

## Exercices à préparer

Mardi 19 mai (13h-15h)

**Exercice 1** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente. Montrer que  $G = \{P(N), P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } P(0) = 1\}$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 2** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension 3. Soient  $f, g \in \text{SO}(E)$ .

- On suppose qu'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $f(x) = g(x) = x$ . Montrer que  $f$  et  $g$  commutent.
- On suppose que  $f$  et  $g$  commutent. Montrer que l'une des deux propositions suivantes est vraie :
  - il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $f(x) = g(x) = x$ ,
  - $f$  et  $g$  sont des symétries orthogonales par rapport à deux droites orthogonales entre elles.

**Exercice 3** (Centrale MP/MPI 2024)

Notons  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $\infty$ . Pour  $f \in \mathcal{C}$ , notons  $Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$  si  $x \in [0, 1[$  et  $Af(1) = 0$ .

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  soit convergente. La démontrer.
- Justifier que, pour tout  $f \in \mathcal{C}$ ,  $Af$  est correctement définie.
- Montrer que, pour tout  $f \in \mathcal{C}$ ,  $Af \in \mathcal{C}$ .
- Montrer que  $A$  est un endomorphisme continu de  $\mathcal{C}$ ; calculer sa norme subordonnée.
- Étudier la dérivabilité de  $Af$  pour une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 4** (Mines MP 2011)

Déterminer la limite de la suite  $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ .

**Exercice 5** (Mines MP/MPI 2025)

Soient  $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  et  $\ell \in \mathbb{R}^*$ . On suppose que :  $f(x) \int_0^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ . Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 6** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \frac{xy}{\sqrt{2}}$ . Déterminer les extrema de  $f$  et préciser leur nature.

Mercredi 20 mai (8h-10h)

**Exercice 7** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $Y$  une colonne de  $\mathbb{C}^{n-1}$  non nulle,  $z \in \mathbb{C}$  et  $\alpha = Y^T Y \in \mathbb{C}$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^T & z \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $\chi_A$  s'écrit  $X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$ . Calculer  $\lambda + \mu$  et  $\lambda^2 + \mu^2$  et en déduire  $\chi_A$  en fonction de  $\alpha, z$  et  $n$ .
- Discuter du rang de  $A^2$ . Déterminer le polynôme minimal de  $A$  selon que  $\alpha$  est nul ou non.

**Exercice 8** (Mines MP/MPI 2023)

- Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$  vérifiant :  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$ . Montrer que  $f$  est proportionnelle à la trace.
- Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  un endomorphisme d'algèbre. Montrer que  $\text{tr} \circ g = \text{tr}$ .

**Exercice 9** (Mines MP 2012)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $p \leq n$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On suppose que pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2$ .

- Montrer que  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , que  $p = n$  puisque  $\|e_i\| \leq 1$  pour tout  $i$ .
- Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Montrer que  $e_i$  est orthogonal à tous les  $e_k$  pour  $k \neq i$ , puis que  $\|e_i\| = 1$ . En déduire que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée.

**Exercice 10** (Mines MP/MPI 2025)

Soit (\*) l'équation différentielle  $2xy'' + y' - y = 0$ .

- Trouver une solution  $f$  de (\*) développable en série entière au voisinage de 0 et telle que  $f(0) = 1$ .
- Exprimer  $f$  à l'aide de fonctions usuelles.
- Déterminer toutes les solutions de (\*).

**Exercice 11** (Mines MP/MPI 2024)

Calculer  $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$ .

Jeudi 28 mai (10h-12h)

**Exercice 12** (Mines MP/MPI 2023)Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non nulles et  $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \text{tr}(AM)B$ .

- Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de  $f$ .
- Étudier la diagonalisabilité de  $f$ .

**Exercice 13** (Centrale MP/MPI 2024)Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{GL}(E)$ ,  $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ ,  $V^G = \{x \in E; \forall g \in G, g(x) = x\}$ .

- Montrer que, si  $h \in G$ ,  $g \in G \mapsto h \circ g \in G$  est une bijection de  $G$  sur lui-même, puis que  $p$  est un projecteur.
- Montrer que  $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum \text{tr}(g)$ .
- Montrer que tout sous-espace  $V$  de  $E$  stable par tous les éléments de  $G$  admet un supplémentaire stable par tous les éléments de  $G$ . On pourra partir d'un projecteur  $q$  de  $E$  sur  $V$  et considérer  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$ .

**Exercice 14** (Mines MP/MPI 2025)Soit  $(a_n)$  définie par  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ , et, pour  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ .

- Montrer que, pour tout  $n$ ,  $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$ .
- Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{4a_k^2}\right)$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $a_n$  et  $a_{n+1}$ .
- Montrer que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{12}$ .

**Exercice 15** (Mines MP 2012)Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on définit  $\phi(f)$  par  $\phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t)f(t) dt$ .

- Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- Déterminer les éléments propres de  $\phi$ .

**Exercice 16** (Mines MP/MPI 2025)On munit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une norme sous-multiplicative.

- Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall X \in E, |\text{tr} X| \leq C \|X\|$ .
- Montrer que  $g : X \mapsto X^2$  est différentiable sur  $E$  et calculer sa différentielle.
- Montrer que  $f : X \mapsto \text{tr} X^2$  est différentiable sur  $E$  et calculer sa différentielle.
- Montrer que :  $\forall (A, B) \in E^2, |\text{tr} A^2 - \text{tr} B^2| \leq 2C \max(\|A\|, \|B\|) \|A - B\|$ .

**Exercice 17** (Mines MP/MPI 2025)Soient  $n, p \in \mathbb{N}$  avec  $1 \leq p < n$ . On considère une urne contenant  $p$  boules blanches et  $n - p$  boules noires. On effectue des tirages sans remise des boules de l'urne. Donner la loi et l'espérance de la variable donnant le rang de la dernière boule blanche tirée.

Mercredi 3 juin (10h-12h)

**Exercice 18** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $A$  est semblable sur  $\mathbb{R}$  à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de taille 1, soit de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 19** (Centrale MP/MPI 2024)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S_n$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  dont toutes les racines complexes ont un module majoré par 1. Soit  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in S_n$ . On note  $z_1, \dots, z_n$  les racines de  $P$  éventuellement confondues.

- a) i) Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.  
 ii) Montrer que  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, |a_k| \leq \binom{n}{k}$ .  
 iii) Conclure que  $S_n$  est fini.

b) Montrer que  $P$  est le polynôme caractéristique de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

- i) Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists Q_p \in S_n, \forall 1 \leq i \leq n, Q_p(z_i^p) = 0$ .  
 ii) Conclure que les racines non nulles de  $P$  sont de module 1.

**Exercice 20** (Mines MP/MPI 2025)

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  avec  $n \geq p$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que  $\text{rg}(A) = p$ .

- a) Montrer que la fonction  $f : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \|Ax - b\|_2$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^p$  atteint en un unique  $x_0 \in \mathbb{R}^p$ .  
 b) Montrer que  $x_0$  est l'unique solution de  $A^T Ax = A^T b$ .

**Exercice 21** (Mines MP/MPI 2025)

Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $N_a(P) = |P(a)| + \max\{|P'(x)|, x \in [-1, 1]\}$ .

- a) Justifier que  $N_a$  est une norme.  
 b) Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $N_a$  et  $N_b$  sont-elles équivalentes?

**Exercice 22** (Centrale MP/MPI 2024)

Soit  $f : t \in [0, \pi/2[ \mapsto -\ln(\cos(t))$ .

- a) Montrer que  $f(t) \geq t^2/2$  pour tout  $t \in [0, \pi/2[$ .  
 b) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

i) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right) dx$ .

ii) Donner un équivalent de  $I_n = \int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ .

Jeudi 4 juin (8h-10h)

**Exercice 23** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soit  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

- Étudier la diagonalisabilité de  $B$ .
- Étudier le rang de  $B - I_{2n}$ .

**Exercice 24** (Centrale MP/MPI 2024)

Pour  $a \in \mathbb{Z}$ , on pose  $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.
- Montrer que  $GL_2(\mathbb{Z})$  (ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) est un groupe et que  $S_a, T_a \in GL_2(\mathbb{Z})$  pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ .
- Que vaut  $T_b S_a T_b^{-1}$  pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ ?
- Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  de polynôme caractéristique  $X^2 - 1$ . Montrer qu'il existe  $P \in GL_2(\mathbb{Z})$  tel que  $M = PS_0P^{-1}$  ou  $M = PS_1P^{-1}$ .

**Exercice 25** (Centrale MP 2018)

Soit  $\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto P(0)Q(0) + \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

- Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.  
On se place désormais dans l'espace préhilbertien  $(\mathbb{R}[X], \varphi)$ .
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ .
- On pose  $F = \{Q \in \mathbb{R}[X], Q(0) = 0\}$ . Montrer que l'inclusion précédente est stricte.

**Exercice 26** (Mines MP 2022)

- Montrer que, si  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \geq 0$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier l'existence de  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ .
- Quelle est la nature de  $\sum R_n$ ?

**Exercice 27** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $(X_n)_n \geq 1$  une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

- Calculer la fonction génératrice associée à une loi de Poisson.
- Montrer que  $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ .
- Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$ .
- Soit  $x > 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-\lambda n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \lambda, \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$
- Si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue et nulle en dehors d'un segment, on pose  $\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ . Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f$ .

Lundi 8 juin (13h-15h)

**Exercice 28** (Centrale MP 2021)Soient  $n \geq 3$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $\text{Com}(A)^T A = \det(A)I_n$ .
- Déterminer le rang de  $\text{Com}(A)$  en fonction de celui de  $A$ .
- Résoudre  $\text{Com}(A) = A$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 29** (Centrale MP/MPI 2024)Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), I_n + M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ .

- Montrer que  $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$  est un groupe.
- Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \Omega$ .  
On pose  $f : M \in \Omega \rightarrow (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ .
- Montrer que, pour tout  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \Omega$ ,  $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $f(f(M)) = M$ .
- Montrer que, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe une matrice diagonale  $J$  à coefficients diagonaux dans  $\{-1, 1\}$  telle que  $\det(M + J) \neq 0$ .  
*Indication* : on pourra faire une récurrence et comparer deux déterminants.
- Soit  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice diagonale  $J$  à coefficients diagonaux dans  $\{-1, 1\}$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = Jf(A)$ .

**Exercice 30** (Centrale MP/MPI 2025)

- Énoncer les théorèmes de changement de variable et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \cos(P(t))dt$  converge.
- Montrer que  $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$  n'est pas absolument convergente.

**Exercice 31** (Mines MP/MPI 2025)Soient  $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}), f(0) = f(1) = 0\}$  et  $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ .

- Montrer que  $\Delta : f \rightarrow f''$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .
- Pour  $g \in F$ , on pose  $G : x \in [0, 1] \rightarrow \int_0^1 |x - t|g(t)dt$ . Montrer que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et calculer  $G''$ .
- En déduire une fonction de deux variables  $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall g \in F, \forall x \in [0, 1], \Delta^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x, t)g(t)dt.$$

**Exercice 32** (Mines MP/MPI 2024)Soient  $T \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $A$  une application continue et  $T$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^*$  et une application  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$  non identiquement nulle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}^n$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'(t) = A(t)X(t)$  et  $X(t + T) = \lambda X(t)$ .

Jeudi 11 juin (8h-10h)

**Exercice 33** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

- Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  tels que  $uvu = u$  et  $vuv = v$ . Montrer que  $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(v)$ .
- Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $E_1$  un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ ,  $F_1$  un supplémentaire de  $\text{Im}(u)$  dans  $F$ . Montrer qu'il existe un unique  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $\ker v = F_1$ ,  $\text{Im } v = E_1$ ,  $uvu = u$  et  $vuv = v$ .

**Exercice 34** (Centrale MP 2021)

- Montrer qu'il existe une unique suite  $(H_n)$  de polynômes tels que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)t^n.$$

- Montrer que  $H'_n = H_{n-1}$  et  $(n+1)H_{n+1} = xH_n - H_{n-1}$ .
- Montrer que les  $H_n$  forment une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$  pour le produit scalaire  $(P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2} dx$ .

**Exercice 35** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^T A = A A^T$ . Montrer que si  $F$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  stable par  $A$  alors  $F^\perp$  est stable par  $A^T$ . On suppose  $n = 3$ . Montrer que  $A$  est soit diagonalisable, soit semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  avec  $\beta \neq 0$ .

**Exercice 36** (Centrale MP/MPI 2023)

Pour  $n \geq 1$ , on note  $t_n$  le nombre de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  telles que  $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$ . On convient que  $t_0 = 1$ .

- Montrer que la série entière  $\sum \frac{t_n}{n!} x^n$  a un rayon de convergence  $\geq 1$ .
- Calculer  $t_1, t_2, t_3$ . Montrer que, si  $n \geq 2$ ,  $t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$ .
- Déterminer  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$  pour  $x \in ]-1, 1[$ . En déduire une expression de  $t_n$  sous forme de somme. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{n!}$ .

**Exercice 37** (Mines MP/MPI 2024)

- Montrer qu'il existe une variable aléatoire telle que :  $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = \frac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}$ .
- Calculer  $\mathbf{E}(X)$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

Mercredi 17 juin (10h-12h)

**Exercice 38** (Mines MP 2022)

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$  avec  $1 < p < n$ . Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que  $\Phi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow Y$  est un isomorphisme de  $\ker M$  sur  $\ker(D - CA^{-1}B)$ .

b) En déduire que  $\text{rg}(M) = p$  si et seulement si  $D = CA^{-1}B$

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $p = \max\{\text{rg}(M), M \in V\}$ . Le but des questions suivantes est de montrer que  $V$  est de dimension inférieure ou égale à  $np$ .

c) Pourquoi peut-on supposer, sans perdre de généralité, que  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  appartient à  $V$ ? On fait cette hypothèse dans la suite.

d) Soit  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}; A \in M_{n-p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R}) \right\}$  Montrer que  $V \cap W = \{0\}$

e) Conclure.

**Exercice 39** (Mines MP/MPI 2025)

Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contient toutes les valeurs propres de  $A$  et  $B$ , alors  $I$  contient également les valeurs propres de  $(1-t)A + tB$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Exercice 40** (Centrale MP/MPI 2023)

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

a) Pour tout  $x \in E$ , exprimer la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  à l'aide d'une base orthonormale de  $F$ . Justifier la formule.

b) On définit la fonction  $d_F : E \setminus F \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$ . Montrer que  $d_F$  est différentiable, et calculer sa différentielle.

**Exercice 41** (Mines MP/MPI 2024)

Montrer que  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$  est définie, continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 42** (Mines MP/MPI 2024)

On pose  $f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$ .

a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

b) Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)}$ .

c) Déterminer un équivalent simple de  $f$  en  $+\infty$ .

d) Déterminer un équivalent simple de  $f$  en  $0^+$ .

e) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$  sur les parties du domaine de définition de  $f$ .

## Autres exercices

**Exercice 43** (Centrale MP)

Soit  $SL_2(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices de  $M_2(\mathbb{Z})$  de déterminant 1. Vérifier que  $SL_2(\mathbb{Z})$  est un sous-groupe pour la multiplication matricielle. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

engendrent ce groupe.

**Exercice 44** (Centrale MP/MPI 2024)

Un entier  $n \geq 2$  est un faux premier (FP) s'il n'est pas premier et si, pour tout  $a \in \mathbb{Z}$  premier à  $n$ ,  $a^{n-1} \equiv 1[n]$ .

- Montrer que, si  $n$  est FP,  $n$  est impair.
- On suppose que  $n$  s'écrit  $\prod_{i=1}^r p_i$  où  $r \geq 2$ , les  $p_i$  sont des nombres premiers impairs distincts tels que, pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $p_i - 1$  divise  $n - 1$ . Montrer que  $n$  est FP.
- On admet que, pour tout  $p$  premier impair et tout  $v \in \mathbb{N}^*$ , le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^\times$  est cyclique. En déduire la réciproque de la question précédente.

**Exercice 45** (Centrale MP/MPI 2023)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{P}(n)$  l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$  et  $P_n = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p$ .

- Montrer que  $\forall n \geq 2$ ,  $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$ .
- Montrer que  $\forall n \geq 1$ ,  $\binom{2n+1}{n} < 4^n$ .
- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{2n+1} < 4^n P_{n+1}$ .

**Exercice 46** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $n$ . On appelle caractère de  $G$  tout morphisme de groupes  $\chi$  de  $G$  vers  $\mathbb{C}^*$ . On note  $\widehat{G}$  le groupe des caractères de  $G$ .

- Montrer que  $\widehat{G}$  est un groupe multiplicatif, et que les éléments de  $\widehat{G}$  sont à valeurs dans  $\mathbb{U}_n$ .
- Dans cette question, on suppose  $G$  cyclique. Montrer que  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et que  $\widehat{G}$  est isomorphe à  $G$ .
- Dans cette question, on suppose  $G$  abélien. Montrer que, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et  $\xi \in \widehat{H}$ , il existe  $\chi \in \widehat{G}$  tel que  $\chi|_H = \xi$ .

**Exercice 47** (Mines MP/MPI 2025)

Soient  $p, q$  deux entiers naturels premiers entre eux tels que  $p < q$ . Montrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  et une liste strictement croissante  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$  telle que  $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a_k}$  et  $a_1 \leq \lfloor \frac{q}{p} \rfloor$ .

**Exercice 48** (Mines MP/MPI 2025)

Soient  $\mathbb{K}$  un corps,  $A, B$  deux parties finies de  $\mathbb{K}$ . On note  $m = \text{card}(A)$  et  $n = \text{card}(B)$ . On pose  $C = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ .

- Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , montrer que  $\text{card}(C) \geq m + n - 1$ .
- Montrer le même résultat pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . On pourra utiliser l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{C}$ .  
Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , où  $p$  est premier, on veut montrer que  $\text{card}(C) \geq \min(p, m + n - 1)$ . On suppose par l'absurde que  $\text{card}(C) = m + n - q$  avec  $q \geq 2$  et  $m + n - q < p$ .
- Montrer qu'il existe  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  telles que :
  - $\forall k \in \{0, \dots, m-2\}, \sum_{a \in A} f(a)a^k = 0$ ,
  - $\sum_{a \in A} f(a)a^{m-1} = 1$ ,
  - $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n+1-q\}, \sum_{b \in B} g(b)b^k = 0$ ,
  - $\sum_{b \in B} g(b)b^{n+1-q} = 1$ .
- Conclure en calculant de deux manières différentes la quantité  $Q = \sum_{(a,b) \in A \times B} f(a)g(b) \prod_{c \in C} (a + b - c)$ .

**Exercice 49** (Centrale MP/MPI 2023)

- Soit  $G$  un groupe commutatif fini. Si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $G$  d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de  $ab$ ?
- Soit  $G$  un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un élément de  $G$  dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de  $G$ .
- Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que le groupe  $\mathbb{F}_p^*$  est cyclique.

**Exercice 50** (Mines MP/MPI 2023)

Soit  $A$  un anneau commutatif. Si  $I$  est un idéal de  $A$ , on note  $R(I) = \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$ .

- Montrer que  $R(I)$  est un idéal de  $A$  contenant  $I$ .
- Soient  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ . Montrer :

$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J); \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J).$$

- Pour cette question,  $A = \mathbb{Z}$ . Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que  $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins égal à 2.

**Exercice 51** (Centrale MP 2018)

Soient  $\alpha > \beta$  les deux racines réelles de  $P = X^2 - X - 1$ . On pose  $A = \{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$  et  $\sigma : x + \alpha y \in A \mapsto x + \beta y$ .

- Montrer que  $A$  est un anneau et que  $\sigma$  est un automorphisme de  $A$ . Expliciter  $\sigma^{-1}$ .
- On note  $U$  l'ensemble des inversibles de  $A$  et  $N : z \in A \mapsto z \cdot \sigma(z)$ .
  - Montrer que, si  $z \in A$  alors  $z \in U$  si et seulement si  $|N(z)| = 1$ .
  - Soit  $V = U \cap ]1, +\infty[$ . Montrer que si  $x + \alpha y \in V$  alors  $x \geq 0$  et  $y \geq 1$ .
  - En déduire que  $V = \{\alpha^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Exercice 52** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . On pose  $Q = 1 + 2X + \dots + nX^{n-1}$ . Calculer  $\prod_{\zeta \in \cup_n} Q(\zeta)$ , où  $\cup_n$  désigne le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Exercice 53** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer que  $a \wedge b = 1$  si et seulement si, pour tout  $n \geq ab$ , il existe  $u, v \in \mathbb{N}$  tels que  $au + bv = n$ .

**Exercice 54** (Mines MP/MPI 2023)

On pose  $B_0 = 1$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{k!} X(X-1) \dots (X-k+1)$ .

- Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la famille  $(B_0, \dots, B_N)$  est une base de  $\mathbb{R}_N[X]$ .
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que si  $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$  alors  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que si  $\exp(2i\pi P(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  alors  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que si  $P(n) - [P(n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  alors  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .

**Exercice 55** (Mines MP/MPI 2023)

Soit  $G$  un groupe commutatif de cardinal  $pq$  avec  $p, q$  deux nombres premiers distincts. Montrer que  $G$  est cyclique. Trouver un contre-exemple dans le cas où  $G$  n'est pas commutatif.

**Exercice 56** (Mines MP/MPI 2023)

On pose  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ . Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un anneau intègre et déterminer ses inversibles.

**Exercice 57** (Mines MP 2016)

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini dont tout élément est d'ordre 1 ou 2. Montrer que le cardinal de  $G$  est une puissance de 2.

**Exercice 58** (Centrale MP 2012)

Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  de degré  $n$  et  $d = \text{pgcd}(P(0), P(1), \dots, P(n))$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $d$  divise  $P(k)$ .

**Exercice 59** (Centrale MP/MPI 2024)

- Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{Q}[X]$  distinct de  $\{0\}$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $\mu \in \mathbb{Q}[X]$  tel que  $I = \mu\mathbb{Q}[X]$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $I_\lambda = \{P \in \mathbb{Q}[X], P(\lambda) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{Q}[X]$ .
- Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  irréductible. Montrer que les racines complexes de  $P$  sont simples.
- Soient  $P \in \mathbb{Q}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  racine de  $P$  avec multiplicité  $m > \frac{\deg P}{2}$ . Montrer que  $\lambda \in \mathbb{Q}$ .

**Exercice 60** (Mines MP/MPI 2025)

Pour une partie finie  $I = \{x_1, \dots, x_n\}$  (de cardinal  $n$ ) d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ , on note

$$\text{Conv}(I) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$$

Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on note  $\mathcal{Z}(P)$  l'ensemble de ses racines complexes. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant.

- Écrire la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .
- Montrer que  $\text{Conv}(\mathcal{Z}(P')) \subset \text{Conv}(\mathcal{Z}(P))$ .
- Soit  $H$  un demi-plan fermé de  $\mathbb{C}$  contenant au moins une racine de  $P'$ . Montrer que  $H$  contient au moins une racine de  $P$ . Démontrer ensuite que  $P(H) = \mathbb{C}$ .

**Exercice 61** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrer que :  $\text{rg } u + \text{rg } v - \dim E \leq \text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$ .
- On suppose que  $u \circ v = 0$  et  $u + v \in \text{GL}(E)$ . Montrer que  $\text{rg } u + \text{rg } v = \dim E$ ,  $\text{Im } v = \ker u$ ,  $E = \ker u \oplus \text{Im } u$ .

**Exercice 62** (Mines MP 2021)

Soit  $n \geq 3$  un entier,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$  et  $C$  la matrice de permutation associée au  $n$ -cycle  $(12 \dots n)$ .

- Quel est le sous-groupe  $G$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  engendré par  $B$  et  $C$ ?
- Quels sont les éléments de  $G$  diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 63** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent de rang  $n - 1$ . Montrer que  $u$  admet exactement  $n + 1$  sous-espaces stables.

**Exercice 64** (Mines MP/MPI 2023)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^n = \text{id}$ . Pour  $b \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , résoudre  $x + \lambda u(x) = b$ .

**Exercice 65** (Centrale MP 2018)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , on pose  $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ .

- Montrer que  $T_{ij}(\lambda)$  est inversible et donner son inverse.
- Déterminer les morphismes continus de  $\mathbb{R}_+^*$  dans lui-même.
- Montrer qu'il existe  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  tel que  $T_{ij}(\lambda) = ABA^{-1}B^{-1}$  (on pourra chercher  $A$  sous la forme d'une matrice de dilatation).
- En déduire les morphismes continus de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 66** (Mines MP 2019)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AMB = 0\}$ . Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , en calculer la dimension.

**Exercice 67** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  réels. On note  $V = \left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

- Calculer le déterminant de la matrice  $V$ .
- Montrer que  $V$  est inversible et calculer son inverse.

*Indication* : On pourra interpréter  $V$  comme matrice de passage dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**Exercice 68** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale à coefficients diagonaux éléments de  $\{-1, 1\}$  telle que  $A + D$  soit inversible.

**Exercice 69** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $f_1, \dots, f_p$  des formes linéaires sur  $E$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(f_1, \dots, f_p)$  est libre,
- l'application  $\varphi : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$  est surjective de  $E$  sur  $\mathbb{C}^p$ ,
- il existe  $x_1, \dots, x_p \in E$  tels que  $\det \left( (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p} \right) \neq 0$ .

**Exercice 70** (Mines MP/MPI 2025)

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  dont tous les coefficients diagonaux sont impairs et les autres pairs. Montrer que  $A$  est inversible.
- Est-ce encore le cas si on suppose les coefficients diagonaux pairs et les autres impairs?
- On dispose de  $2p + 1$  masses telles que, dès qu'on en enlève une, les  $2p$  masses restantes peuvent être regroupées en deux ensembles de cardinal  $p$  de même masse. Montrer que les  $2p + 1$  masses sont toutes égales.

**Exercice 71** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On suppose que la fonction polynomiale associée est injective sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisables vérifiant  $P(A) = P(B)$ . Montrer que  $A = B$ .

**Exercice 72** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On suppose que  $A$  et  $B$  admettent une valeur propre commune  $\lambda$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  non nulle telle que  $AC = CB = \lambda C$ .
- On suppose qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  non nulle telle que  $AC = CB$ , et on note  $r$  le rang de  $C$ . Montrer que  $\chi_A$  et  $\chi_B$  admettent un diviseur commun de degré  $r$ .
- Étudier la réciproque.

**Exercice 73** (Mines MP 2021)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\Phi_a : P \in E \mapsto (X^2 - 1)P' - 2(nX - a)P$ . Montrer que  $\Phi_a$  est un endomorphisme de  $E$ . Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

**Exercice 74** (Mines MP 2021)

- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  est nilpotente si et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(M^k) = 0$ .
- Soient  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $M \in G$ ,  $M^N = I_n$  et  $(M_1, \dots, M_p)$  une base de  $\text{Vect}(G)$ .  
Montrer que l'application  $A \in G \mapsto (\text{tr}(AM_1), \dots, \text{tr}(AM_p))$  est injective. Qu'en déduit-on sur  $G$ ?

**Exercice 75** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $\text{tr}(A^n) \neq 0$  et, pour tout  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 76** (Centrale MP/MPI 2024)

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients positifs et telle que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

- Montrer que 1 est valeur propre de  $M$  puis que toute valeur propre complexe de  $M$  vérifie  $|\lambda| \leq 1$ .
- On suppose que tous les coefficients diagonaux de  $M$  sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de  $M$  de module 1.
- Montrer que  $\ker(M - I_n)^2 = \ker(M - I_n)$ .

**Exercice 77** (Centrale MP/MPI 2023)

On se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- Montrer que toute matrice est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ .
- Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  et  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $f$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$ . En déduire que  $f(D)^2 = D$ .

On considère la suite  $(c_k)_k$  définie par  $c_0 = 1$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_{k+1} = \sum_{i=0}^k c_i c_{k-i}$  et le polynôme  $\phi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^{k+1}$ .

- Déterminer le reste de la division euclidienne de  $\phi^2$  par  $X^n$ .
- Trouver un polynôme  $g$  tel que, pour toute matrice nilpotente  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on ait  $g(N)^2 = I_n + N$ .
- Soit  $A$  une matrice inversible. Montrer qu'il existe  $R \in \mathbb{C}[A]$  telle que  $R^2 = A$ .

**Exercice 78** (Centrale MP/MPI 2025)

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ .

- Justifier que  $\rho(A)$  est bien défini. Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont les racines de  $\chi_A$ .

- On pose  $P_A(X) = X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ . Calculer la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'_A}{P_A}$ .

- On suppose que  $\rho(A) \leq 1$  et que  $1 \notin \text{Sp}(A)$ . Montrer que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k}$  est bien défini et que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k} = - \int_0^1 \frac{P'_A(t)}{P_A(t)} dt$ .

**Exercice 79** (Centrale MP/MPI 2023)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour toute partie  $A \subset \mathcal{L}(E)$ , on note  $\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E); \forall v \in A, u \circ v = v \circ u\}$ . L'objectif de l'exercice est d'étudier  $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$ .

- Montrer que  $\mathcal{B}(f)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre contenant  $\mathbb{K}[f]$ .
- On suppose  $f$  nilpotente d'indice  $n$ . Montrer que  $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$ .
- Soient  $G_1, G_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par un  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On pose  $f_i = f|_{G_i}$ . On suppose que  $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$ . Montrer que  $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$ .

**Exercice 80** (Mines MP 2021)

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx$ . Justifier l'existence de  $f$  et trouver son minimum.

**Exercice 81** (Centrale MP 2017)

Soit  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

- Pour  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{Z}$ , calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)\theta} d\theta$ .

- Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\int_0^{\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = i \int_{-1}^1 P(t) dt$ .

- Montrer que  $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \leq \pi \sum_{k=0}^n a_k^2$ .

- Soit  $H = (h_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$  avec  $h_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$ . Montrer que  $H$  est diagonalisable et que  $\text{Sp}H \subset ]0, \pi[$ .

**Exercice 82** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $(a, b, x_0)$  une famille libre d'un espace euclidien  $E$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que  $u(x_0) = a$  et  $u^*(x_0) = b$ .

**Exercice 83** (Centrale MP/MPI 2024)

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ .

- Montrer que, pour tout hyperplan  $H$  de  $E$ , il existe  $a \in E$  tel que  $H = \text{Vect}(a)^\perp$ .
- Soit  $(x_0, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$  tels que  $\langle x_i, x_j \rangle = \alpha$  pour tous  $i \neq j$ , où  $\alpha$  est un réel strictement négatif fixé. Déterminer  $\alpha$ .
- Montrer l'existence d'une telle famille.

**Exercice 84** (Centrale MP/MPI 2025)

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique.

- Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive et telle que  $\int_a^b f = 0$ . Montrer que  $f$  est nulle.
- Montrer que la matrice  $M_n = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  est symétrique définie positive. Indication :  $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$ .
- On note  $\lambda_{\min}$  (resp.  $\lambda_{\max}$ ) la plus petite (resp. grande) valeur propre de  $M_n$ . Montrer que  $\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq x^T M_n x \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- On note  $F$  le sous-espace propre de  $M_n$  associé à  $\lambda_{\max}$ . Montrer que, si  $x \in F$ , toutes les coordonnées de  $x$  sont de même signe.
- Déterminer  $\dim F$ .

**Exercice 85** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $(a, b, x_0)$  une famille libre d'un espace euclidien  $E$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que  $u(x_0) = a$  et  $u^*(x_0) = b$ .

**Exercice 86** (Mines MP/MPI 2023)

Soient  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles et  $D : u \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Vérifier que  $D$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif? Surjectif?
- Donner les éléments propres de l'endomorphisme  $D$ .
- Soit  $F$  l'espace des suites réelles de carré sommable. Montrer que  $F$  est stable par l'endomorphisme  $D$ .
- On munit  $F$  de son produit scalaire usuel. Décrire l'ensemble

$$H = \left\{ \frac{\langle u, D(u) \rangle}{\|u\|^2}, u \in F \setminus \{(0)_{n \in \mathbb{N}}\} \right\}.$$

**Exercice 87** (Mines MP 2018)

On pose  $E = \mathbb{R}^2$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $M_f$  la matrice de  $f$  dans la base canonique. Soit  $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui a  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$  associe  $B(u, v) = xx' - yy'$ . On pose  $G = \{f \in \mathcal{L}(E), \forall (u, v) \in E \times E, B(f(u), f(v)) = B(u, v)\}$ .

- Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $(GL(E), \circ)$ .
- On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $f \in G$  si et seulement si  ${}^t M_f A M_f = A$ .
- Paramétrer  $\{M_f, f \in G\}$  (décrire cet ensemble avec un ou plusieurs paramètres).
- Soit  $f \in G$ . Étudier le caractère diagonalisable de  $f$ .

**Exercice 88** (Mines MP)

On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne orientée canonique.

- Soient  $a \in \mathbb{R}^3$  et  $f : x \mapsto a \wedge x$ . Caractériser  $g = \exp f$ .
- Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  antisymétrique. Caractériser  $v = \exp(u)$ .

**Exercice 89** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $k$  un réel fixé. On pose  $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\max_{\lambda \in \text{Sp} A} \lambda \geq k+1$  et  $\min_{\lambda \in \text{Sp} A} \lambda \geq k-1$ .

**Exercice 90** (Mines MP/MPI 2023)

$$\text{Soient } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

- Montrer que  $A(a, b, c)$  est dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  si et seulement si  $a, b, c$  sont les racines d'un polynôme  $X^3 - X^2 + t$  où  $t$  appartient à un intervalle  $I$  que l'on déterminera.
- Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Déterminer une droite et un plan stables par  $A(a, b, c)$ .
- Si  $A(a, b, c) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ , caractériser l'endomorphisme canoniquement associé.

**Exercice 91** (Centrale MP/MPI 2023)

On considère la relation binaire pour  $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$   $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
- Montrer qu'une partie de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour  $\leq$ .
- Montrer que toute suite croissante majorée pour  $\leq$  converge.
- Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A \leq B \implies B^{-1} \leq A^{-1}$ .

**Exercice 92** (Centrale MP)

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- On suppose que  $u = v \circ v^* - v^* \circ v$  pour un certain  $v \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u$  est autoadjoint et  $\text{tr } u = 0$ .
- On suppose  $n = 2$  et que  $u$  est autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice s'écrit  $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ . En déduire qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $u = v \circ v^* - v^* \circ v$ .
- On revient à  $n$  quelconque et on suppose que  $u$  est autoadjoint de trace nulle.
  - Montrer qu'il existe  $e$  unitaire tel que  $\langle e, u(e) \rangle = 0$ . En déduire qu'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L & B \end{pmatrix}$  où  $L \in M_{1, n-1}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ .
  - Montrer qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u = v \circ v^* - v^* \circ v$ .

**Exercice 93** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $n \geq 3$ . Soient  $A, B \in \mathbb{R}^n$  non colinéaires. On pose :  $M = AB^T + BA^T$ .

- Montrer que  $M$  est diagonalisable.
- Déterminer  $\text{rg } M$ .
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $M$ .

**Exercice 94** (Centrale MP/MPI 2025)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $C$  un convexe compact d'intérieur non vide de  $E$ , symétrique par rapport à 0. Pour  $x \in E$ , on pose

$$j_C(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{++}, \frac{x}{\lambda} \in C \right\},$$

en convenant que  $\inf \emptyset = +\infty$ .

- Rappeler la définition d'une norme.
  - Montrer que  $j_C$  est à valeurs réelles, positive et homogène.
  - Montrer que  $j_C(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- Montrer que  $x \in C$  si et seulement si  $j_C(x) \in [0, 1]$ .
  - Montrer que, pour tous  $x, y \in E$ ,  $j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y)$ .

*Indication* : pour  $\varepsilon > 0$ , poser  $x' = \frac{x}{j_C(x) + \varepsilon}$ ,  $y' = \frac{y}{j_C(y) + \varepsilon}$  et  $t = \frac{j_C(x) + \varepsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon}$ .

- On munit  $E$  d'une norme. Montrer l'existence de  $f : E \rightarrow E$ , continue, bijective, et telle que  $f(C) = \overline{B(0, 1)}$  et  $f(C \setminus \overset{\circ}{C}) = S(0, 1)$ .

**Exercice 95** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $E_n = \mathcal{C}^n([-1, 1], \mathbb{C})$ . Si  $f \in E_n$ , on pose  $\pi_n(f) = \max_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \|f^{(k)}\|_\infty$ .

- Montrer que  $\pi_n$  est une norme sur  $E_n$ , puis calculer  $\pi_n(x \mapsto x^n)$ .
- Si  $f \in E_n$ , on pose  $A_n(f) : x \in [-1, 1] \mapsto xf(x)$ . Montrer que  $A_n$  est un endomorphisme de  $E_n$ , continu pour  $\pi_n$ , et de norme subordonnée  $n + 1$ .
- On suppose  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $f \in E_n$ , on pose  $B_n(f) : x \in [-1, 1] \mapsto \int_0^1 f'(xt) dt$ . Montrer que  $B_n$  est une application linéaire de  $E_n$  dans  $E_{n-1}$ . Montrer que  $B_n$  est continue pour les normes  $\pi_n$  et  $\pi_{n-1}$ , et de norme subordonnée 1.

**Exercice 96** (Centrale MP 2021)

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles bornées.

Pour  $u \in E$ , on note  $N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  et  $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ .

- Montrer que  $N_\infty$  et  $N$  sont des normes sur  $E$ . Sont-elles équivalentes?  
On munit désormais  $E$  de la norme  $N_\infty$ .
- Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est d'intérieur vide. Quelle est son adhérence?
- Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des suites à valeurs strictement positives.

**Exercice 97** (Centrale MP/MPI 2024)

- Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Soit  $C$  une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien  $E$ .

- Soit  $x \in E$ .
  - Montrer l'existence et unicité d'un vecteur  $p(x) \in C$  tel que  $d(x, C) = \|x - p(x)\|$ .
  - Soit  $y \in C$ . Montrer que  $y = p(x)$  si et seulement si  $\forall c \in C, \langle x - p(x), c - p(x) \rangle \leq 0$ .
- Montrer que l'application  $p$  définie dans ce qui précède est continue.

**Exercice 98** (Centrale MP 2021)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \{0, \dots, n\}$ . On note  $R_p$  l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  de rang  $p$ .

- Soient  $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  et  $N$  sont de même rang si et seulement s'il existe  $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M = PNQ$ .
- Soit  $F$  une partie finie de  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $\mathbb{C} \setminus F$  est connexe par arcs.
- Montrer que  $R_p$  est connexe par arcs.
- Déterminer l'adhérence et l'intérieur de  $R_p$ .

**Exercice 99** (Centrale MP/MPI 2023)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Pour  $A \subset E$  non vide et  $x \in E$ , on note  $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$ .

- On suppose  $A$  fermé. Soit  $x \in E$ . Montrer que  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $x \in A$ .
- Soient  $F \subsetneq E$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  et  $\delta \in ]0, 1[$ . Montrer qu'il existe  $x \in E$  unitaire vérifiant  $d(x, A) \geq \delta$ .
- On suppose  $E$  de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés. Montrer que la sphère unité n'est pas un compact de  $E$ .

**Exercice 100** (Centrale MP 2019)

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  tel que, pour tout  $g \in G$ , il existe un voisinage  $V$  de  $g$  dans  $\mathbb{C}^*$  tel que  $V \cap G = \{g\}$ .

- Montrer que, pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}^*$ ,  $G \cap K$  est fini.
- Montrer que  $G \cap \mathbb{U}$  est cyclique.
- On suppose que  $G$  n'est pas contenu dans  $\mathbb{U}$ . Soit  $\Lambda = \{z \in G, |z| > 1\}$ . Montrer que  $\Lambda$  admet un plus petit élément (pour la norme). En déduire  $G$ .

**Exercice 101** (Centrale MP/MPI 2024)

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose  $\rho(A) = \{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ . On munit  $\mathbb{C}^n$  d'une norme  $\|\cdot\|$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de la norme  $\|\cdot\|$  d'opérateur associé.

- L'application  $A \mapsto \rho(A)$  est-elle une norme?
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$ .
- Montrer que, pour toute norme  $N$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $N(A^k)^{1/k} \rightarrow \rho(A)$ .

**Exercice 102** (Centrale MP/MPI 2023)

Soient  $(E, N)$  et  $(E', N')$  deux espaces vectoriels normés.

Soit  $d \in \mathbb{N}$ . Pour  $P(X) = p_0 + p_1X + \dots + p_dX^d \in \mathbb{R}_d[X]$  on pose  $\|P\| = \max(|p_0|, \dots, |p_d|)$ .

- Vérifier que l'application  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{R}_d[X]$ .
- Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ , convergeant vers  $\ell \in E$ . Montrer que l'ensemble  $Y = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$  est compact.
  - Soit  $f : E \rightarrow E'$  continue telle que, pour tout compact  $K$  de  $E'$ ,  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $E$ . Montrer que, si  $F$  est un fermé de  $E$ , alors  $f(F)$  est un fermé de  $E'$ .
- Soit  $P \in \mathbb{R}_d[X]$  un polynôme unitaire. Montrer que, si  $x \in \mathbb{R}$  est une racine de  $P$  telle que  $|x| > 1$ , alors  $|x| \leq \|P\| + 1$ . En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de  $\mathbb{R}_d[X]$  est fermé dans  $\mathbb{R}_d[X]$ .

**Exercice 103** (Mines MP/MPI 2025)

a) Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $f$  une forme linéaire continue non nulle sur  $E$ . On fixe  $x_0 \in E$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ .

i) Montrer que  $\|f\|_{\text{op}} = \frac{\|f(x_0)\|}{d(x_0, \ker f)}$ .

ii) Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

- il existe  $a \in E$  tel que  $\|a\| = 1$  et  $\|f\|_{\text{op}} = |f(a)|$ ,
- il existe  $y \in \ker(f)$  tel que  $d(x_0, \ker f) = \|x_0 - y\|$ .

b) On munit l'espace  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ , et on définit l'application  $\Phi : u \in E \mapsto \int_0^1 u(t)dt - \int_{-1}^0 u(t)dt$ .

Montrer que  $\Phi$  est une forme linéaire continue, et calculer  $\|\Phi\|_{\text{op}}$ .

**Exercice 104** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$  non nul. Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\|P\|_Q = \sup_{x \in [-1, 1]} |PQ(x)|$ .

- Montrer que  $\|\cdot\|_Q$  est une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- À quelle condition sur  $Q$  la norme  $\|\cdot\|_Q$  est-elle équivalente à  $\|\cdot\|_1$  (norme associée au polynôme égal à 1)?
- Soit  $c \in [-1, 1]$  une racine de  $Q$ . Trouver  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(c) = 1$ ,  $P'(c) = 0$  et  $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{c\}, 0 \leq P(x) < 1$ .
- Montrer que  $\|P^n\|_Q \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- Qu'en déduire?

**Exercice 105** (Mines MP/MPI 2023)

On munit l'espace  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire usuel défini par  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_2$ . Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  tel qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall f \in F, \|f\|_{\infty} \leq C \|f\|_2$ .

a) Montrer que  $F \neq E$ .

b) Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille orthonormale de  $F$ . Montrer que  $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right| \leq C \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ .

c) En déduire que  $F$  est de dimension finie majorée par  $C^2$ .

**Exercice 106** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)dt$$

**Exercice 107** (Centrale MP/MPI 2023)

Soit  $I = ]-1, +\infty[$ . On dit que  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  vérifie (\*) si et seulement si :  $\forall x, y \in I, f(x) + f(y) = f(x+y+xy)$ .

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{(n+2)(2n+1)}$  et  $y_n = \frac{n}{n+1}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

- Simplifier  $x_n + y_n + x_n y_n$ . Montrer que la série de terme général  $f(x_n)$  converge et exprimer  $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$  en fonction de  $f(1)$ .
- Montrer que  $f$  est dérivable.
- Trouver toutes les fonctions continues vérifiant (\*).

**Exercice 108** (Centrale MP/MPI 2025)

- a) Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries numériques.
- b) Montrer que  $\sum_{k=1}^n \ln(k) = n \ln(n) - n + O(\ln(n))$ .
- c) Soient  $(a_k)_{k \geq 2}$  une suite réelle et  $b : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose  $A(t) = \sum_{k=2}^{\lfloor t \rfloor} a_k$  pour  $t \geq 2$ . Montrer que  $\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt$  pour tout entier  $n \geq 2$ .
- d) On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. On pose  $R : t > 1 \mapsto \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq t} \frac{\ln p}{p} - \ln(t)$ . Montrer que  $\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{1}{p} = 1 + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{R(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} dt$  pour tout entier  $n \geq 2$ .
- e) Montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{1}{p} = \ln(\ln n) + C + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 109** (Centrale MP)

- a) Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n = O(1/n^2)$ . Que peut-on dire de  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$  ?
- b) Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(1/n)$ .
- c) On pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \rfloor$ . Convergence et somme  $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ .

**Exercice 110** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . On dit que  $(u_n)$  est équirépartie si et seulement si, pour tous  $\alpha < \beta$  dans  $[0, 1]$ , on a  $\frac{1}{n} \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha < u_k < \beta\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha$ .

- a) On suppose  $(u_n)$  équirépartie. Montrer que  $(u_n)$  diverge. Montrer que  $\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $[0, 1]$ .
- b) Montrer l'équivalence entre :
- $(u_n)$  est équirépartie,
  - $\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt$ ,
  - $\forall m \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m u_k} = 0$ .

**Exercice 111** (Mines MP/MPI 2024)

Étudier la convergence de la série  $\sum \sin(\pi e n!)$ .

**Exercice 112** (Mines MP/MPI 2024)

- a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $d(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$ . Pour  $\alpha > 1$ , montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$ .
- b) Pour  $\alpha > 2$ , montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$ .

**Exercice 113** (Mines MP 2019)

Préciser deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\sum_{k=1}^n \ln(n+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + an + b + o(1)$ .

**Exercice 114** (Mines MP 2017)

Soit  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ .

- a) Représenter  $F$  et  $F^{-1}$ . Donner un équivalent de  $F$  et de  $F^{-1}$  en  $+\infty$ .
- b) Montrer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , qu'il existe un unique  $u_n \in \mathbb{R}$  tel que  $F(u_n) - F(n) = 1$ . Déterminer la limite de  $(u_n)$  puis un équivalent.
- c) Montrer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , qu'il existe un unique  $v_n \in \mathbb{R}$  tel que  $F(v_n) - F(n) = n$ . Déterminer la limite de  $(v_n)$  puis un équivalent.

**Exercice 115** (Centrale MP 2021)

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

- Montrer que si  $ff'$  admet une limite (éventuellement infinie) non nulle en  $+\infty$ , alors  $f^2$  tend vers  $+\infty$ .
- On suppose  $f^2$  et  $f'^2$  intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f'^2$  l'est aussi et que l'on a  $\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f'^4\right)$ .  
Montrer que  $f$  est uniformément continue et tend vers 0 en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**Exercice 116** (Centrale MP)

- Pour  $x > -1$ , calculer  $\varphi(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1+x\sin^2 t}$  (indic : poser  $u = \tan t$ ).
- Conditions nécessaires et suffisantes sur  $\alpha, \beta > 0$  pour que  $\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta}{1+x^\alpha \sin^2 x} dx$  converge?

**Exercice 117** (Mines MP 2017)

On considère l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$ .

- Justifier que cette intégrale est convergente. On définit alors  $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ .
- Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer sa dérivée.
- Déterminer la limite de  $g$  en 0 et  $+\infty$ .
- En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 118** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue, strictement croissante telle que  $f(0) = 0$ .

- On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que

$$\forall x > 0, \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$

- Soit  $x > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on note  $x_{i,n} = \frac{ix}{n}$ . Montrer que  $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n} (f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \rightarrow \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
  - Montrer l'égalité vue en a).
- Soient  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $b \in f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et bijective. Montrer que  $\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$ .

**Exercice 119** (Centrale MP/MPI 2023)

- Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
- Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul. Exprimer  $P'/P$  à l'aide des racines de  $P$ .
- Soit  $r > 0$ . On suppose que  $P$  ne s'annule pas sur le cercle  $C(0, r)$  du plan complexe. On pose  $N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it} dt$ . Montrer que  $N_r(P)$  est égal au nombre de racines de  $P$  (comptées avec multiplicité) dans le disque  $D(0, r)$ .

**Exercice 120** (Mines MP 2012)

Existence et calcul de  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$ .

**Exercice 121** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que la série  $\sum a_n$  converge. Soit  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ . On suppose que  $S$  a une limite réelle  $\ell$  en  $+\infty$ . On souhaite montrer que la suite  $(a_n)$  est nulle.

- Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre quelconque.
  - Montrer que  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- On suppose dans cette question que la série  $\sum a_n$  converge absolument et que  $\ell = 0$ .
  - Montrer que  $S$  est continue.
  - Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $I : T \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T S(x) \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx$ . Montrer que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = 0$ .
  - Montrer que  $a_m = 0$ .
- Traiter le cas général.

**Exercice 122** (Centrale MP/MPI 2025)

- Caractériser la convexité pour les fonctions dérivables sur un intervalle.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin((2n+1)\theta) = (\sin \theta) P_n(\sin^2 \theta)$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = (2n+1) \sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(\pi x / (2n+1))}{\sin^2(k\pi / (2n+1))}\right)$ .
- Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ . Étudier la limite simple de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 123** (Mines MP/MPI 2023)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n(n+x)}}$ .

- Montrer la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ . On note  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .
- Montrer que la série  $\sum f_n$  converge normalement sur les segments de la forme  $[0, M]$  avec  $M > 0$ . Y a-t-il convergence normale sur  $\mathbb{R}^+$  ?
- Étudier la continuité de  $f$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Soient  $n \geq 1$  et  $x_0 \geq n$ . Montrer :  $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$ . En déduire :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ .

**Exercice 124** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)$ . Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^{++}$ . Déterminer la limite et un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 125** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ .

- Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 126** (Centrale MP/MPI 2025)

- Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et le comportement pour  $|z| < R$  et  $|z| > R$ .
- Montrer que le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum \tan(n)z^n$  est inférieur ou égal à 1. On admet qu'il existe  $\mu > 2$  tel que, pour tous  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\left|\frac{1}{\pi} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^\mu}$ .
- Montrer que  $R = 1$ .

**Exercice 127** (Centrale MP/MPI 2025)

Soient  $f : t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$  et  $g : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ , prolongées continûment en 0.

- Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- On admet que, si  $h$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et que  $h(0) \neq 0$ , alors la fonction  $x \mapsto \frac{1}{h(x)}$  est développable en série entière en 0. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite  $(P_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$  telle que, pour un  $\rho > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in ]-\rho, \rho[ \setminus \{0\}, \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n$ .
- Montrer le résultat admis.

**Exercice 128** (Mines MP/MPI 2025)

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p(n)$  le cardinal de l'ensemble  $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3; x + 2y + 3z = n\}$ . Soit  $G : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$ .

- Montrer que le rayon de  $G$  est  $\geq 1$  et que  $\forall t \in ]-1, 1[, G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$ .
- Expliciter  $p(n)$  et en déterminer un équivalent.

**Exercice 129** (Mines MP/MPI 2023)

Déterminer le développement en série entière en 0 de  $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin(x)\right)$ .

**Exercice 130** (Mines MP/MPI 2024)

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$  est développable en série entière au voisinage de 0.

**Exercice 131** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe telle que la série  $\sum na_n$  converge absolument. On note  $\mathbb{D}$  le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

- Montrer que le rayon de convergence de  $f$  est  $\geq 1$ .
- On suppose que  $a_1 \neq 0$  et que  $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$ . Montrer que  $f$  est injective sur  $\mathbb{D}$ .

**Exercice 132** (Mines MP 2017)

Soient  $J : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) dt$ .

- Vérifier que  $2(n+1)I_{n+1} = (2n+1)I_n$  puis que  $I_n = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ .
- On considère l'équation différentielle  $(E) : xy'' + y' + xy = 0$ . Montrer que les solutions de  $(E)$  développable en série entière forment une droite vectorielle engendrée par  $J$ . Résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Calculer  $L(t) = \int_0^{+\infty} J(x)e^{-xt} dt$  pour  $t > 0$ .

**Exercice 133** (Centrale MP/MPI 2023)

- Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
- Pour  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$  et  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continue, on pose

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Même définition lorsque  $f$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note, pour  $r > 0$ ,  $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$ .

Soit  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $r > |a|$ . Montrer que  $f(a) =$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

- En déduire, pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et pour  $r$  assez grand (à préciser), l'égalité  $\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1} dz$

**Exercice 134** (Mines MP/MPI 2024)

Soit  $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$ . Déterminer les  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquels  $I_n$  est définie. Donner un équivalent de  $I_n$ .

**Exercice 135** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $F : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+at^2)}}$ . Donner un équivalent de  $F$  en  $+\infty$ .

**Exercice 136** (Mines MP/MPI 2023)

Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de réels strictement positifs. On pose :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ . On suppose dans la suite que  $(\lambda_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f$  converge et la calculer.
- Traiter le cas particulier où  $\lambda_n = n + 1$ .

**Exercice 137** (Centrale MP 2017)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supérieur ou égal à 2. On note  $E = M_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices nilpotentes de  $E$  et  $\mathcal{U} = \{I_n + N, N \in \mathcal{N}\}$ . Pour

$N \in \mathcal{N}$ , on pose  $L(N) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$ .

- Soit  $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, E)$ . On suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t)$  et  $A'(t)$  commutent. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(A^k)'(t) = kA'(t)A^{k-1}(t)$ .
- Soit  $N \in \mathcal{N}$ . Montrer que  $L(N)$  est nilpotente, de même indice de nilpotence que  $N$ .
- Soit  $N \in \mathcal{N}$ . Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(L(tN)) = I_n + tN$ . En déduire que  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{U}$  sont homéomorphes (bijection continue de réciproque continue).

**Exercice 138** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  paire et  $\pi$ -périodique. Soit  $(E) : y'' + qy = 0$ .

- Montrer que l'ensemble  $S$  des solutions de  $(E)$  est un espace vectoriel et préciser sa dimension.
- Pour  $y \in S$ , on note  $\varphi(y) : x \mapsto y(x + \pi)$ . Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $S$ .
- Soit  $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$  la base de  $S$  formée des solutions vérifiant  $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0$  et  $y_2'(0) = 1$ . Montrer que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$ .
- Étudier la parité de  $y_1$  et  $y_2$ .
- Montrer que  $\det A = 1$ .
- Montrer que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}$  puis que  $A + A^{-1} = (\text{tr} A)I_2$ . En déduire que  $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$ . Montrer que  $\chi_A$  est de la forme  $X^2 - 2aX + 1$  pour un certain réel  $a$ .

**Exercice 139** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $E$  un espace euclidien,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(E)$  dérivable. Montrer l'équivalence entre :

- $\forall s, t \in \mathbb{R}, u(s+t) = u(s)u(t)$ ,
- $\exists a \in \mathcal{A}(E), \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{at}$ .

**Exercice 140** (Mines MP/MPI 2023)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\omega^n = 1$ . Trouver les fonctions  $y \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  solutions de  $\sum_{k=0}^n y^{(k)} \omega^{n-k} = 0$

**Exercice 141** (Mines MP)

Soit  $E$  l'espace des applications continues et bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $f \in E$ . Montrer que l'équation  $y'' - y = f$  a une unique solution dans  $E$ . On note  $\Phi(f)$  cette solution.
- On munit  $E$  de la norme uniforme sur  $\mathbb{R}$  notée  $N$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme continu de  $(E, N)$ . Calculer sa norme subordonnée.

**Exercice 142** (Centrale MP 2021)

On admet que, pour toute famille  $(h_1, \dots, h_n)$  libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , il existe  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que la matrice  $(h_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  soit inversible.

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On pose, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_a(f) : x \mapsto f(x + a)$ .

On note  $E_f = \text{Vect}\{\tau_a(f), a \in \mathbb{R}\}$ .

- a) Déterminer  $E_f$  pour  $f : x \mapsto e^x$  et pour  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On suppose que  $E_f$  est de dimension finie  $n$ . On fixe une base  $(g_1, \dots, g_n)$  de  $E_f$ .

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $(\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a))$  tel que  $\tau_a(f) = \lambda_1(a)g_1 + \dots + \lambda_n(a)g_n$ .

- b) Montrer que les  $\lambda_k$  sont continues, puis que les  $\lambda_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
 c) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .  
 d) Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire homogène. Conclure.

**Exercice 143** (Mines MP/MPI 2025)

Soit  $n \geq 2$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soient  $c > 0$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ,  $\|f(x) - f(y)\| \geq c \|x - y\|$ .

- a) Soit  $a \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\|df(a)(h)\| \geq c \|h\|$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ . En déduire que  $df(a)$  est bijective.  
 b) Soient  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $g_b : x \mapsto \|f(x) - b\|$ . Montrer que  $g_b$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^n$ .  
 c) En déduire que  $f$  est bijective.

**Exercice 144** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $E$  un espace euclidien,  $\varphi \in E^*$  une forme linéaire et  $f : x \mapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$ . Étudier les extrema de  $f$ .

**Exercice 145** (Centrale MP/MPI 2025)

- a) i) Énoncer le théorème spectral.  
 ii) Définir l'ensemble  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et montrer l'équivalence avec la positivité du spectre.  
 b) On fixe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on pose  $\varphi : U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(M^T U)$ . Montrer que  $\varphi$  admet un maximum, atteint en une matrice  $U_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .  
 c) i) On fixe  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et on pose  $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\exp(tA)U_0)$ . Montrer que  $\psi$  est bien définie, continue, et dérivable en 0. Donner deux expressions de  $\psi'(0)$ .  
 ii) Conclure sur la nature du maximum de  $\varphi$  en  $U_0$ .

**Exercice 146** (Mines MP/MPI 2024)

Soient  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$  et  $g$  définie sur  $(\mathbb{R}^{++})^2$  par :  $g(x, y) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ . Déterminer les fonctions  $f$  qui vérifient :  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ .

**Exercice 147** (Centrale MP/MPI 2025)

- a) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ .  
 b) On suppose que  $n \in \mathbb{N}^*$  candidats se présentent à un poste de secrétaire. Le recruteur les rencontrent successivement et pour chacun, il doit décider s'il l'engage ou pas. Si oui, il termine le processus de recrutement sans voir les candidats suivants. Sinon, le candidat est définitivement éliminé.

La valeur de chaque candidat correspond à un score et on note  $s_1 < \dots < s_n$  la liste croissante des scores obtenus. On note  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une permutation aléatoire telle que le candidat qui passe devant le recruteur en position numéro  $j$  a obtenu le score  $s_{\sigma(j)}$  pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

- i) Déterminer la loi de  $S_j$ , variable aléatoire du score du  $j$ -ème candidat.  
 ii) Déterminer la loi de  $R_j$ , variable aléatoire du rang du meilleur candidat parmi les  $j$  premiers.  
 c) On choisit la stratégie de refuser les  $m_n$  premiers candidats, et de choisir le premier candidat dont le score est supérieur à l'un des scores précédemment rencontrés.

- i) Soit  $p_n$  la probabilité d'embaucher le meilleur candidat. Montrer que  $p_n = \frac{m_n}{n} \sum_{j=m_n+1}^n \frac{1}{j-1}$ .

- ii) On suppose que  $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \int_x^1 \frac{dt}{t}$ .

- iii) Optimiser alors  $x$  pour maximiser la probabilité de recruter le meilleur candidat.

**Exercice 148** (Centrale MP/MPI 2025)

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

a) Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que la série  $\sum \frac{1}{n \ln^4(n)}$  converge.

b) i) Montrer que, pour tout  $a > 0$ ,  $\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq \frac{3n^2}{a^4}$ .

ii) On pose  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n}^{+\infty} (|S_m| < m^{\frac{3}{4}} \ln(m))$ . Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

c) Montrer que la suite  $\left(\frac{S_n}{n^{3/4} \ln(n)}\right)$  converge presque sûrement vers 0

**Exercice 149** (Centrale MP/MPI 2025)

a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , donner la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme  $T^n - 1$  dans  $\mathbb{R}[T]$  puis  $\mathbb{C}[T]$ .

b) Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Rappeler pourquoi  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .

c) Soit un entier  $p \geq 2$ . Sous les hypothèses précédentes, montrer que  $X + Y$  ne peut pas suivre la loi uniforme sur  $\llbracket 2; 2p \rrbracket$  sachant que  $X$  et  $Y$  prennent toutes les valeurs dans  $\llbracket 1; p \rrbracket$  avec probabilité non nulle.

**Exercice 150** (Centrale MP 2021)

On lance un dé à  $N$  faces jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre strictement inférieur au précédent.

a) Dénombrer les  $k$ -uplets strictement croissants à valeurs dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$  puis les  $k$ -uplets croissants à valeurs dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

b) On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués. Calculer  $\mathbb{P}(X = +\infty)$ .

c) On note  $a_n = \mathbb{P}(X > n)$ . Quel est le rayon de convergence de  $\sum a_n t^n$ ? Calculer la somme.

d) Calculer l'espérance de  $X$ . La variable aléatoire  $X$  admet-elle un moment d'ordre 2?

**Exercice 151** (Centrale MP 2021)

a) Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

b) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ . Montrer que la suite  $(u_n/n)_{n \geq 1}$  converge vers le réel  $L = \inf\{u_k/k, k \in \mathbb{N}^*\}$ .

c) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Soit  $a$  un réel strictement positif tel que  $\mathbb{P}(X_1 \geq a) > 0$ . Montrer que la suite  $\left(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

**Exercice 152** (Mines MP/MPI 2025)

Une urne contient  $r$  boules rouges et  $b$  boules blanches. À chaque tirage, on pioche une boule dans l'urne et on remet la boule tirée dans l'urne si et seulement si elle est rouge. On note  $E_{n,b}$  l'espérance du nombre de boules blanches tirées à l'issue de  $n$  tirages (on considère  $r$  comme fixé définitivement).

a) Montrer que  $F : (u, v) \in ]-1, 1[^2 \mapsto \sum_{(n,b) \in (\mathbb{N}^*)^2} E_{n,b} u^n v^b$  est convenablement définie.

b) Montrer la relation  $(b+r)E_{n,b} = b + bE_{n-1,b-1} + rE_{n-1,b}$  (si  $b > 0$  et  $n > 0$ ).

c) Montrer que  $\partial_2 F$  est bien définie sur  $] -1, 1[$  et que  $\forall (u, v) \in ] -1, 1[^2$ ,  $v \cdot \partial_2 F(u, v) + r \cdot F(u, v) = \frac{uv}{(1-u)^2(1-v)^2}$ .

**Exercice 153** (Mines MP/MPI 2025)

Soient  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $]0, 1[$  et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout  $n$ ,  $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ . Montrer que  $A = \left\{ \omega, X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \right\}$  est un événement, et calculer sa probabilité en fonction de  $(p_n)$ .

**Exercice 154** (Mines MP/MPI 2024)

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner le développement en série entière de  $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)^n}$ .

b) En déduire que  $\text{card} \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n, k_1 + \dots + k_n = s\} = \binom{s+n-1}{n}$ .

c) Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Déterminer  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (X_1 + \dots + X_n = s)\right)$ .