre de généralité, que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à V ? On fait cette hypothèse dans la suite.
- Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}; A \in M_{n-p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R}) \right\}$. Montrer que $V \cap W = \{0\}$.
- Conclure.

Exercice 59 (Mines MP/MPI - 2018)

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F . On pose $N = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \ker(u^p)$ et $I = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \text{Im}(u^p)$.

- Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker(u^n)$ et $I = \text{Im}(u^n)$.
- Montrer que N et I sont supplémentaires et stables par u . Montrer que u_N est nilpotent et u_I est bijectif.
- Réciproquement, on suppose que $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u , u_F nilpotent et u_I bijectif. Montrer que $N = F$ et $I = G$.

Exercice 60 (Mines MP/MPI - 2017)

Soient $E = \mathbb{K}^n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer l'équivalence entre :

(a) $f^2 = 0$

(b) il existe $g, h \in \mathcal{L}(E)$, $g \circ h = f$ et $h \circ g = 0$.

2. Pour $n = 3$, on prend $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer g et h .

Exercice 61 (Mines MP/MPI - 2011)

Soit E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On suppose $\dim E = \dim F$. Montrer que f est un isomorphisme si, et seulement si, $\forall g \in \mathcal{L}(F, E)$, $f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$.

2. On note $\mathcal{A}(f) = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}$. Montrer que $\mathcal{A}(f)$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

Exercice 62 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls de même module tels que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k - z_i \right|$.

Calculer $\left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right)$.

Exercice 63 (Mines MP/MPI - 2024)

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est stochastique si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(tA)$ soit stochastique pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 64 (Mines MP/MPI - 2024)

1. Soient $n \geq 2$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers telle que, pour tout i , $b_{i,i}$ soit impair et, pour tout (i, j) avec $i \neq j$, $b_{i,j}$ soit pair. Montrer que B est inversible.

2. La propriété est-elle encore vérifiée lorsqu'on intervertit « pair » et « impair »?

Exercice 65 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_n$.

Soit (E) l'équation matricielle $X^2 = A$.

1. Quelles sont les matrices qui commutent avec N ?

2. Montrer que les solutions de (E) sont de la forme $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il y a au plus deux solutions.

3. Rappeler le développement limité à l'ordre n de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Résoudre (E) .

Exercice 66 (Mines MP/MPI - 2021)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectorielle.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $\ell \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker \ell$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto \text{tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.
3. Montrer que

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible. Calculer $\text{tr}(J_r C)$.

4. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 67 (Mines MP/MPI - 2018)

Soit N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{K})$. Comparer $\ker N$ et $\ker(\exp(N) - I_n)$

Exercice 68 (Mines MP/MPI - 2013)

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $A \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle. Montrer l'équivalence entre

1. A est inversible,
2. pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\text{rg}(AM) = \text{rg}(MA)$.

Exercice 69 (Mines MP/MPI - 2012)

Soit $n \geq 2$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Déterminer le sous-espace engendré par $\mathcal{N}$.

Exercice 70 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient $n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. On pose $N = 2^n - 1$ et $E_1, \dots, E_N$ les parties non vides de E . Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, et 0 sinon. Calculer $\det A$.

Exercice 71 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $(f_1, \dots, f_p)$ est libre,
- ii) l'application $\varphi : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est surjective de E sur $\mathbb{C}^p$,
- iii) il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}) \neq 0$.

Exercice 72 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit P un polynôme à coefficients complexes.

1. Donner la décomposition en éléments simples de P'/P .
2. Montrer que l'enveloppe convexe des racines de P' est incluse dans l'enveloppe convexe des racines de P . Que dire si P est un polynôme à coefficients réels scindé dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que si un demi-plan fermé H contient une racine de P' alors H contient une racine de P .

Exercice 73 (Mines MP/MPI - 2023)

1. Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.
2. Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $2 \cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 74 (Mines MP/MPI - 2023)

On pose $B_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \frac{1}{k!} X(X-1) \dots (X-k+1)$.

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(B_0, \dots, B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\exp(2i\pi P(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(n) - [P(n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 75 (Mines MP/MPI - 2023)

1. Soit P un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant avec $\deg(P) \leq 2k-1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité k . Montrer que α est rationnel.

Exercice 76 (Mines MP/MPI - 2013)

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P(X)}{X(X-1)\cdots(X-n)}$. En déduire que

$$\max_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} |P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Exercice 77 (Mines MP/MPI - 2017)

Soit E un espace euclidien de dimension n . La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$.

1. Montrer que si $(x_1, \dots, x_p)$ est *obtusangle* et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont des réels quelconques, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\|$$

En déduire que $p \leq n + 1$.

2. Montrer qu'il existe une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires vérifiant $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.
3. Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires vérifiant $\langle u_i, u_j \rangle = \alpha < 0$ si $i \neq j$ alors $\alpha = -\frac{1}{n}$.

Exercice 78 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit (a, b, x_0) une famille libre d'un espace euclidien E . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$.

Exercice 79 (Mines MP/MPI - 2019)

Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non nuls de E . Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $f(x) = \frac{\langle x, a \rangle \langle x, b \rangle}{\|x\|^2}$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f .

Exercice 80 (Mines MP/MPI - 2012)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, r la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par un vecteur unitaire u et s une symétrie orthogonale de E . Reconnaître $s \circ r \circ s$.

Exercice 81 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(Me_1, \dots, Me_n)$ soit orthogonale.

Exercice 82 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit k un réel fixé. On pose $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\max_{\lambda \in \text{Sp} A} \lambda \geq k + 1$ et $\min_{\lambda \in \text{Sp} A} \lambda \geq k - 1$.

Exercice 83 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A(a, b, c)$ est dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme $X^3 - X^2 + t$ où t appartient à un intervalle I que l'on déterminera.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer une droite et un plan stables par $A(a, b, c)$.
3. Si $A(a, b, c) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, caractériser l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 84 (Mines MP/MPI - 2018)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que AA^T et $A^T A$ ont même polynôme caractéristique.
2. Montrer que AA^T et $A^T A$ sont semblables.

Exercice 85 (Mines MP/MPI - 2024)

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'|$.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, N_a est une norme.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes?

Exercice 86 (Mines MP/MPI - 2024)

On munit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des points distincts de $[a, b]$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels. Montrer que l'adhérence de l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X]; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i\}$ est $\{f \in E; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_i) = y_i\}$.

Exercice 87 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . Soit $f : x \in E \mapsto d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$.

1. Montrer que f est 1-lipschitzienne.
2. Montrer que A est fermé si et seulement si $A = f^{-1}(\{0\})$.
3. Montrer que tout fermé de E est intersection décroissante d'ouverts.
4. Montrer que tout ouvert est union croissante de fermés.

Exercice 88 (Mines MP/MPI - 2023)

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Si $f \in E$, on pose $u(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right)$.

1. Montrer que u est bien définie sur E .
2. Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 89 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel, $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $\inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\|; (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\} > 0$
2. En déduire que l'ensemble des $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tels que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre est un ouvert de E^p . Retrouver ce résultat plus simplement si E est de dimension finie.

Exercice 90 (Mines MP/MPI - 2023)

Lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $S_n(J) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{Sp}(M) \subset J\}$.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $S_n(I)$ est convexe.
2. Montrer que $S_n(\bar{I}) = \overline{S_n(I)}$.

Exercice 91 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image réciproque par f de tout compact est compacte si et seulement si $|f(x)| \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Exercice 92 (Mines MP/MPI - 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k \geq 0}$ et $(B_k)_{k \geq 0}$ deux suites d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B .

1. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont semblables. Les matrices A et B sont-elles semblables?
2. Que dire si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont orthogonalement semblables?

Exercice 93 (Mines MP/MPI - 2019)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel, K un compact non vide de E , f une application de K dans K telle que $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on note x .
2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Exercice 94 (Mines MP/MPI - 2018)

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte d'intérieur non vide de E . Montrer que $\{u \in \mathcal{L}(E), u(K) \subset K\}$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 95 (Mines MP/MPI - 2017)

1. Montrer que l'application $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $S(A) = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est fermé. Réciproque?
3. Montrer que si A est nilpotente alors $0 \in \overline{S(A)}$. Réciproque?
4. Caractériser les matrices A pour lesquelles $S(A)$ est bornée.

Exercice 96 (Mines MP/MPI - 2013)

On admet le résultat suivant : si (u_n) est une suite positive telle que, pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+l} \leq u_k u_l$, alors la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ est convergente. On munit $M_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ d'opérateur.

1. Montrer que la suite $(\|A^k\|^{1/k})$ converge. On note $\rho(A)$ sa limite.
2. Soit N une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $(N(A^k)^{1/k})$ converge vers $\rho(A)$.
3. Montrer que, pour tout A, B dans $M_n(\mathbb{C})$, $\rho(AB) = \rho(BA)$.
4. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que $\rho(A) = \max |\text{Sp}(A)|$.
5. On suppose toujours A diagonalisable. Montrer l'équivalence entre
 - (a) $A^k \rightarrow 0$
 - (b) $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{C}), A^k X \rightarrow 0$
 - (c) $\rho(A) < 1$.

Exercice 97 (Mines MP/MPI - 2012)

Pour $p \geq 1$, on pose $Q_p = pX^p - (X^{p-1} + \dots + X + 1)$.

1. Montrer que 1 est racine simple de Q_p .
2. Montrer que toute racine de Q_p différente de 1 est de module strictement inférieur à 1.
3. Montrer que Q_p n'admet que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_p(A) = 0$. Convergence et limite éventuelle de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$?

Exercice 98 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si $x \mapsto \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ possède une limite quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 99 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $h(x) \int_0^x h^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Déterminer un équivalent de h en $+\infty$.

Exercice 100 (Mines MP/MPI - 2018)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. On suppose que f et f'' sont bornées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Montrer que $\|f'(x)\| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\|f''\|_\infty$.
2. Montrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty^2 \leq 4\|f\|_\infty\|f''\|_\infty$.

Exercice 101 (Mines MP/MPI - 2011)

Soient f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans lui-même telles que $f \circ g = g \circ f$. Soit A l'ensemble des points fixes de f .

1. Montrer que A contient un plus grand et un plus petit élément.
2. Montrer qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 102 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ et $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\{e^{if(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.

Exercice 103 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On dit que (u_n) est équirépartie si et seulement si, pour tous $\alpha < \beta$ dans $[0, 1]$, on a $\frac{1}{n} \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha < u_k < \beta\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha$.

1. On suppose (u_n) équirépartie. Montrer que (u_n) diverge. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[0, 1]$.
2. Montrer l'équivalence entre :

- i) (u_n) est équirépartie,
- (ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt$,
- (iii) $\forall m \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m u_k} = 0$.

Exercice 104 (Mines MP/MPI - 2024)

Étudier la convergence de la série $\sum \sin(\pi e n!)$.

Exercice 105 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Montrer que $\sum f(k)$ converge et donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 106 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

Exercice 107 (Mines MP/MPI - 2024)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$.

Exercice 108 (Mines MP/MPI - 2023)

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge aussi.
2. Soit $\sum y_n$ une série à termes complexes telle que, pour toute suite (x_n) qui tend vers 0, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum |y_n|$ converge.

Exercice 109 (Mines MP/MPI - 2022)

Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule pas, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Discuter la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 110 (Mines MP/MPI - 2022)

1. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \geq 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
3. Quelle est la nature de $\sum R_n$?

Exercice 111 (Mines MP/MPI - 2021)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} + e^{-x}$ et l'équation $(E_n) \quad f(x) = n$.

1. (a) Montrer que, pour n assez grand, (E_n) possède deux solutions $a_n < 0 < b_n$.
(b) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent et donner leurs limites.
2. (a) Trouver A et α tels que $a_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.
(b) Donner un équivalent de $a_n - \frac{A}{n^\alpha}$.
3. (a) Trouver un équivalent simple β_n de b_n .
(b) Donner un équivalent de $b_n - \beta_n$.

Exercice 112 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ avec $a_1 + a_2 > 0$ et, pour $n \geq 2$, $a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n a_k$. Discuter de la convergence (a_n) en fonction de α .

Exercice 113 (Mines MP/MPI - 2017)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 114 (Mines MP/MPI - 2016)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}$.

1. Déterminer la limite de la suite.
2. Déterminer un équivalent de la suite.

Exercice 115 (Mines MP/MPI - 2012)

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k}$. Étudier les suites $(S_n^p)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Exercice 116 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\forall x > 0, \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x).$$

2. (a) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note $x_{i,n} = \frac{ix}{n}$. Montrer que $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n} (f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \longrightarrow \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.
 (b) Montrer l'égalité vue en a).

3. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et bijective. Montrer que $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$.

Exercice 117 (Mines MP/MPI - 2024)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = \phi(1) = 0$, l'on ait $\int_0^1 f(t)\phi(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
 2. Soient maintenant $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = \phi(1) = 0$, l'on ait $\int_0^1 f(t)\phi(t) dt = \int_0^1 g(t)\phi'(t) dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 118 (Mines MP/MPI - 2024)

Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est définie, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 119 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\right) - 1 \right) dx$.

Exercice 120 (Mines MP/MPI - 2016)

1. Soit $u \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^u |\sin(\lambda t)| dt$.
 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt$.

Exercice 121 (Mines MP/MPI - 2012)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $\phi(f)$ par $\phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
 2. Déterminer les éléments propres de ϕ .

Exercice 122 (Mines MP/MPI - 2023)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t}) dt$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

Exercice 123 (Mines MP/MPI - 2023)

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et intégrables, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{C}$ continues telles que, pour tout $s > 0$, la fonction $u \mapsto \frac{f(u)}{u+s}$ est intégrable. Si $f \in \mathcal{E}$, on pose $\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} du$ pour tout $s > 0$.

1. Quelles inclusions existent entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$?
 2. Dans cette question, on suppose que $f(u) = u^{\alpha-1}$, où $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\widehat{f}_\alpha$ est proportionnelle à f_α .
 3. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $\widehat{f}$ est continue, et déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \widehat{f}(s)$.

Exercice 124 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}} dt$.

1. Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que I est C^2 sur $\mathbb{R}^{++}$ et vérifie l'équation différentielle $(E) : 2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E) .
4. Donner l'expression de $I(x)$.

Exercice 125 (Mines MP/MPI - 2015)

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F puis montrer que F est continue sur ce domaine. Étudier la monotonie de F .
2. Trouver la limite de F en $+\infty$ et donner un équivalent de F en $+\infty$.
3. Trouver la limite de F en 0 et donner un équivalent de F en 0.
4. Étudier la convexité de F .

Exercice 126 (Mines MP/MPI - 2024)

Pour $n \geq 0$, soit $u_n : x \mapsto \prod_{i=0}^n \frac{1}{x+i}$.

1. Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{++}$.
2. Exprimer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ et de x .

Exercice 127 (Mines MP/MPI - 2022)

Montrer que $h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{nh}} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \ln(2)$.

Exercice 128 (Mines MP/MPI - 2018)

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f tende vers 0 en $+\infty$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$.
2. Montrer que f est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$.
3. Calculer $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 129 (Mines MP/MPI - 2017)

Soit $q \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - q^k x)$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa limite.
2. Montrer que f est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - qx)f(qx)$.
3. Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 130 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que la série $\sum na_n$ converge absolument. On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est ≥ 1 .
2. On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.

Exercice 131 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k!}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq \frac{1}{\ln^n(2)}$.
2. Montrer que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence R non nul et que $\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{2 - e^x}$.
3. En déduire une expression sommatoire explicite de b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 132 (Mines MP/MPI - 2024)

Déterminer un équivalent de $p(n) = \text{card} \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x + 2y + 3z = n\}$.

Exercice 133 (Mines MP/MPI - 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{\substack{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ i+j=n}} \frac{1}{i^2 j^2}$.

1. Déterminer un équivalent de u_n .
2. Donner le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$.

Exercice 134 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit y une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $xy'' + y' + xy = 0$,

1. On pose : $\forall x > 0, u(x) = \sqrt{x}y(x)$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.
2. Montrer que $\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2} dx = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$ avec v vérifiant $v'' + v = 0$.
3. Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $x_a \in [a, a + \pi[$ tel que $y(x_a) = 0$.
4. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinité de fois.

Exercice 135 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ et une application X de classe $\mathcal{C}^1$ non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(t)X(t)$ et $X(t+T) = \lambda X(t)$.

Exercice 136 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un espace euclidien, $u : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(E)$ dérivable. Montrer l'équivalence entre :

- (i) $\forall s, t \in \mathbb{R}, u(s+t) = u(s)u(t)$,
- (ii) $\exists a \in \mathcal{A}(E), \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{at}$.

Exercice 137 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit f une fonction de classe C^2 de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'' + f \geq 0$. Quel est le signe de $\int_0^{2\pi} f$?

Exercice 138 (Mines MP/MPI - 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A, B] = AB - BA$, on suppose que A et B commutent avec $[A, B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $A^k B - B A^k = k A^{k-1} [A, B]$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
3. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A, B]}{2}}$.

Exercice 139 (Mines MP/MPI - 2024)

Déterminer le domaine de définition de $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}$. Est-elle continue? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 140 (Mines MP/MPI - 2024)

On pose $f(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$. Étudier la continuité et la différentiabilité de f .

Exercice 141 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient E un espace euclidien, $\varphi \in E^*$ une forme linéaire et $f : x \mapsto \varphi(x) e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f .

Exercice 142 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit $K \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation $x \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) - y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = K f(x, y)$.

Exercice 143 (Mines MP/MPI - 2023)

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose : $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T A X - 2B^T X$.

1. Calculer $\nabla f(X)$.
2. Montrer que f admet un minimum global et le déterminer.
3. Soit (X_k) une suite de vecteurs non nuls vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = X_k - \frac{\|\nabla f(X_k)\|}{X_k^T A X_k} \nabla f(X_k)$. On suppose que la suite (X_k) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 144 (Mines MP/MPI - 2024)

On lance N dés. À chaque tour, on relance ceux qui n'ont pas donné 6 lors des tours précédents. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre total de dés ayant donné 6 au cours des n premiers tours.

1. Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (S_n = N)\right) = 1$.
3. On pose $T_N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = N\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
 - (a) Donner la loi de T_N .
 - (b) Montrer que T_N admet une espérance et la calculer.

Exercice 145 (Mines MP/MPI - 2024)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement en série entière de $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)^n}$.
2. En déduire que $\text{card}\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n, k_1 + \dots + k_n = s\} = \binom{s+n-1}{n}$.
3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (X_1 + \dots + X_n = s)\right)$.

Exercice 146 (Mines MP/MPI - 2024)

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire telle que : $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = \frac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 147 (Mines MP/MPI - 2024)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$.
2. Montrer que φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que φ_X détermine la loi de X .

Exercice 148 (Mines MP/MPI - 2024)

Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{G}(p)$ et N une variable indépendante des X_i qui suit la loi $\mathcal{G}(q)$. Soit $S = \sum_{k=1}^N X_k$. Montrer que S est une variable aléatoire et déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 149 (Mines MP/MPI - 2023)

On lance une pièce jusqu'à obtenir deux piles de plus que de faces ou deux faces de plus que de piles. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité que la pièce donne pile. On note X la variable aléatoire associée au nombre de lancers. Déterminer la loi de X et montrer que X est presque sûrement finie. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie?

Exercice 150 (Mines MP/MPI - 2023)

Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape, elle saute aléatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce à l'étape n . Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.

Exercice 151 (Mines MP/MPI - 2023)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ que l'on déterminera tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \alpha\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 152 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p \leq n-1$. On extrait simultanément p boules d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Soit X la variable aléatoire donnant le maximum des numéros tirés. Déterminer la loi de X . Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 153 (Mines MP/MPI - 2021)

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(2/3)$. Soit $T = \min\{k \geq 2, X_k = X_{k-1} = 1\}$. Calculer l'espérance de T .

Exercice 154 (Mines MP/MPI - 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Déterminer $\mathbf{P}(A \subset B)$.