Polytechnique MPI (2024)

Exercice 1 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ commutant à $AB - BA$. Calculer $\exp(A+B)$.

Exercice 2 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ un morphisme de groupes de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}(V)$ tel que $\{0\}$ et V soient les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\varphi(g)$ pour $g \in \mathbb{U}$.

a) Montrer que $\dim V = 1$.

b) On suppose $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi\left(e^{i\theta}\right)$ dérivable en 0. Déterminer φ.

Exercice 3 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $\mathscr{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stable par crochet de Lie : pour $M, N \in \mathscr{A}$, $[M,N] = MN - NM \in \mathscr{A}$.

a) On suppose que, pour tout $M \in \mathscr{A}$, $N \mapsto [M,N]$ induit un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{A}$. Montrer que $\forall M, N \in \mathscr{A}, [M,N] = 0$.

b) On suppose que $\dim \mathscr{A} \leqslant 3$ et que, pour tout $M \in \mathscr{A}$, $N \mapsto [M,N]$ induit un endomorphisme nilpotent de $\mathscr{A}$. On pose $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$ et, pour $j \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A}_{j+1} = \left\{[M,N], (M,N) \in \mathscr{A}_j^2\right\}$. Montrer que $\mathscr{A}_3 = \{0\}$.

Exercice 4 *(Polytechnique MPI 2024)*

Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 5 *(Polytechnique MPI 2024)*

On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u.

Exercice 6 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?

Exercice 7 *(Polytechnique MPI 2024)*

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $A, \mathring{A}, \overline{A}, \mathring{\overline{A}}$ et $\overline{\mathring{A}}$ soient toutes distinctes.

Exercice 8 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

Exercice 9 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ (où $d \geqslant 1$).

a) Montrer que la boule unité fermée pour N est fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0 .

b) Soit C une partie non vide de E, fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0 . Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^d$ dont C est la boule unité fermée.

Exercice 10 *(Polytechnique MPI 2024 - corrigé)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Montrer que la suite (u_n) est constante.

Exercice 11 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$ diverge.

Exercice 12 *(Polytechnique MPI 2024)*

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - (1 - e^{-n})^x\right) \sim \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 13 *(Polytechnique MPI 2024)*

a) Soit (f_n) une suite de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$. On suppose que, pour toute fonction $g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\int_0^1 f_n' g \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Que dire de f ?

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 14 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence appartient à $]0,+\infty[$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 15 *(Polytechnique MPI 2024)*

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $r \in]0,\pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_{-r}^{r} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\mathrm{d}t$.

Exercice 17 *(Polytechnique MPI 2024)*

Calculer $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 18 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soient $u_0, u_1 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, avec $u(t = 0,\cdot) = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0,\cdot) = u_1$.
Indication : on utilisera la fonction $U = f \circ u$ avec $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convenable.

Exercice 19 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit E un ensemble fini. Dénombrer les triplets (A,B,C) de parties de E telles que $A \subset B \subset C$.

Exercice 20 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de façon d'apparier les entiers de 1 à $2r$?

Exercice 21 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ où $r \geqslant 1$ est arbitraire, et $n_1,\ldots,n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

b) On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ où $n_1,\ldots,n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 22 *(Polytechnique MPI 2024)*

a) Dénombrer les triplets (A,B,C) de parties deux à deux disjointes de $[\![1,n]\!]$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les fonctions $f : [\![0,2N]\!] \to [\![0,2N]\!]$ telles que $f(0) = f(2N) = 0$ et $\forall k \in [\![0,2N-1]\!], |f(k+1)-f(k)| = 1$.

Exercice 23 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et on note $N : \omega \mapsto \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^*, S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

a) Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$.

b) Exprimer $\mathbf{P}(N \geqslant 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \geqslant 1)$.

c) Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

Exercice 24 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Exercice 25 *(Polytechnique MPI 2024)*

On joue à pile ou face avec probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir pile. On découpe la succession des lancers en séquences maximales de résultats identiques. Déterminer l'espérance de la longueur de la deuxième séquence.

Exercice 26 *(Polytechnique MPI 2024 - corrigé)*

Une grille $\{1,2,3\} \times \{1,2,\dots,n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t=0$ une goutte d'eau au point $(2,n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2,k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t.

b) Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Polytechnique MP - 2024

Exercice 27 *(Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)*

Soit p un nombre premier impair.

a) Dénombrer les $(x,y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ tels que $x^2+y^2=1$.

b) Soit $z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dénombrer $\left\{(x,y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 : x^2+y^2=z\right\}$.

Exercice 28 *(Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)*

Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ où n est impair.

a) Montrer que G possède un élément d'ordre 2.

b) Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre n.
Indication : Considérer l'application Φ qui à $g \in G$ associe $\Phi(g) : G \to G$ telle que, pour tout $x \in G, \Phi(g)(x) = gx$.

c) *(infaisable seul)* Trouver un contre-exemple si n est pair.

Exercice 29 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k (-2)^k$ avec $N \geqslant 0$ et les ε_k dans $\{0,1\}$.

Exercice 30 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Soit $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. On considère l'équation $(*) : x^2 - dy^2 = 1$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Traiter les cas $d<0$ et $d=k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Dans la suite, on suppose $d>0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{N}^2\backslash\{(\pm 1,0)\}$ solution de $(*)$. On pose $z = x_0 + \sqrt{d}y_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(x_n,y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $z^{n+1} = x_n + \sqrt{d}y_n$.

c) En déduire que, si l'ensemble des solutions de $(*)$ est non trivial, i.e. n'est pas réduit à $\{(\pm 1,0)\}$, il en existe une infinité.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|p-qx| < \frac{1}{n}$.

e) Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|p-qx| < \frac{1}{q}$.

f) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une infinité de couples d'entiers (p,q) tels que $\left|p^2 - dq^2\right| < K$.

g) Conclure que $(*)$ possède des solutions non triviales.

Exercice 31 *(Polytechnique MP/MPI 2024- corrigé)*

Soient $n \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré majoré par n, Δ le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Δ divise $P(k)$.

Exercice 32 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $a, b \in \mathscr{L}(V)$. Pour $u, v \in \mathscr{L}(V)$, on pose $[u,v] = uv - vu$. On suppose que a est nilpotent et que $[a,[a,b]] = 0$. Montrer que $[a,b]$ et ab sont nilpotents.

Exercice 33 *(Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)*

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec A appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 34 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée et, pour tout k, $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

a) Soit $\sigma \in S_n$. Calculer, pour tout k, $\operatorname{tr}\left(P_\sigma^k\right)$ en fonction des $n_r(\sigma)$.

b) En déduire que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathscr{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathscr{S}_n$ si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 35 *(Polytechnique MP/MPI 2024- corrigé)*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non inversible ?

b) Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible ?

Exercice 36 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire. Soient $\sigma_u : x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle u$ et $\Omega_u = \left\{x \in \mathbb{R}^3 ; \langle x, u\rangle \geqslant 0\right.$ et $\left.\langle x, \sigma_u(x)\rangle \leqslant 0\right\}$.

a) Décrire et représenter Ω_u.

b) Montrer que Ω_u est auto-dual, c'est-à-dire que $\Omega_u = \left\{y \in \mathbb{R}^3 ; \forall x \in \Omega_u, \langle x, y\rangle \geqslant 0\right\}$.

c) On dit que $x \in \Omega_u$ est extrémal si : $\forall x_1, x_2 \in \Omega_u, x = x_1 + x_2 \Rightarrow x, x_1, x_2$ colinéaires. Quels sont les points extrémaux de Ω_u ?

d) Si $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, on dit que f est extrémal si $f(\Omega_u) \subset \Omega_u$ et, pour tous $g, h \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tels que $f = g + h$, $g(\Omega_u) \subset \Omega_u$, $h(\Omega_u) \subset \Omega_u$, on a f, g, h colinéaires. Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 1.

Exercice 37 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ des nombres réels, A et B dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ et $\chi_B = \prod_{k=1}^{n}(X - b_k)$.

Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Exercice 38 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Soient F un fermé de $\mathbb{R}$, $O = \mathbb{R} \backslash F$.

a) Montrer que O est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés.

b) Montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 39 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

Exercice 40 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Si f est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on note $V(f)$ la borne supérieure, dans $[0,+\infty]$, de l'ensemble $\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1} - f(a_k)| ; n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \cdots \leqslant a_n \leqslant 1\right\}$. On note VB l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

a) Montrer que VB est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ contenant les fonctions monotones et les fonctions lipschitziennes.

b) Donner un exemple de fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à VB.

c) Montrer qu'une fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est dans VB si et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) $\forall g \in [0,1]^{[0,1]}, V(g) < +\infty \Longrightarrow V(f \circ g) < +\infty$;
- (ii) f est lipschitzienne.

Exercice 41 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

On définit la suite (z_n) par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)$.

a) Lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$, étudier l'existence de la suite (z_n) et sa convergence.

b) Même question lorsque $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 42 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ que l'on note a_n.

b) Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ à déterminer. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

Exercice 43 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a > 0$. Déterminer la nature de (S_n). Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n}\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k$.

b) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + \cdots + v_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{T_n}{nv_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n v_n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$.

Exercice 44 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 45 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ bornées par 1. Déterminer $\sup\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' ; \varphi \in E\right\}$.

Exercice 46 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x}|\sin x|}\mathrm{d}x$?

Exercice 47 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

Soit $t > 0$. Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $F_c(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos\left(px^2\right)\mathrm{d}x$, $F_s(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin\left(px^2\right)\mathrm{d}x$ et $Z = F_c + iF_s$.

a) Montrer que Z est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par F.

c) En déduire F_c et F_s.

Exercice 48 *(Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)*

Soit $n \geqslant 2$. On pose $g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{4k}}\binom{2k}{k}^2$. Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} K_n(x) + o(x^n)$.

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta = g_n$.

b) Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 , de somme $f(z)$. On suppose que, pour $|z| < 1$, $|f(z)| \leqslant 1$. Montrer que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant g_n$.

Exercice 49 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

a) Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et K un réel strictement positif. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leqslant g(t) + K\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leqslant g(t) + K\int_0^t e^{K(t-u)}g(u)\mathrm{d}u$.

b) Soient $A, B : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues, et $M, N : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, M'(t) = A(t)M(t), N'(t) = B(t)N(t)$ et que $M(0) = N(0) = I_n$. On suppose de plus que $\|A(t)\| \leqslant K$ et $\|A(t) - B(t)\| \leqslant \eta$ pour tout $t \in [0, T]$, où K, η, T sont des réels strictement positifs, et $\|\,\|$ une norme subordonnée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $\|M(t) - N(t)\| \leqslant e^{Kt}\left(e^{\eta t} - 1\right)$.

Exercice 50 *(Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace de dimension r et $p \in \mathscr{P}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{P}$ en p.

Exercice 51 *(Polytechnique MP/MPI 2024)*

On munit $\mathscr{S}_n$ de la loi uniforme et on considère X_n la variable aléatoire qui associe à une permutation le nombre d'orbites de cette permutation.

a) Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.

b) Déterminer la fonction génératrice de X_n.

c) En déduire des équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ quand $n \to +\infty$.

d) Comment peut-on déterminer la loi de X_n ?

Exercice 52 *(Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)*

Soient $N \geqslant 1, \mu$ une distribution de probabilité sur $[\![1, N]\!]$ telle que $\mu(1) > 0$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi μ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $E = \{S_m, m \in \mathbb{N}\}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(n \in E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbf{P}(n-k \in E)$.

On pose $F : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(n \in E)z^n$ et $G : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k)z^k$.

b) On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{D}, F(z) = \dfrac{1}{1-G(z)}$.

c) Montrer que 1 est un pôle simple de F et tous les autres pôles de F ont un module strictement supérieur à 1 .

d) Montrer que $\mathbf{P}(n \in E) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.

Polytechnique - années précédentes

Exercice 53 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soient $\rho > 1$ et $A_\rho = \left\{ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{\rho^n}, (\epsilon_n)_{n\geqslant 1} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$. Montrer que A_ρ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 54 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Si A est une partie de $\mathbb{N}$, on pose $d(A) = \inf_{n>0} \dfrac{|A \cap [\![1; n]\!]|}{n}$.

a) Soit A une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que $d(A) \geqslant 1/2$. Montrer que tout élément de $\mathbb{N}$ s'écrit comme somme de deux éléments de A.

b) Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0 , montrer que

$$1 - d(A+B) \leqslant (1-d(A))(1-d(B)).$$

c) Si A est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que $d(A) > 0$, montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{N}$ soit égal à $A + A + \cdots + A$(r fois A).

Exercice 55 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $d > 0$ tel que $F(n) = \operatorname{card}\left(A \cap [\![1; n]\!]\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} nd$. On pose $Q = \left\{a/b, (a, b) \in A^2\right\}$.

a) Montrer que Q est dense dans $\mathbb{R}^+$.

b) On suppose que $d = 1$. Montrer que $Q = \mathbb{Q}^{+*}$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que $Q \neq \mathbb{Q}^{+*}$ et $\dfrac{F(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d \geqslant 1 - \varepsilon$.

Exercice 56 *(Polytechnique MP/MPI 2023 - corrigé)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ et $\sum \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Exercice 57 *(Polytechnique MP/MPI 2023)*

On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) Montrer que u converge vers une limite ℓ.

b) Montrer que $\ell = -(\sqrt{2}+1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

c) Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

d) Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.

e) Étudier les variations de u.

f) Déterminer un développement asymptotique semblable à celui de la question c) pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

g) Soit $\alpha \in]0,1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 58 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée n-ième de f s'annule-t-elle?

Exercice 59 *(Polytechnique MP/MPI 2023 - corrigé)*

Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer

$$I_r(u,v) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(u - re^{i\theta}\right)\left(v - re^{i\theta}\right)}$$

Exercice 60 *(Polytechnique MP/MPI 2023)*

a) Pour $x \geqslant 0$ on pose $f(x) = \operatorname{card}\left\{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2+m^2 \leqslant x\right\}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

b) On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Trouver un équivalent de g en 1^-en utilisant g^2.

Exercice 61 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soient $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}, E$ l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à $D_o = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ est développable en série entière.

a) Soit $f \in E$. On écrit $\forall z \in D_o, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que, si $f \in E, \max_{z\in D}|f(z)| = \max_{z\in\mathbb{U}}|f(z)|$.

c) Montrer qu'il existe K tel que, pour toute f dans E écrite comme dans la question a) et tout $N \geqslant 2$, on ait

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leqslant K\|f\|_\infty \ln N.$$

Exercice 62 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ converge. Montrer que l'équation différentielle $y' - ay = f$ admet une unique solution de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 63 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*, f$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (u,v) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(u+tv)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose que f est convexe. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les dérivées partielles $\partial_i f(x)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ existent. Montrer que f est différentiable en x.

Exercice 64 *(Polytechnique MP/MPI 2023 - corrigé)*

Soient $p \in [0,1/2]$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n=-1)=\mathbf{P}(X_n=1)=p$ et $\mathbf{P}(X_n=0)=1-2p$. On cherche p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1,\dots,a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = b\right).$$

a) Montrer que $p \leqslant 1/3$, puis que $p < 1/3$ et enfin que $p \leqslant 1/4$.

b) Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X=k)$ en fonction de Φ_X.

c) En déduire que $p \leqslant 1/4$ est une condition suffisante.

Exercice 65 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{d-1})$ une liste de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note p_d la probabilité pour que le polynôme $X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$ possède une racine rationnelle. Montrer que $p_d \underset{d\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi d}}$.

Exercice 66 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

a) Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 . Montrer, si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, que $\mathbf{P}(X \geqslant \mathbf{E}(X)+\lambda) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)+\lambda^2}$

b) Soit $(X_n)_n \geqslant 1$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant un moment d'ordre 2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_n)=0$ et $\mathbf{V}(X_n) \leqslant 1$. On pose $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n \leqslant 1\}$. Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

Exercice 67 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un entier $k \in [\![1,n]\!]$, une k-montée de σ est une liste strictement croissante $(i_1,\dots,i_k)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ telle que $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme, et on note X_n la variable aléatoire attribuant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ le plus grand entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\mathfrak{S}_n$ admette une k-montée.

a) Montrer, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'inégalité $\mathbf{P}(X_n \geqslant k) \leqslant \dfrac{1}{k!}\dbinom{n}{k}$.

b) Mettre en évidence un réel $C>0$ tel que $\mathbf{P}\left(X_n \geqslant C\sqrt{n}\right)$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 68 *(Polytechnique MP/MPI 2023 - corrigé)*

a) Montrer que l'équation $a^2-2b^2=1$ admet une infinité de solutions $(a,b)\in\mathbb{N}^2$. Déterminer l'ensemble des solutions.

b) Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2-2b^2=-1$?

Exercice 69 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = 2\cos(2^n \pi r)$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique.

b) On suppose que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. Que dire de r ?

Exercice 70 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices à coefficients entiers et de determinant 1. On pose les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que G est le sous-groupe engendré par S et T.

b) Soit φ un morphisme de groupes de G vers $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{U}_{12}$.

Exercice 71 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

Pour $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on pose $A_n(\sigma) = \sigma(1)\sigma(2)+\sigma(2)\sigma(3)+\cdots+\sigma(n-1)\sigma(n)$. Déterminer le maximum de A_n.

Exercice 72 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

On considère G le groupe des symétries d'un pentagone régulier, c'est-à-dire les isométries vectorielles de $\mathbb{C}$ conservant $\mathbb{U}_5$.

a) Décrire G. En donner un système de générateurs. On note $\{r, s\}$ un système de générateurs de G, avec $r^5 = 1$ et $s^2 = 1$. Montrer que $G = \left\{r^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\} \sqcup \left\{sr^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$.

b) On souhaite maintenant montrer que tout groupe à 10 éléments est isomorphe, soit à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, soit au groupe des symétries du pentagone. On considère $(G, \cdot)$ un groupe à 10 éléments, non cyclique. Montrer que G possède un élément d'ordre 5, noté ρ, et un élément d'ordre 2 , noté σ.
Montrer que $G = \left\{\rho^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\} \sqcup \left\{\sigma\rho^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$. Montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1} \in \left\{\rho, \rho^{-1}\right\}$. En distinguant les cas, conclure.

Exercice 73 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P induit une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

a) Montrer que P appartient à $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer que P est de degré 1 .

Exercice 74 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Déterminer les couples (A, B) d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$ tels que la suite $(A(n) \wedge B(n))_n$ soit périodique.

Exercice 75 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et E un K-espace vectoriel. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$. Montrer que

$$\ker(u \circ v - v \circ u) = \ker(u - v) \oplus \ker(u + v).$$

Exercice 76 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soient p un nombre premier, n dans $\mathbb{N}^*$, et A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\operatorname{tr}\left((A+B)^p\right) \equiv \operatorname{tr}\left(A^p\right) + \operatorname{tr}\left(B^p\right) [p]$.

Exercice 77 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

i) $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$,

ii) B est nilpotente et $BA = 0$.

Exercice 78 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soient $\mathbb{K}$ un corps, n, p, r dans $\mathbb{N}^*, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), P$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r telle que $MP = PN$. Montrer que $\chi_M \wedge \chi_N$ est de degré supérieur ou égal à r.

Exercice 79 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendrant l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne une base $(g_i)_{i\in I}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G.

a) Montrer que la fonction $M \in G \mapsto (\operatorname{tr}(Mg_i))_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est injective.

b) Montrer que, si l'ensemble des classes de similitude des éléments de G est fini, alors G est fini.

Exercice 80 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

Soit C une partie de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ symétrique par rapport à 0 . On suppose que C possède exactement un point d'intersection avec $\{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$pour tout vecteur non nul u de $\mathbb{R}^2$. On note $G(C)$ l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(C) = C$. On fait les hypothèses suivantes :

i) pour tous u, v dans C, il existe une symétrie s de $\mathbb{R}^2$ telle que $s \in G(C)$ et $s(u) = v$,

ii) pour tout $u \in C$, il existe une unique symétrie s dans $G(C)$ d'axe $\operatorname{Vect}(u)$.

Démontrer que C est l'image du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ par un certain automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 81 *(Polytechnique 2022 - corrigé)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|MX\|_2 = \|X\|_2 = 1$

b) Montrer qu'il existe O et O' dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que OMO' soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

c) Expliciter un vecteur X vérifiant les conditions de la question a).

Exercice 82 *(Polytechnique MP 2021 - corrigé)*

Soient $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Exercice 83 *(Polytechnique 2020 - corrigé)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, et φ l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \max\{\mathrm{tr}(OM) \mid O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\}$$

a) Justifier la définition de φ.

b) Montrer que φ est continue.

c) Calculer $\varphi(M)$ lorsque $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

d) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(UM)$ admet son maximum en une matrice O alors $OM \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Corrections

Exercice 10

- on note M la borne supérieure de la suite. On se ramène à une suite minorée, de borne inférieure nulle en posant $v_n = M - u_n$. Cette suite vérifie la même propriété que la suite u. On va montrer qu'elle est constante égale à 0 (toujours plus simple).
- La relation de récurrence est $nv_n = \sum_{k=n+1}^{2n} v_k$. Cela donne $(n+1)v_{n+1} - nv_n = v_{2n+2} + v_{2n+1} - v_{n+1}$ d'où

$$(n+2)v_{n+1} - nv_n = v_{2n+2} + v_{2n+1} \geqslant 0 \text{ ce qui donne } nv_n \leqslant (n+2)v_{n+1} \Leftrightarrow v_n \leqslant \frac{n+2}{n} v_{n+1}.$$

  Plus généralement, on obtient une majoration des termes précédents : si $i \leqslant j-2$ (pour qu'il y ait au moins 2 facteurs aux numérateurs et dénominateurs),

$$0 \leqslant v_i \leqslant \frac{(i+2)\dots(j)(j+1)}{i(i+1)\dots(j-2)(j-1)} v_j = \frac{j(j+1)}{i(i+1)} v_j$$

- Puisque $\inf v = 0$: on se donne $\varepsilon > 0$; il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_{n_0} \leqslant \varepsilon$. Puisque $v_{n_0} = \frac{1}{n_0} \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} v_k$, il existe $k \in [\![n_0+1; 2n_0]\!]$ tel que $v_k \leqslant \varepsilon$ (sinon la somme est $> n_0\varepsilon$ et $v_{n_0} > \varepsilon$). Pour tout $i \in [\![n_0+1; k-2]\!]$, on a

$$v_i \leqslant \frac{k(k+1)}{i(i+1)} v_k \leqslant \frac{2n_0(2n_0+1)}{(n_0+1)(n_0+2)} v_k \leqslant 4v_k$$

  et $v_{k-1} \leqslant \frac{k+1}{k-1} v_k \leqslant 4v_k$. On a donc, pour tout $i \in [\![n_0; k]\!]$, $v_i \leqslant 4\varepsilon$.
- Dès qu'on a un entier n_0 tel que $v_{n_0} < \varepsilon$, alors on en a un autre strictement supérieur avec la même propriété. On note alors

$$A = \{n \geqslant n_0, v_n \leqslant \varepsilon \text{ et } \forall k \in [\![n_0; n]\!], v_k \leqslant 4\varepsilon\}.$$

  Cet ensemble est non vide et il n'est pas majoré : dès qu'un entier p convient, le principe précédent permet d'en trouver un autre q strictement plus grand avec $v_k \leqslant 4\varepsilon$ pour tout entier entre p et q. On en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant 4\varepsilon$.
- Grâce à la relation $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} v_k$, on obtient par récurrence descendante que v_{n_0-1}, puis v_{n_0-2}... jusqu'à v_1 sont inférieurs à 4ε.
- On a donc montré que pour un $\varepsilon > 0$ donné, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant 4\varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes sont nuls.

Exercice 27

a) On s'inspire des relations qui paramétrisent le cercle unité (avec $t = \tan(\theta/2)$:

$$z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}$$

Puisque t^2+1 peut s'annuler, on note $D := \mathbb{F}_p \setminus \left\{t \in \mathbb{F}_p : t^2 = -1\right\}$, S l'ensemble des solutions de l'équation considérée, et on va montrer que $S\setminus\{(-1,0)\}$ est constitué des couples de la forme

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \quad \text{où } t \in D,$$

et que la fonction $\varphi : t \in D \mapsto (x_t, y_t)$ ainsi définie est injective.

- Soit d'abord $t \in D$. On observe alors que x_t et y_t sont bien définis et que

$$(x_t)^2 + (y_t)^2 = \left(1+t^2\right)^{-2}\left(\left(1-t^2\right)^2 + (2t)^2\right) = \left(1+t^2\right)^{-2}\left(1+2t^2+t^4\right) = 1.$$

- si $y_t = 0$ alors $t = 0$ (on utilise ici l'imparité de p pour voir que 2 est inversible dans $\mathbb{F}_p$), puis $x_t = 1 \neq -1$ (à nouveau puisque 2 est inversible dans $\mathbb{F}_p$). Ainsi $(x_t, y_t) \neq (-1, 0)$.
- Soit $t \in D$. Alors $x_t + 1 = \frac{2}{1+t^2} \neq 0$ puis $y_t = (1+x_t)t$ et $t = \frac{y_t}{x_t+1}$. On a donc montré l'injectivité de φ.

- Soit enfin $(x,y) \in S\backslash\{(-1,0)\}$. Si $x=-1$ alors $y^2=1-x^2=0$ donc $y=0$, ce qui est interdit. Ainsi $x \neq -1$ et on peut donc poser $t := \dfrac{y}{x+1}$. Alors
$$1+t^2 = \frac{y^2+(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{y^2+x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)}.$$
Ainsi $y = t(x+1) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $x+1 = \dfrac{2}{1+t^2}$ puis $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

On a donc établi que $S\backslash\{(-1,0)\}$ est en bijection avec D. Puisque $(-1,0)$ est une solution, on conclut que $\#S = \#D+1$. Ensuite, il y a deux cas :

- si -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$, alors X^2+1 a exactement deux racines de $\mathbb{F}_p$ (de nouveau puisque $-1 \neq 1$ dans $\mathbb{F}_p$); ainsi $\#D = p-2$;
- sinon $\#D = p$.

En conclusion, $\#S = p-1$ si -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$, et $\#S = p+1$ sinon.

Remarque : on peut montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1$ modulo 4 (voir d'autres exercices)

b) Pour $z \in \mathbb{F}_p$, notons S_z l'ensemble des solutions de l'équation $x^2+y^2=z$. Tout du long, on notera $C := \left\{\alpha^2 \mid \alpha \in \mathbb{F}_p^\times\right\}$l'ensemble des carrés non nuls dans $\mathbb{F}_p$, qui est un sous-groupe de $\mathbb{F}_p^\times$(image du morphisme d'élévation au carré). Nous faisons trois observations essentielles :

- pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_p^\times$, la fonction $(x,y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$ est clairement une bijection de S_z sur $S_{\alpha^2 z}$;
- pour la fonction $x \in \left(\mathbb{F}_p\right)^\times \mapsto x^2 \in \mathbb{F}_p^\times$, tout élément y ayant un antécédent x a exactement pour antécédents x et $-x$, qui sont distincts ; le lemme des bergers assure donc que $\#C = \dfrac{p-1}{2}$, et par suite
$$\#\left(\mathbb{F}_p^\times \backslash C\right) = (p-1) - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2};$$
- soit enfin $z \in \mathbb{F}_p^\times \backslash C$. Pour tout $x \in C$ on observe que $xz \notin C$ (sinon $z = (xz)x^{-1}$ serait dans le sous-groupe C). Ainsi $x \in C \mapsto xz \in \mathbb{F}_p^\times \backslash C$ est bien définie ; or elle est injective par inversibilité de z, donc bijective puisque $\#C = \#\left(\mathbb{F}_p^\times \backslash C\right)$.

En combinant ces points, on trouve que la fonction $z \mapsto \#S_z$ est constante sur C et sur $\mathbb{F}_p^\times \backslash C$. Notons a et b ses valeurs respectives sur ces ensembles. On a vu à la question précédente que $a = p-1$ si $-1 \in C$, et $a = p+1$ sinon. Il reste à évaluer b. On trouve l'égalité $a\#C + b\#\left(\mathbb{F}_p^\times \backslash C\right) + \#S_0 = p^2$ en partitionnant $\left(\mathbb{F}_p\right)^2$ selon la somme des carrés des composantes, donc
$$b = 2\frac{p^2 - \#S_0}{p-1} - a.$$

On distingue maintenant deux cas, où à chaque fois on dénombrera S_0.

- Supposons d'abord que $-1 \notin C$. Soit $(x,y) \in S_0$. Si $y \neq 0$ alors $\left(xy^{-1}\right)^2 = -1$, ce qui est interdit. Ainsi $y=0$ puis $x^2 = 0 - y^2 = 0$ et donc $x=0$. Réciproquement $(0,0) \in S_0$. Ainsi $\#S_0 = 1$, et comme $a = p-1$ on conclut que
$$b = 2\frac{p^2-1}{p-1} - (p+1) = 2(p+1) - (p+1) = p+1.$$
- Supposons enfin que $-1 = \alpha^2$ pour un $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Nécessairement $\alpha \neq 0$. L'équation $x^2+y^2=0$ se récrit $x^2 = \alpha^2 y^2$ soit $x = \pm\alpha y$. Ainsi $S_0 = D_\alpha \cup D_{-\alpha}$ où l'on note $D_t := \left\{(ty,y) \mid y \in \mathbb{F}_p\right\}$ lorsque $t \in \mathbb{F}_p$. Clairement D_t est en bijection avec $\mathbb{F}_p$ (via $y \mapsto (ty,y)$) pour tout $t \in \mathbb{F}_p$, et $D_\alpha \cap D_{-\alpha} = \{(0,0)\}$ car $2\alpha \neq 0$. Ainsi $\#S_0 = 2p-1$. En conclusion
$$b = 2\frac{p^2-2p+1}{p-1} - (p-1) = 2(p-1) - (p-1) = p-1.$$

Concluons : quel que soit $z \in \mathbb{F}_p^\times$, l' 'équation $x^2+y^2=z$ possède exactement $p+1$ solutions si -1 n'est pas un carré modulo p, et exactement $p-1$ solutions sinon.

Exercice 28

a) Notons e l'élément neutre de G et E l'ensemble des éléments de G d'ordre 2. On a $g \neq g^{-1}$ si et seulement si $g^2 \neq e$ ce qui équivaut à $g \notin \{e\} \cup E$. Soit $H = G\backslash(\{e\} \cup E)$. Si $g \in H$ alors g^{-1} est aussi dans H et $g \neq g^{-1}$. H peut être partitionné avec des ensembles de cardinal 2 de la forme $\left\{g, g^{-1}\right\}$. Donc les cardinaux de G et $\{e\} \cup E$ ont la même parité. Comme le cardinal de G est pair, on conclut que E n'est pas vide.

b) - Pour tout $g \in G$, $\Phi(g)$ est une bijection de G de bijection réciproque $\Phi\left(g^{-1}\right)$). On va considérer les applications $\Phi(g)$ comme des permutations de G (donc des éléments de $\mathfrak{S}(G)$). L'application Φ est être un morphisme de groupes de G dans le groupe des permutations $\mathfrak{S}(G)$ (On a $\Phi(g)\Phi(g') = \Phi(gg')$).
   - Soit g un élément d'ordre 2 de G (existence garantie d'après la question précédente). La permutation $\Phi(g)$ vérifie $\Phi(g) \circ \Phi(g) = \mathrm{Id}$. Les orbites dans G d'une telle permutation sont évidemment de la forme $\{x, gx\}$. Comme les orbites partitionnent G (de cardinal $2n$), on comprend qu'il y a exactement n orbites. Or on sait que $\Phi(g)$ peut se décomposer en produit de cycles à supports disjoints et que ces derniers supports sont précisément les orbites. Autrement dit, $\Phi(g)$ est produit de n transpositions. La signature de $\Phi(g)$ est donc $(-1)^n = -1$ car n est impair.
   - Le morphisme de groupes $\theta = \varepsilon \circ \Phi : G \to \{-1, 1\}$ est donc surjectif. On utilise la relation

$$|\ker(\theta)| \times |\mathrm{Im}\,(\theta)| = |G|.$$

   Cette formule assure que le groupe $\ker(\theta)$ - sous-groupe de G - est de cardinal $2n/2 = n$.

c) trop compliqué - voir RMS 2024/2025 - ex 278

Exercice 31

On pose $d := \deg P$. On introduit les polynômes de Lagrange relatifs aux point $0, \ldots, d$, à savoir, pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$,

$$L_i(X) := \prod_{j \neq i, 0 \leqslant j \leqslant d} \frac{X - j}{i - j}.$$

On peut écrire $P = \sum_{i=0}^{d} P(i) L_i$ et donc, pour tout k dans $\mathbb{Z}$,

$$P(k) = \sum_{i=0}^{d} P(i) L_i(k).$$

Il suffit à présent de montrer que $L_i(k) \in \mathbb{Z}$ pour être certain que Δ divise $P(k)$. On a

$$L_i(k) = \prod_{j \neq i, 0 \leqslant j \leqslant d} \frac{k - j}{i - j} = (-1)^{d-i} \frac{1}{i!(d-i)!} \prod_{j \neq i, 0 \leqslant j \leqslant d} (k - j)$$

- Premier cas : si $k \in [\![0; d]\!]$, alors $L_i(k) = 0$ ou 1.
- Deuxième cas : $k \geqslant d + 1$. Alors

$$L_i(k) = (-1)^{d-i} \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)(k-i-1)\ldots(k-d)}{i!(d-i)!} = (-1)^{d-i} \binom{k}{i} \binom{k-i-1}{d-i}$$

- Troisième cas : $k < 0$. On pose $l = -k$ et alors

$$L_i(k) = (-1)^{d-i}(-1)^d \frac{l(l+1)\ldots(l+i-1)(l+i+1)\ldots(l+d)}{i!(d-i)!} = (-1)^{d-i} \binom{l+i-1}{i} \binom{l+d}{d-i}$$

Exercice 33

On reconnaît le développement en série entière de la fonction sinus. D'ailleurs, en admettant la convergence de la série exponentielle :

$$\forall B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \quad e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}$$

on comprend que la matrice de l'énoncé faisant intervenir A est $\dfrac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}$ que l'on notera naturellement $\sin(A)$.

Trigonalisons dans $\mathbb{C}$ la matrice A : on écrit $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On sait (par continuité de la multiplication matricielle) que l'on a $e^{\pm iA} = P e^{\pm iT} P^{-1}$ et donc $\sin(A) = P \sin(T) P^{-1}$.

- *Premier cas :* si A est diagonalisable, alors on peut choisir $\omega = 0$ dès le début. Mais alors $\sin(T)$ est la limite dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ d'une combinaison linéaire de matrices diagonales. Ainsi, $\sin(T)$ serait diagonale et $\sin(A)$ diagonalisable. Ce cas est à exclure car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (elle n'admet en effet que 1 comme valeur propre et est manifestement différente de la matrice identité).

- *Second cas :* on sait que A n'est pas diagonalisable. Par conséquent, elle ne peut pas admettre deux valeurs propres distinctes (car on est en dimension 2). On peut donc supposer $\lambda = \mu$. A priori λ est complexe et éventuellement non réel. Or $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(T) = 2\lambda$ donc λ est un nombre réel. On peut alors facilement calculer $\sin(T)$ d'abord avec les puissances par récurrence :

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \omega n \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} & \omega \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \\ 0 & \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{pmatrix}$$

puis par convergence de la série donnant lieu à $\sin(T)$:

$$\sin(T) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda) & \omega\cos(\lambda) \\ 0 & \sin(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Puisque $\sin(A) = P\sin(T)P^{-1}$, $\sin(\lambda)$ est la seule valeur propre de $\sin(A)$ donc vaut 1. On a déjà montré que λ est réel. On a donc $\cos(\lambda) = 0$. Cela donne $\sin(A) = P\sin(T)P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.

En conclusion, on ne peut pas écrire la matrice de l'énoncé sous la forme $\sin(A)$.

Exercice 35

a) Si $M = \left(m_{i,j}\right)$ est inversible, il faut modifier au moins un coefficient pour la rendre non inversible. Écrivons $\det M = \sum_{k=1}^{n} m_{k,1}A_{k,1} \neq 0$ (développement par rapport à la première colonne), où $A_{k,1}$ est le cofacteur d'indice $(k,1)$. L'un des termes au moins est non nul. Soit i tel que $m_{i,1}A_{i,1} \neq 0$. Cherchons h tel que la matrice $M + hE_{i,1}$ ne soit pas inversible. Toujours par développement,

$$\det\left(M + hE_{1,1}\right) = \det M + hA_{1,1}$$

et il suffit de prendre $h = -\frac{\det M}{A_{i,1}}$.

b) Montrons que, si $\operatorname{rg} M = r$, il faut modifier au moins $n-r$ coefficients de M pour la rendre inversible. Modifier un vecteur d' une famille $(v_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ augmente le rang d'au plus 1 , puisque

$$\operatorname{Vect}\left(v_1, \ldots, v_{p-1}, w_p\right) \subset \operatorname{Vect}\left(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p\right) + \mathbb{R}w_p$$

En appliquant ceci aux colonnes de M, on voit donc qu'il faut modifier au moins $n-r$ colonnes de M, donc au moins $n-r$ coefficients, pour la rendre inversible.

- Montrons qu'il suffit de modifier $n-r$ coefficients de M pour la rendre inversible. Supposons par exemple que la matrice $\left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}$, extraite de M, soit inversible, avec $r \leqslant n-1$. Notons D son déterminant. Alors, en développant le déterminant de $\left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r+1}$ suivant la dernière colonne, on obtient une expression de la forme :

$$m_{r+1,r+1}D + \sum_{i\leqslant r} m_{i,r+1}D_{i,r+1} = 0,$$

puisque toute matrice carrée extraite de M, de taille $r+1$, est non inversible. Alors

$$\left(m_{r+1,r+1}+1\right)D + \sum_{i\leqslant r} m_{i,r+1}D_{i,r+1} = D \neq 0.$$

En modifiant un coefficient, on a augmenté le rang de M de 1 . Par une récurrence banale, on voit qu'en modifiant $n-r$ coefficients, on transforme M en une matrice inversible.

Exercice 48

a) La fonction $z \mapsto (1-z)^{-1/2}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et son rayon de convergence est égal à 1 . On a, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$,

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-z)^k \quad = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{2^k k!}\prod_{i=0}^{k-1}(2i+1).$$

Or

$$\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{(2i+1)(2i+2)}{(2i+2)}=\frac{(2k)!}{2^k k!},$$

donc

$$K_n(X)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}X^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}X^k=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k.$$

Il suffit ainsi de remarquer que $\left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2=K_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{K_n\left(e^{i\theta}\right)}$ pour pouvoir conclure :

$$\left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2=\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n}b_hb_ke^{i\theta(k-h)}=g_n+\sum_{(k,h)\in[\![0,n]\!]^2,k\neq h}b_hb_ke^{i\theta(k-h)}$$

Or, si $k\neq h$:

$$\int_0^{2\pi}e^{i\theta(k-h)}\mathrm{d}\theta=\left[\frac{e^{i\theta(k-h)}}{i(k-h)}\right]_0^{2\pi}=0.$$

D'où, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{2\pi}\left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta=2\pi g_n$$

b) Prenons $|z|<1$. Alors, par produit de Cauchy,

$$\frac{f(z)}{1-z}=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}z^k\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right).$$

De ce fait, pour tout $n\geqslant 2,\theta\in[0,2\pi]$ et $0<r<1$:

$$\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{1-re^{i\theta}}e^{-in\theta}=r^n\sum_{j=0}^{n}a_j+\sum_{k\neq n}r^ke^{i(k-n)\theta}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right).$$

Pour $r\in]0,1[$ fixé, la série de fonction de terme général

$$u_k:\theta\mapsto r^ke^{i(k-n)\theta}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right),$$

converge normalement sur le segment $[0,2\pi]$, puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\|u_k\|_\infty=\sum_{k=0}^{+\infty}r^k\left|\sum_{i=0}^{k}a_i\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\right)r^k=\frac{1}{1-r}\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|r^k<+\infty.$$

On peut donc permuter série et intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{1-re^{i\theta}}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta\right|=r^n\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\right|.$$

Or, par produit de Cauchy et en reprenant les notations de ***a***),

$$\frac{1}{1-z}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)^2=\left(K_n(z)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}b_kz^k\right)^2=K_n(z)^2+\sum_{k=n+1}^{+\infty}c_kz^k$$

où le rayon de convergence de $\sum c_kz^k$ est $\geqslant 1$. On a également :

$$\frac{f(z)}{1-z}=f(z)K_n(z)^2+\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k\right)\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}c_kz^k\right)=f(z)K_n(z)^2+\sum_{k=n+1}^{+\infty}d_kz^k,$$

où le rayon de convergence de $\sum d_kz^k$ est $\geqslant 1$. On fixe $r\in]0,1[$. On permute à nouveau série et intégrale (convergence normale sur un segment) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{1-re^{i\theta}} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)K_n\left(re^{i\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta + \sum_{k=n+1}^{+\infty} d_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta \quad = \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)K_n\left(re^{i\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta$$

On a donc, pour $r \in]0,1[$,

$$r^n \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)K_n\left(re^{i\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|K_n\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Comme $\left|K_n\left(re^{i\theta}\right)\right|^2$ est polynomiale en r, on peut faire tendre r vers 1 et obtenir le résultat souhaité.

Exercice 50

On suppose que $r \in [\![1, n-1]\!]$ sinon $\mathscr{P}$ est un singleton. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée adaptée à Im p. La matrice de p dans cette base est donc J_r. Soit $\mathscr{P}'$ l'ensemble des matrices dans la base e des projecteurs orthogonaux de rang r. Soient $\alpha > 0$ et $\Gamma :]-\alpha, \alpha[\to \mathscr{P}'$ dérivable en 0 et tel que $\Gamma(0) = J_r$. On a, pour $t \in]-\alpha, \alpha[$, $\Gamma(t) = \Gamma(t)^T$ et $\Gamma(t)^2 = \Gamma(t)$. En dérivant en 0 , on obtient

$$(1)\ \Gamma'(0)\Gamma(0) + \Gamma(0)\Gamma'(0) = \Gamma'(0) \quad \text{et} \quad (2) \quad \Gamma'(0)^T = \Gamma'(0).$$

D'après (2), la matrice $\Gamma'(0)$ est symétrique; on écrit $\Gamma'(0) = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{S}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{S}_{n-r}(\mathbb{R})$. La relation (1) donne :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix},$$

donc $A = 0$ et $C = 0$. L'espace tangent à $\mathscr{P}'$ en J_r est donc inclus dans

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})\right\}.$$

Soit maintenant $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}$, e^{tA} est dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ d'inverse e^{-tA}. Le chemin

$$\Gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} J_r e^{-tA}$$

est tracé sur $\mathscr{P}'$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a $\Gamma(0) = J_r$ et $\Gamma'(0) = AJ_r - J_rA$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2^T \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathscr{A}_r(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$, $A_3 \in \mathscr{A}_{n-r}(\mathbb{R})$, on obtient que

$$\Gamma'(0) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & -A_2^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace tangent à $\mathscr{P}'$ en J_r est donc

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})\right\}.$$

Il s'ensuit que l'espace tangent à $\mathscr{P}$ en p est l'ensemble des endomorphismes symétriques $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u(\mathrm{Im}\,(p)) \subset \mathrm{Im}\,(p)^\perp$.

Exercice 52

a) Comme les X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_m = n) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 + \cdots + X_m = n-k) \quad = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 + \cdots + X_m = n-k).$$

Or X_1 est indépendante de $X_2 + \cdots + X_m$ (lemme des coalitions) donc

$$\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_1 = k) \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_2 + \cdots + X_m = n-k)$$

Comme $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est i.i.d,

$$\mathbf{P}(X_2+\cdots+X_m=n-k)=\mathbf{P}(X_1+\cdots+X_{m-1}=n-k),$$

cette probabilité étant égale à 0 si $n-k<0$, et à 1 si $n=k$ et $m=1$. Ainsi

$$\mathbf{P}(n\in E)=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(X_1=k)\mathbf{P}(n-k\in E)=\sum_{k=1}^{N}\mu(k)\mathbf{P}(n-k\in E).$$

b) Comme $\mathbf{P}(n\in E)\underset{n\to+\infty}{=}O(1)$, le rayon de convergence de la série entière définissant F est supérieur ou égal à 1 . On a, par produit de Cauchy,

$$F(z)G(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\max(n,N)}\mu(k)\mathbf{P}(n-k\in E)\right)z^n=F(z)-\mathbf{P}(0\in E)=F(z)-1.$$

Ceci montre l'égalité, pour $z\in\mathbb{D}$.

c) Soit

$$Q=1-\sum_{k=1}^{N}\mu(k)\cdot X^k$$

On a bien sûr $Q(1)=0$ et $Q'(1)=-\sum_{k=1}^{N}k\mu(k)\neq 0$, donc 1 est un pôle simple de F. Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|\leqslant 1$. Alors

$$1\leqslant\sum_{k=1}^{N}\mu(k)|z|^k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}\mu(k)\right)|z|=|z|.$$

Ainsi pour que z soit racine de Q, il faut que z soit de module 1 et, d'après la condition d'égalité dans l'inégalité triangulaire, $\mu(1)z$ doit être positivement colinéaire à 1 . Le seul zéro de Q de module inférieur ou égal à 1 est 1 .

d) On a

$$F(z)=\frac{1}{Q'(1)}\frac{1}{z-1}+F_0(z)$$

où F_0 est une fraction rationnelle dont les pôles sont de module strictement supérieur à 1 . Le rayon de convergence du développement en série entière de F_0 est strictement supérieur à 1 . On a donc

$$F(z)=\frac{-1}{Q'(1)}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n,\qquad\text{avec}\qquad b_n=o(1)$$

Ainsi

$$\mathbf{P}(n\in E)\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{1}{Q'(1)}+o(1)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}+o(1).$$

Exercice 53

On commence par remarque que les séries sont absolument convergentes. Si $x\in A_\rho$, on a $|x|\leqslant\sum_{n=1}^{\circ+\infty}\frac{1}{\rho^n}=\frac{1}{\rho-1}$. L'ensemble est borné. On a alors le choix entre directement montrer qu'il est compact ou seulement qu'il est fermé.

Soit $x^{(p)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_{n,p}}{\rho^n}$ une suite de termes de A_ρ. On doit en extraire une suite convergente dans l'ensemble.

- On note $I_1^+=\{p\in\mathbb{N},\varepsilon_{1,p}=+1\}$ et $I_1^-=\{p\in\mathbb{N},\varepsilon_{1,p}=-1\}$. L'un des deux ensembles au moins est infini. On le note I_1 et on pose $\alpha_1=+1$ ou -1 suivant qu'on a choisi I_1^+ ou I_1^-. On définit $\varphi(1)=\min I_1$.
- On note $I_2^+=\{p\in I_1,\varepsilon_{2,p}=+1\}$ et $I_2^-=\{p\in I_1,\varepsilon_{2,p}=-1\}$. L'un des deux ensembles au moins est infini. On le note I_2, on pose $\alpha_2=\pm1$ selon le choix et $\varphi(2)=\min I_2\backslash\{\varphi(1)\}$.
- On continue ainsi en construisant des parties infinies de $\mathbb{N}$ de sorte que $I_n\subset I_{n-1}\subset I_2\subset I_1$, des entiers $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ valant ±1 et une séquence d'entiers strictement croissante $\varphi(1)<\varphi(2)<\ldots<\varphi(n)$ (avec $\varphi(k)\in I_k$) avec, pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $x_{\varphi(k)}=\sum_{p=1}^{n}\frac{\alpha_p}{\rho^p}+y_k$ avec $|y_k|\leqslant\sum_{p=k+1}^{+\infty}\frac{1}{\rho^p}=\frac{1}{(\rho-1)\rho^k}$.
- On note $y=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\alpha_p}{\rho^p}$. On a alors, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $|x_{\varphi(k)}-y|\leqslant\frac{2}{(\rho-1)\rho^k}$. Ainsi $\lim_{k\to+\infty}x_{\varphi(k)}=y\in A_\rho$.

on peut explorer plusieurs autres idées :

- On peut essayer de montrer que si une suite d'éléments de A_ρ converge alors elle converge dans l'ensemble. La difficulté est que l'écriture $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{\rho^k}$ n'est pas unique - en fait elle l'est si $\rho > 2$ et ne l'est pas si $\rho \in]1,2]$
- Puisque $\left|\sum_{p=k+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_p}{\rho^p}\right| \leqslant \frac{1}{(\rho-1)\rho^k}$, on peut considérer les ensembles

$$A_N = \bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)\in\{-1,1\}^N} \overline{B}\left(\sum_{p=1}^{N} \frac{\varepsilon_p}{\rho^p}, \frac{1}{(\rho-1)\rho^k}\right)$$

cela représente la réunion des boules fermées centrées en les début des développements de rayon suffisamment grand pour contenir toutes les sommes commençant par ces N premiers termes. On a alors $A_\rho \subset A_N$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, de plus $A_{N+1} \subset A_N$ et ainsi $A_\rho \subset \bigcap_{N\geqslant 1} A_N$. En tant qu'intersection de fermés, c'est un fermé. Si on prouve l'inclusion réciproque, alors on aura que A_ρ est un fermé. On trouve alors deux situations (liées notamment à la non-unicité de la décomposition) :

— si $\rho > 2$, on peut montrer l'inclusion réciproque, notamment grâce à l'unicité de l'écriture (et le fait que les différentes boules fermés de A_N sont deux à deux disjointes.

— dans le cas où $\rho \in]1,2]$, il est plus simple de directement montrer que $A_\rho = [-\frac{1}{\rho-1}, \frac{1}{\rho-1} = K$. On a déjà une inclusion évidente. Soit $x \in K$.

  — si $x \geqslant 0$, on pose $\varepsilon_1 = 1$ sinon $\varepsilon_1 = -1$ et $x_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho}$. Si $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\rho-1}$ et

$$-\frac{1}{\rho} \leqslant x - x_1 \frac{1}{\rho-1} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho(\rho-1)}.$$

  Puisque $\frac{1}{\rho-1} \geqslant 1$, on a $|x - x_1| \leqslant \frac{1}{\rho(\rho-1)}$. On a la même chose si $x < 0$.

  — on choisit pour ε_2 le signe de $x - x_1$ ($+1$ si $x = x_1$) et $x_2 = x_1 + \frac{\varepsilon_2}{\rho^2}$. On montre comme au dessus que $|x - x_2| \leqslant \frac{1}{\rho^2(\rho-1)}$.

  — On poursuit ainsi et on construit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$ et $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{\rho^k}$ de sorte que $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{\rho^n(\rho-1)}$. Si une telle suite est construite, on note ε_{n+1} le signe de $x - x_n$ (toujours avec $+1$ si $x = x_n$). Si $x \geqslant x_n$, alors

$$-\frac{1}{\rho^{n+1}} \leqslant x - x_{n+1} \frac{1}{\rho^n(\rho-1)} - \frac{1}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{\rho^{n+1}(\rho-1)}.$$

  et c'est similaire si $x < x_n$. On construite alors par récurrence cette suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sorte que $x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{\rho^k}$.

Exercice 54

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $A_n = A \cap [\![0,n]\!]$ et $A'_n = \{n - x, x \in A_n\}$. Comme $|A \cap [\![0,n]\!]| \geqslant \frac{n}{2} + 1$, on a $|A'_n| = |A_n| \geqslant \frac{n}{2} + 1$. Or A_n et A'_n sont deux parties de $[\![0,n]\!]$, qui est de cardinal $n + 1 < 2\left(\frac{n}{2} + 1\right)$, donc leur intersection n'est pas vide. Ainsi il existe $x, y \in A_n$ tels que $x = n - y$, et n est somme de deux éléments de A.

b) Pour toute partie C de $\mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $C(n)$ la partie $C \cap [\![1,n]\!]$. Si $d(A) = 0$, on a $B \subset A + B$ et l'inégalité est évidente. On supposera donc $d(A) > 0$ ce qui impose à A d'être infinie. Ordonnons alors A : $A = \{a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_k < \ldots\}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = |A(n)|$. On a $A(n) = \{a_1, \ldots, a_N\} = A(n) + 0 \subset (A+B)(n)$ et la partition

$$(A+B)(n) = A(n) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{N-1} (A+B)(n) \cap \left] a_i, a_{i+1}[\right) \cup ((A+B)(n) \cap]a_N, n]\right]\right)$$

De plus, pour tout i et tout $k > a_i$, $(A+B)(n) \cap]a_i, k]$ contient $a_i + B(k - a_i)$ donc

$$|(A+B)(n) \cap]a_i, k]| \geqslant |B(k - a_i)| \geqslant d(B)(k - a_i).$$

Par suite de la partition ci-dessus on déduit

$$|(A+B)(n)| \geqslant N + \sum_{i=0}^{N-1} d(B)(a_{i+1} - a_i - 1) + d(B)(n - a_N) = d(B)n + N(1 - d(B))$$

Comme $N \geqslant d(A)n$ il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{|(A+B)(n)|}{n} \geqslant d(B) + d(A)(1 - d(B))$$

soit le résultat attendu :

$$d(A+B) \geqslant d(B) + d(A) - d(A)d(B)$$

c) Notons $r.A = A + \dots, +A$ (r fois). De la question ***b***) on déduit

$$\forall r, \quad 1 - d(r.A) \leqslant (1 - d(A))^r$$

Comme $d(A) > 0$, il existe r tel que $d(r.A) \geqslant \frac{1}{2}$. D'après ***a***) on a alors $(2r) \cdot A = (r \cdot A) + (r \cdot A) = \mathbb{N}$.

Exercice 55

a) Soit (u_n) la suite croissante des éléments de A (qui est infini puisque $F(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). On a alors $n = F(u_n) \sim du_n$, donc $u_n \sim \frac{n}{d}$. Prenons $x > 0$, alors $\frac{u_{\lfloor nx \rfloor}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, tandis que $\frac{u_0}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc Q est dense dans $\mathbb{R}^+$.

b) On prend $r = \frac{a}{b}$ où a et b sont dans $\mathbb{N}^*$, et on suppose par l'absurde que $r \notin Q$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $ka \notin A$ ou $kb \notin A$. Ainsi

$$\begin{aligned}
F(na) + F(nb) &= \sum_{j=1}^{na} 1_{j\in A} + \sum_{j=1}^{nb} 1_{j\in A} \\
&\leqslant n(a-1) + \sum_{k=1}^{n} 1_{ka\in A} + n(b-1) + \sum_{k=1}^{n} 1_{kb\in A} \\
&\leqslant n(a+b-2) + \sum_{k=1}^{n} (1_{ka\in A} + 1_{kb\in A}) \\
&\leqslant n(a+b-1)
\end{aligned}$$

Or, le terme de gauche est équivalent par hypothèse à $(a+b)n$, ce qui est contradictoire pour n assez grand.

c) Considérons un nombre premier p suffisamment grand pour que $\frac{1}{p} < \varepsilon$, et soit $A = \mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}$. Alors $\frac{1}{p} \notin Q$, car sinon on pourrait trouver dans A un dénominateur multiple de p. Or $F(n) = n - |p\mathbb{N} \cap [\![1, n]\!]| = n - \lfloor n/p \rfloor$ et $\frac{F(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{p} > 1 - \varepsilon$.

Exercice 56

Posons

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \in [0, +\infty] \quad \text{et} \quad S' = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n^2} \in [0, +\infty]$$

Notons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f^{-1}(n) - \lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

donc par addition $S < +\infty \Leftrightarrow S' < +\infty$. Par ailleurs, par sommation par paquets (cas positif) et croissance stricte de f,

$$S' = \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2 : k \leqslant f^{-1}(n)} \frac{1}{n^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{n\in\mathbb{N}^* : n \geqslant f(k)} \frac{1}{n^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{n=\lceil f(k) \rceil}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Pour tout $p \geqslant 2$, on a par comparaison

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{p^2} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

donc en sommant, pour tout entier $M \geqslant 2$,

$$\frac{1}{M} \leqslant \sum_{n=M}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{M-1}$$

Le théorème des gendarmes pour les équivalents assure donc que

$$\sum_{n=M}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{M\to+\infty}{\sim} \frac{1}{M}$$

Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il vient

$$\sum_{n=\lceil f(k) \rceil}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lceil f(k) \rceil} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{f(k)}$$

Par comparaison de séries à terme général positif, on conclut que

$$S < +\infty \Leftrightarrow S' < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{f(k)} < +\infty$$

Exercice 58

On montre par récurrence que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} = P_n(x) e^{-x^2}$$

où P_n est un polynôme réel de degré n. Le résultat étant vrai pour $n=0$, supposons-le vrai pour n. Alors

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} e^{-x^2} = \left(P_n'(x) - 2xP_n(x)\right) e^{-x^2}$$

et $P_{n+1} = P_n' - 2TP_n$ est bien dans $\mathbb{R}[T]$ et de degré $n+1$.

Il en résulte en premier lieu que $f^{(n)}$ s'annule en n points au plus. Montrons par récurrence qu'elle s'annule en au moins n points (réels). C'est le cas pour $n=0$. Si $f^{(n)}$ s'annule en n points $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors, par le théorème de Rolle, $f^{(n+1)}$ s'annule en au moins $n-1$ points de $]x_1, x_n[$. Mais $f^{(n)}$ tend vers 0 en $\pm\infty$ grâce à son expression. Le théorème de Rolle nous fournit un point d'annulation dans $]-\infty, x_1[$ et un autre dans $]x_n, +\infty[$. Ainsi, $f^{(n+1)}$ s'annule en au moins $n+1$ points.

Exercice 59

La fonction à intégrer est continue sur $[0, 2\pi]$. Calculons d'abord

$$J(u) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{u - re^{i\theta}}$$

- Supposons $|u| > r$. Alors

$$\frac{1}{u - re^{i\theta}} = u^{-1} \frac{1}{1 - \dfrac{r}{u} e^{i\theta}} = u^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{u^n} e^{in\theta}$$

  La série de droite converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Par suite,

$$J(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n u^{-n-1} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi u^{-1}$$

- Supposons $|u| < r$. Alors

$$\frac{1}{u - re^{i\theta}} = -r^{-1} e^{-i\theta} \frac{1}{1 - \dfrac{u}{r} e^{-i\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} u^n r^{-n-1} e^{-i(1+n)\theta}$$

  Par le même argument,

$$J(u) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u^n r^{-n-1} e^{-i(1+n)\theta} \mathrm{d}\theta = 0$$

Finalement, pour $u \neq v$,

$$I_r(u, v) = \frac{1}{v - u}(J(u) - J(v)) = 2\pi \frac{u^{-1}\mathbf{1}_{|u|>r} - v^{-1}\mathbf{1}_{|v|>r}}{v - u}$$

- Supposons à présent $u = v$ et $|u| > r$. De façon analogue,

$$\frac{1}{\left(u - re^{i\theta}\right)^2} = u^{-2}\left(1 - ru^{-1}e^{i\theta}\right)^{-2} = u^{-2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) r^n u^{-n} e^{in\theta}$$

  et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(u - re^{i\theta}\right)^2} = 2\pi u^{-2}$$

- Si $u = v$ et $|u| < r$,

$$\frac{1}{\left(u - re^{i\theta}\right)^2} = r^{-2}e^{-2i\theta}\left(1 - ur^{-1}e^{-i\theta}\right)^{-2} = r^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u^n r^{-n}e^{-i(n+2)\theta}$$

Par intégration, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(u - re^{i\theta}\right)^2} = 0$.

Exercice 61

a) Soit $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. La série de fonctions $\sum_k a_k\left(re^{it}\right)^k e^{-int}$ est normalement convergente par rapport à t sur $[0,\pi]$, on peut donc intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = a_n r^n.$$

Ensuite on fait tendre r vers 1^-. Par convergence dominée, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = a_n$$

à l'aide de la domination : $\left|f\left(re^{it}\right)e^{-int}\right| \leqslant \|f\|_\infty$.

b) Pour $n = 0$, l'égalité (1) ci-dessus s'écrit $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)\mathrm{d}t$. Démontrons que l'on a une relation similaire pour un cercle $C(z,r) \subset D_o$ quelconque :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z + re^{it}\right)\mathrm{d}t$$

Pour un monôme z^n, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(z + re^{it}\right)^n\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}r^k\int_0^{2\pi}e^{ikt}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = z^n.$$

On en déduit le résultat pour une série entière f quelconque par interversion série-intégrale, grâce à la convergence normale de la série entière sur le cercle $C(z,r)$ (compact inclus dans le disque ouvert de convergence).

Comme à la question précédente, on peut par convergence dominée étendre ce résultat au cas où $C(z,r) \subset D$ (lorsque $r = 1 - |z|$ et que $C(z,r)$ est intérieurement tangent au cercle unité).

Soit maintenant z un point de D où $|f|$ atteint son maximum. Si $z \in \mathbb{U}$, il n'y a rien à faire. Supposons donc $|z| < 1$ et posons $r = 1 - |z|$. D'après ce qui précède, on a

$$\|f\|_\infty = |f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z + re^{it}\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty.$$

Il y a donc égalité et par continuité de $|f|$ sur $C(z,r)$, on a $\left|f\left(z + re^{it}\right)\right| = \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. Le cercle $C(z,r)$ rencontre $\mathbb{U}$ en un point, on a donc prouvé que le maximum de $|f|$ sur D est atteint en un point de $\mathbb{U}$.

c) On exploite l'égalité de la question a) :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}e^{-int}\right)\mathrm{d}t.$$

Un calcul bien connu nous donne, pour tout $t \in]0,2\pi[$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N}e^{-int}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|$$

d'où

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|\mathrm{d}t.$$

L'intégrale est la même de 0 à π et de π à 2π ; l'inégalité $\sin(t/2) \geqslant t/\pi$ si $t \in [0,\pi]$ et le changement de variable $u = \frac{N+1}{2}t$ donnent :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{\pi}\left|\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)\right|\frac{\mathrm{d}t}{t} = \|f\|_\infty \int_0^{(N+1)\pi/2} |\sin u|\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Pour finir, en écrivant, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\int_0^x |\sin u|\frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u} = 1 + \ln x$$

on aboutit à la majoration

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leqslant \|f\|_\infty\left(1+\ln\left((N+1)\frac{\pi}{2}\right)\right) = \|f\|_\infty \times O(\ln N)$$

ce qui prouve le résultat demandé.

Exercice 62

D'après la méthode de variation de la constante, les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme :

$$x \mapsto \alpha e^{ax} - e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$$

Comme f et $t \mapsto e^{-at}$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$(par hypothèse et car $2a > 0$), par inégalité de Cauchy-Schwarz, $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$et l'intégrale ci-dessus est bien définie.

L'unicité de l'éventuelle solution de carré intégrable est immédiate : si g_1 et g_2 conviennent, la fonction $g = g_1 - g_2$, elle-même de carré intégrable, satisfait l'équation $y' - ay = 0$ et est donc de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, et cette application n'est de carré intégrable que pour $C = 0$.

On montre maintenant que $g : x \mapsto -e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ convient. On remarque dans un premier temps qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_x^{+\infty}|f(t)|e^{-at}\mathrm{d}t\right)^2 &\leqslant \left(\int_x^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_x^{+\infty} e^{-2at}\mathrm{d}t\right)\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\frac{e^{-2ax}}{2a}\end{aligned}$$

Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leqslant \frac{\|f\|_2}{\sqrt{2a}}$, où $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Comme $g' - ag = f$, on a $g^2 = \frac{1}{a}(g'g - fg)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\left(g^2(x) - g^2(0)\right) - \frac{1}{a}\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{\|f\|_2^2}{(2a)^2} + \frac{1}{a}\left(\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \frac{\|f\|_2^2}{(2a)^2} + \frac{\|f\|_2}{a}\left(\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Si pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t \leqslant 1, g^2$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Sinon, on pose x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0, \int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t \geqslant 1$. On obtient pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\left(\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\|f\|_2^2}{(2a)^2} + \frac{\|f\|_2}{a}.$$

Finalement, g^2 est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On majore de même, pour $x \in \mathbb{R}_-$, $\int_x^0 g^2(t)\mathrm{d}t$. Et g^2 est bien intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 63

a) Par définition, f est convexe si, et seulement si pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, pour tout $t\in[0,1]$, $f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$.

Dans un premier temps, on suppose que pour chaque $(u,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\phi_{u,v}: t\mapsto f(u+tv)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et $t\in[0,1]$.

En choisissant $u=x$ et $v=y-x$, $a=0$ et $b=1$, on a $(1-t)x+ty=u+((1-t)a+tb)v$, et donc :

$$\begin{aligned}f((1-t)x+ty)&=f(u+((1-t)a+tb)v)\\&\leqslant(1-t)f(u+av)+tf(u+bv)=(1-t)f(x)+tf(y).\end{aligned}$$

Ainsi f est bien convexe.

On suppose maintenant f convexe. Soit (u,v) un couple d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $s\in[0,1]$. Comme $u+((1-t)a+tb)v=(1-t)(u+av)+t(u+bv)$ et f est convexe, on a :

$$\begin{aligned}\phi_{u,v}((1-t)a+tb)&=f(u+((1-t)a+tb)v)\\&\leqslant(1-t)f(u+av)+tf(u+bv)=(1-t)\phi_{u,v}(a)+t\phi_{u,v}(b).\end{aligned}$$

Donc la fonction $\phi_{u,v}: t\mapsto f(u+tv)$ est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

b) On note $e=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes ; on le munit donc de la norme $\|\|_\infty$.

Par hypothèse, pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, l'application $t\mapsto f(x+te_i)$ est dérivable en x et :

$$f(x+te_i)-f(x)-t\partial_j f(x)=t\epsilon_j(t),\qquad\text{où}\qquad \lim_{t\to0}\epsilon_j(t)=0.$$

On introduit $u:\begin{cases}\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}\\ h=(h_1,\dots,h_n)&\mapsto f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^n\partial_i f(x)h_i.\end{cases}$

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ et $h\mapsto\sum_{i=1}^n\partial_i f(x)h_i$ est une forme linéaire, cette application u est convexe sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que pour tout $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$u(h)=u\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}h_ine_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u(h_ine_i)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|u(h_ine_i)|.$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour chaque $j\in[\![1,n]\!]$, on pose $\alpha_j>0$ tel que pour tout $|t|\leqslant\alpha_j$, $\left|\epsilon_j(t)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}$, i.e. $\left|u\left(te_j\right)\right|\leqslant|t|\frac{\varepsilon}{n}$. On en déduit donc que, si $\left|h_j\right|\leqslant\frac{\alpha_j}{n}$ pour tout j,

$$u(h)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|h_i|\varepsilon\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\|h\|\varepsilon=\|h\|\varepsilon$$

Comme $\|-h\|=\|h\|\leqslant\frac{\alpha}{n}$, on a de même $u(-h)\leqslant\|h\|\varepsilon$.

Or par convexité,

$$0=u(0)=u\left(\frac{-h}{2}+\frac{h}{2}\right)\leqslant\frac{u(-h)+u(h)}{2}.$$

Ainsi finalement :

$$-\|h\|\varepsilon\leqslant-u(-h)\leqslant u(h)\leqslant\|h\|\varepsilon,$$

et donc $|u(h)|\leqslant\varepsilon\|h\|$. On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$\|h\|\leqslant\delta\Rightarrow|u(h)|=\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^n\partial_i f(x)h_i\right|\leqslant\varepsilon\|h\|.$$

Donc f est différentiable en x, de différentielle $h\mapsto\sum_{i=1}^n\partial_i f(x)h_i$.

Exercice 64

a) On a $\mathbf{P}(X_1 = 0) \geqslant \mathbf{P}(X_1 = 1)$ donc $(1-2p) \geqslant p$ et $p \leqslant 1/3$.
On a $\mathbf{P}(X_1 + 2X_2 = 0) \geqslant \mathbf{P}(X_1 + 2X_2 = 1)$ donc

$$\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) \geqslant \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = -1, X_2 = 1)$$

ce qui donne que $(1-2p)^2 \geqslant p^2 + p(1-2p)$, donc $p \neq 1/3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On a, avec un argument de parité,

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} X_i = 0\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} 2^{i-2} X_i = 0\right) = \mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = (1-2p)^n$$

Comme $2^k - \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} X_i = 1\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_1 = -1, \dots, X_{k-1} = -1, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} p^k (1-2p)^{n-k} = (1-2p)^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{1-2p}\right)^k\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{1-2p}\right)^k = \frac{p}{1-2p} \times \frac{1 - \left(\frac{p}{1-2p}\right)^n}{1 - \frac{p}{1-2p}} = \frac{p}{1-3p}\left(1 - \left(\frac{p}{1-2p}\right)^n\right)$$

On a forcément $\frac{p}{1-2p} < 1$ et, par passage à la limite dans l'inégalité, $1-3p \geqslant p$ donc $p \leqslant 1/4$.

b) On a $\Phi_X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) e^{ik\theta}$. Soit $b \in \mathbb{Z}$. Sous réserve de justification,

$$\int_0^{2\pi} \Phi_X(\theta) e^{ib\theta} \mathrm{d}\theta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \int_0^{2\pi} e^{i(k-b)\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi \mathbf{P}(X = b)$$

La justification vient de la convergence des deux séries :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left|\mathbf{P}(X = k) e^{i(k-b)\theta}\right| \mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left|\mathbf{P}(X = -k) e^{i(-k-b)\theta}\right| \mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi$$

c) On suppose $p \leqslant 1/4$. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$. Soit $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Par le lemme des coalitions et l'indépendance,

$$\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{ita_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{(2p\cos(a_k t) + (1-2p))}_{\geqslant 0} \in \mathbb{R}^+$$

Si $b \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{P}(X = b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_X(\theta) e^{-ib\theta} \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Phi_X(\theta) e^{-ib\theta}\right| \mathrm{d}\theta = \mathbf{P}(X = 0)$$

ce qui prouve la réciproque.

Exercice 65

Notons $Q_d = X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$, et soit $r = \frac{a}{b}$ une racine rationnelle de Q_d, avec $a \wedge b = 1$.

Comme $Q_d(r) = 0$ on a

$$a^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i a^i b^{d-i} + b^d = 0$$

En particulier, b divise a^d, et donc par le théorème de Gauss, $b = \pm 1$. De même, a divise b^d donc $a = \pm 1$. Ainsi $r = 1$ ou $r = -1$. Mais comme $Q_d(1) \geqslant 2$, on obtient l'équivalence :

$$Q_d \text{ admet une racine rationnelle } \iff Q_d(-1) = 0.$$

Reformulé avec les ϵ_i, l'événement $Q_d(-1) = 0$ se réécrit $\sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i (-1)^i = -1 - (-1)^d$.

Posons, pour i pair, $Y_i = \varepsilon_i$, et pour i impair $Y_i = 1 - \varepsilon_i$. Les variables $(Y_1, \dots, Y_{d-1})$ restent i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Mais on a, si n désigne le nombre d'impairs dans $[\![1, d-1]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i (-1)^i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^{d-1} Y_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{d-1} -(1 - Y_i) = \sum_{i=1}^{d-1} Y_i - n.$$

Distinguons selon la parité de d.

- Si d est pair, alors $n = \dfrac{d}{2}$ et $p_d = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{d-1} Y_i = n - 2\right)$.
- Si d est impair, alors $n = \dfrac{d-1}{2}$ et $p_d = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{d-1} Y_i = n\right)$.

Or $\sum_{i=1}^{d-1} Y_i$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(d-1, 1/2)$, donc :

- Si d est pair, $d = 2m$, alors $p_d = \dfrac{1}{2^{2m-1}} \dbinom{2m-1}{m-2}$.
- Si d est impair, $d = 2m + 1$, alors $p_d = \dfrac{1}{2^{2m}} \dbinom{2m}{m}$.

On conclut dans les deux cas à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 66

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On note que $(X \geqslant \mathbf{E}(X) + \lambda) \subset \left((X - \mathbf{E}(X) + t)^2 \geqslant (t + \lambda)^2\right)$, donc l'inégalité de Markov donne

$$\mathbf{P}(X \geqslant \mathbf{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X) + t)^2\right)}{(t + \lambda)^2}.$$

Or $\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X) + t)^2\right) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) + 2t\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) + t^2 = \mathbf{V}(X) + t^2$, si bien que

$$\mathbf{P}(X \geqslant \mathbf{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X) + t^2}{(t + \lambda)^2}.$$

En prenant $t = \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\lambda}$ (ce qui minimise le membre de droite), on trouve donc

$$\mathbf{P}(X \geqslant \mathbf{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \lambda^2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note que $(N > n) = (X_1 > 1) \cap \dots \cap (X_n > 1)$, donc par indépendance mutuelle $\mathbf{P}(N > n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k > 1)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la question précédente donne

$$\mathbf{P}(X_k > 1) \leqslant \mathbf{P}(X_k \geqslant 1) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_1)}{\mathbf{V}(X_1) + 1}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ est évidemment croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}(N = n) \leqslant \mathbf{P}(N > n - 1) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par continuité décroissante, on trouve que

$$\mathbf{P}(N = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(N > n - 1) = 0.$$

Ainsi, N est presque sûrement finie. Enfin, la série $\sum_n e^{na}\mathbf{P}(N=n)$ est donc convergente car son terme général, positif, est dominé par celui de $\sum_n \left(\frac{e^a}{2}\right)^n$, avec $0 \leqslant \frac{e^a}{2} < 1$. Ainsi, e^{aN} est d'espérance finie.

Exercice 67

a) L'événement $(S_n \geqslant k)$ est égal à

$$\bigcup_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n, \sigma(i_1)<\sigma(i_2)<\cdots<\sigma(i_k)\}$$

Les permutations vérifiant $\sigma(i_1)<\sigma(i_2)<\cdots<\sigma(i_k)$ sont déterminées par la donnée d'un ensemble A de cardinal k constitué des images $\{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_k)\}$, ainsi que d'une bijection de$\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$ sur $\{1,\dots,n\}\setminus A$. Il y en a donc

$$\binom{n}{k}\times(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

Ainsi

$$\mathbf{P}(X_n\geqslant k)\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbf{P}(\{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(i_1)<\cdots<\sigma(i_k)\})\leqslant\binom{n}{k}\times\frac{1}{k!}.$$

b) D'après ***a***),

$$\mathbf{P}(X_n\geqslant k)\leqslant\binom{n}{k}\times\frac{1}{k!}\leqslant\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2}\leqslant\frac{n^k}{(k!)^2}$$

D'après la formule de Stirling

$$k! \underset{k\to+\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi k}(1+o(1))$$

donc

$$\ln(k!) \underset{k\to+\infty}{=} k\ln k - k + \frac{1}{2}\ln k + \frac{1}{2}\ln(2\pi)+o(1)$$

On en déduit, en utilisant le développement asymptotique $\lceil C\sqrt{n}\rceil = C\sqrt{n}+\mathrm{O}(1)$, que

$$\begin{aligned}\ln(\lceil C\sqrt{n}\rceil!) &= \lceil C\sqrt{n}\rceil\ln(C\sqrt{n}+O(1)) - C\sqrt{n}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{n})+O(1)\\ &= \frac{1}{2}\lceil C\sqrt{n}\rceil\ln(n)+\lceil C\sqrt{n}\rceil\ln(C)+\lceil C\sqrt{n}\rceil\ln\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\ &\quad -C\sqrt{n}+\frac{1}{4}\ln(n)+O(1)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^{\lceil C\sqrt{n}\rceil}}{(\lceil C\sqrt{n}\rceil!)^2}\right) &= \lceil C\sqrt{n}\rceil\ln(n) - 2\left(\frac{1}{2}\lceil C\sqrt{n}\rceil\ln(n)+C\sqrt{n}\ln(C)-C\sqrt{n}+\frac{1}{4}\ln(n)+O(1)\right)\\ &= 2C(1-\ln(C))\sqrt{n}-\frac{1}{2}\ln(n)+O(1)\end{aligned}$$

Si $C>e$ alors

$$\mathbf{P}\left(X_n\geqslant C\sqrt{n}\right)=\mathbf{P}\left(X_n\geqslant\lceil C\sqrt{n}\rceil\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Exercice 68

On introduit l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$: on pose

$$A=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{P(\sqrt{2}),P\in\mathbb{Z}[X]\}=\{a+\sqrt{2}b \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

Il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbb{R}$ et, par irrationalité de $\sqrt{2}$, il y a unicité de l'écriture de ses éléments sous la forme $a+b\sqrt{2}$.

Pour tout $z = a + \sqrt{2}b \in A$, on peut définir $\bar{z} = a - \sqrt{2}b$, et $N(z) = z\bar{z} = a^2 - 2b^2$. On vérifie que pour tout $(z, z') \in A^2, N(zz') = N(z)N(z')$.

Avec ces notations, on montre que z est un inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(z) = \pm 1$. En effet, si $z, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ vérifient $zy = 1$, alors $N(z)N(y) = 1$, avec $N(z), N(y) \in \mathbb{Z}$; donc $N(z) = \pm 1$. Réciproquement, si $N(z) = \pm 1$, alors $\pm\bar{z}$ est inverse de z.

On note donc G_0 le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. La résolution de l'exercice revient à le déterminer.

a) On considère dans un premier temps le sous-groupe de G_0 : $G = \{z \in G_0, N(z) = 1\}$. On remarque que, si $z \in G, -z \in G$; on peut donc n'étudier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$; et de même $z^{-1} = \frac{1}{z} \in G$. Il suffit donc de déterminer $G \cap [1, +\infty[$.

   L'élément 1 est bien inversible. On souhaite désormais déterminer $\min(G \cap]1, +\infty[)$ (dont on va démontrer l'existence). L'ensemble est non vide puisqu'il contient $\theta = 3 + 2\sqrt{2}$. De plus, si $z = a + b\sqrt{2} \in G$ et $z > 1$, alors $a, b > 0$. En effet, on ne peut avoir a et b négatifs, ni avoir $b = 0$ (sinon $a = 1$), ni avoir $a = 0$ (car $2b^2 \neq -1$). Par ailleurs, si a et b étaient de signes opposés strictement, alors $\bar{z}$ ou $-\bar{z}$ serait strictement plus grand que z. Or $z^{-1} = \bar{z} \in]0, 1[$ et donc $\bar{z}$ et $-\bar{z}$ sont dans $]-1, 1[$, c'est donc impossible.

   Par conséquent, $a^2 = 1 + 2b^2$ est un nombre impair $\geqslant 3$, donc $a \geqslant 3$. Or $b = \sqrt{\frac{a^2-1}{2}}$ croît avec a, et $z = a + \sqrt{2}b$ également. Ainsi, $\theta = 3 + 2\sqrt{2}$ est l'élément minimal de $G \cap]1, +\infty[$. Soit $z \in G \cap]1, +\infty[$. Comme $(\theta^n)_{n \geqslant 1}$ croît strictement vers $+\infty$, on peut se donner $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\theta^n \leqslant z < \theta^{n+1}$. Alors $z\theta^{-n} \in [1, \theta[$, et comme $G \cap [1, \theta[= \{1\}, z = \theta^n$. Finalement $G \cap [1, +\infty[= \{\theta^n, n \in \mathbb{N}\}$. Et, d'après les remarques ci-dessus, $G = \{\pm\theta^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

   Finalement, l'ensemble des solutions de la première question est

$$S = \left\{(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2, (3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

   On en déduit une définition par récurrence :

$$a_0 = 1, b_0 = 0, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$$

b) On remarque que $N(1+\sqrt{2}) = -1$ et que l'application qui à $z \in G$ associe $(1+\sqrt{2})z$ est une bijection de G dans $G' = \{z \in G_0, N(z) = -1\}$ (qui n'est pas un groupe), de réciproque $z \mapsto (\sqrt{2}-1)z$. Cela permet d'avoir la forme des solutions de cette seconde équation.

Exercice 69

On écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

a) on écrit $q = 2^{n_0}s$ avec s impair. On a $a_n = 2\cos\left(2\pi p\dfrac{2^{n-n_0-1}}{s}\right)$. Puisque 2 est premier avec s, c'est un élément du sous-groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^*$. Il est d'ordre fini : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m \equiv 1[s]$. On a alors $a_{n+s} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) on a donc $a_0 \in \mathbb{Q}$. On le note sous la forme $\dfrac{p_0}{q_0}$ avec p_0 et q_0 premiers entre eux. On vérifie que $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ et ainsi a_n est rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \wedge q_n = 1$. On a alors $a_{n+1} = \dfrac{p_n^2 - 2q_n^2}{q_n^2}$. Si d est un diviseur premier de q_n^2 et de $p_n^2 - 2q_n^2$ alors $d|p_n^2$ donc $d|p_n$ ce qui est impossible sauf si $d = 1$. On en déduit que les deux termes sont premiers entre eux et donc $p_{n+1} = p_n^2 - 2q_n^2$ et $q_{n+1} = q_n^2$. Si q_0 n'était pas 1, alors la suite q_n serait strictement croissante vers $+\infty$ et notamment tous les a_n serait deux à deux distincts. Cela contredit la périodicité de la question a). On a donc $q_0 = 1$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$. Cela donne les valeurs ± 1 et $\pm 1/2$ pour $\cos(\pi r)$. Cela revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3r = k$.

Exercice 70

a) On vérifie que $S^2 = -I_2$ et $S^4 = I_2$. On a également $T^k = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$ mais également pour $n \in \mathbb{Z}$. Soit A une matrice de G avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Les deux matrices S et T sont presque des matrices d'opérations élémentaires : TA correspond à l'opération $(L_1, L_2) \to L_1 \leftarrow (L_1 + L_2, L2)$ et SA à $(L_1, L_2) \to (-L_2, L_1)$. On effectue de telles opérations afin de faire diminuer strictement $|c|$ (le coefficient en position $(2, 1)$ lorsque $c \neq 0$.

   - si $|a| < |c|$ alors ST a comme coefficient $(2, 1)$ l'entier a avec $|a| < |c|$,
   - si $|a| \geqslant |c|$, on écrit la division euclidienne par c (puisque $c \neq 0$) : $a = cq + r$ avec $|r| < |c|$ et $q \in \mathbb{Z}$. On a alors $T^{-q}A = \begin{pmatrix} r & \times \\ c & \times \end{pmatrix}$ et $ST^{-q}A = \begin{pmatrix} -c & \times \\ r & \times \end{pmatrix}$. On a bien $|r| < |c|$.

On procède ainsi jusqu'à avoir $c = 0$ (nombre fini d'étapes). On est ramené à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En multipliant à gauche par $S^2 = -I_2$, on se ramène à la première forme qui est la matrice T^m. On a donc écrit $QA = T^m$ avec Q produit de matrices T et S qui donne $A = Q^{-1}T^m$ et Q^{-1} est un produit de matrices de la forme S et T ou de leur inverse. Toute matrice de G est dans le groupe engendré par S et T. La réciproque est immédiate.

b) Si φ est un tel morphisme et si $A \in G$ est d'ordre fini k alors $\varphi(A^k) = \varphi(I_2) = 1 = \varphi(A)^k$. On a notamment $\varphi(S)^4 = 1$ et $\varphi(S)$ est dans $\mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_{12}$. Si $A = \prod_{i=1}^{n} B_i^{k_i}$ avec $B_i = S$ ou T et $k_i \in \mathbb{Z}$, alors $\varphi(A) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(B_i)^{k_i}$. Le problème est que T est d'ordre infini. Le but est donc de trouver un autre système de générateurs, si possible à deux éléments, d'ordre un diviseur de 12. S convient, on doit changer T (on peut chercher à l'aide des opérations sur les lignes). On trouve que $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est d'ordre 6. Puisque $T = S^3(ST)$ on en déduit facilement les inclusions $< S, T > \subset < S, ST >$ et l'inclusion réciproque. Ces deux générateurs sont d'ordre 4 et 6 donc la puissance 12 est I_2. Ainsi, pour toute A matrice de G, $\varphi(A)^{12} = 1$.

Exercice 71

Il sera plus facile de décrire la solution en regardant σ comme un n-uplet $\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ dans lequel chaque entier $k \in [\![1, n]\!]$ apparaît une fois et une seule. Notons Σ_n l'ensemble de ces n-uplets et associons à chaque $\sigma \in \Sigma_n$, le $(n-1)$-uplet $\sigma' \in \Sigma_{n-1}$ obtenu en retirant la valeur n. Si $s_1 \neq n$ et $s_n \neq n$, alors on a, en notant i et j les valeurs voisines de n dans σ,

$$A_n(\sigma) = A_{n-1}(\sigma') + n(i+j) - ij$$

Tandis que si $s_1 = n$ ou $s_n = n$, en notant i l'unique valeur voisine de n dans σ,

$$A_n(\sigma) = A_{n-1}(\sigma') + ni$$

de sorte que la formule précédente reste valide en convenant $j = 0$. Comme on obtient tous les éléments de Σ_n en insérant dans un $(n-1)$-uplet de Σ_{n-1} la valeur n, il vient, en posant $a_n = \max_{\sigma \in \mathscr{S}_n} A_n$:

$$a_n = a_{n-1} + \max_{i,j \in [\![0, n-1]\!], i \neq j} [n(i+j) - ij]$$

Comme $n(i+j) - ij = n^2 - (n-i)(n-j)$, ce max est atteint lorsque i et j prennent les valeurs $n-2$ et $n-1$. Ainsi

$$a_n = a_{n-1} + n^2 - 2$$

Avec $a_1 = 0$, on obtient alors aisément

$$a_n = \frac{(n-1)\left(2n^2 + 5n - 6\right)}{6}$$

Exercice 72

On identifie les points $A_0, \dots, A_4$ de $\mathbb{R}^2$, sommets du pentagone réguliers, et leurs affixes, les points de $\mathbb{C}$: $\omega^0, \dots, \omega^4$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

a) On note r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ (dont l'écriture complexe est $z \mapsto \omega z$) et s la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (dont l'écriture complexe est $z \mapsto \overline{z}$). On vérifie immédiatement que r et s sont des éléments de G.

Soit f un élément de G. Si f est une isométrie directe, il s'agit d'une rotation du plan. Comme $f(A_0) \in \{A_k, 0 \leqslant k \leqslant 4\}$, f a un angle de la forme $\frac{2k\pi}{5}$, pour $0 \leqslant k \leqslant 4$, et f est donc la rotation r^k

Si f est une isométrie indirecte, $s \circ f$ est encore un élément de G et est une isométrie directe, donc $s \circ f = r^k$ pour un certain $0 \leqslant k \leqslant 4$ et $f = sr^k$.

Finalement, $G = \left\{r^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\} \sqcup \left\{sr^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$ et cette union est disjointe (puisque les éléments du premier ensemble sont des isométries directes et ceux du second des isométries indirectes). On a montré que r et s engendrent G et $|G| = 10$.

On considère maintenant un autre système de générateurs $\{r, s\}$ de G, avec $r^5 = 1$ et $s^2 = 1$. Ainsi l'ordre de r divise 5 et celui de s divise 2 . Comme G ne peut être engendré uniquement par r ou uniquement par s (il est de cardinal 10), $r \neq Id$ et $s \neq Id$. Donc r est d'ordre 5 et s d'ordre 2.

Le sous-groupe engendré par r est donc $\left\{r^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$ et est de cardinal 5. Ainsi $\left\{sr^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$ est également constitué de 5 éléments distincts. De plus ces deux ensembles sont disjoints car s'il existait $(k, j) \in [\![0, 4]\!]^2$ tel que $r^k = sr^j$, alors $s = r^{k-j}$ serait d'ordre 1 ou 5 , ce qui est exclu.

Finalement, $\left\{r^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\} \cup \left\{sr^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$ est une partie de G constituée de 10 éléments. Donc

$$G = \left\{r^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\} \cup \left\{sr^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$$

b) On considère G un groupe non cyclique de cardinal 10. Il ne contient aucun élément d'ordre 10. Les éléments du groupe peuvent donc être d'ordre 1 pour le neutre, 2 ou 5 pour les autres.

Si tous les éléments de $G\setminus\{e_G\}$ sont d'ordre 2, on vérifie alors que le groupe G est abélien : $\big(\forall (x,y)\in G^2, xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$ Et on peut alors montrer que G a un cardinal de la forme 2^n, par exemple en montrant qu'il s'agit d'un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel. On pouvait sinon simplement expliquer que pour tous éléments distincts x et y de $G\setminus\{e_G\}$, $H=\{e_G,x,y,,xy\}$ était un sous-groupe de cardinal 4 de G ce qui est exclu.

On dispose donc d'au moins un élément ρ d'ordre 5. Soit $\sigma\in G\setminus\left\{\rho^k, 0\leqslant k\leqslant 4\right\}$. On suppose par l'absurde que son ordre est 5 . Pour tout $x\in\langle\rho\rangle\cap\langle\sigma\rangle$, si $x\neq e_G$, son ordre est un diviseur de 5 , donc 5. Et x engendre donc $\langle\rho\rangle$ et $\langle\sigma\rangle$. Donc $\langle\sigma\rangle=\langle\rho\rangle$, ce qui est exclu. Donc σ est d'ordre 2 .

Comme à la question précédente, comme σ est d'ordre 2 et les ρ^j tous d'ordre 1 ou 5 , les ensembles $\left\{\rho^k, 0\leqslant k\leqslant 4\right\}$ et $\left\{\sigma\rho^k, 0\leqslant k\leqslant 4\right\}$ sont disjoints et constitués chacun de 5 éléments distincts. On a donc finalement,

$$G=\left\{\rho^k, 0\leqslant k\leqslant 4\right\}\sqcup\left\{\sigma\rho^k, 0\leqslant k\leqslant 4\right\}$$

On remarque que, pour tout $0\leqslant k\leqslant 4, \sigma\rho^k\in G\setminus\left\{\rho^k, 0\leqslant k\leqslant 4\right\}$, et on a donc montré ci-dessus qu'il était nécessairement d'ordre 2. En particulier $(\sigma\rho)^2=e_G$ et donc $\sigma\rho\sigma^{-1}=\sigma\rho\sigma=\rho^{-1}$.

Or dans le groupe des isométries du pentagone de la question précédente, que l'on notera ici D, on a bien $srs^{-1}=r^{-1}$ (car sr est une isométrie indirecte, donc une réflexion et $(sr)^2=Id$). On vérifie alors que l'application de G dans D, qui à $\sigma^i\rho^j$, pour $i\in\{0,1\}$ et $j\in[\![0,4]\!]$, associe s^ir^j est un isomorphisme de groupes. Donc, si G n'est pas cyclique, il est isomorphe à D.

Si G est cyclique, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 73

a) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$. Si P est constant, alors $P\in\mathbb{Q}[X]$. Supposons maintenant $n=\deg(P)\geqslant 1$. Pour chaque $i\in[\![0,n]\!]$, posons

$$L_i(X)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\left(\frac{X-j}{i-j}\right)$$

Alors $\deg(L_i)=n$ et $L_i(X)\in\mathbb{Q}[X]$. Or $\forall (i,j)\in[\![0,n]\!]^2, L_i(j)=\delta_{i,j}$, donc

$$Q=P-\sum_{i=0}^{n}P(i)L_i$$

s'annule en $0,1,\ldots,n$. Comme $\deg(Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(L_0),\ldots,\deg(L_n))\leqslant n$, Q est identiquement nul, donc $P=\sum_{i=0}^{n}P(i)L_i$. Comme $(P(0),\ldots,P(n))\in\mathbb{Q}^{n+1}$ et $(L_0,\ldots,L_n)\in(\mathbb{Q}[X])^{n+1}, P\in\mathbb{Q}[X]$. Réciproquement si $P\in\mathbb{Q}[X]$, alors $P(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$.

En conclusion les $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$ sont les éléments de $\mathbb{Q}[X]$.

b) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$. D'après la question précédente, $P\in\mathbb{Q}[X]$ et P n'est pas constant (car sinon $P(\mathbb{Q})$ serait un singleton donc $P(\mathbb{Q})\neq\mathbb{Q}$); ainsi $n=\deg(P)\geqslant 1$. Supposons $n>1$ et notons $P(X)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_iX^i$ où les $\alpha_i\in\mathbb{Q}$. Considérant le ppcm des dénominateurs des écritures irréductibles des α_i, on voit qu'il existe $b\in\mathbb{N}^*$ et $(a_0,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^*$ tels que $P(X)=\dfrac{\sum_{i=0}^{n}a_iX^i}{b}$.

Posons $M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\in\mathbb{N}^*$. Pour chaque $y\in\mathbb{Q}$, il existe $x\in\mathbb{Q}$ tel que $P(x)=y$, donc tel que $by-a_0=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$. En particulier, pour $y=\dfrac{a_0+N}{b}$ où N est un nombre premier tel que $N>nM$, et $y=\dfrac{a_0+N}{b}$, il existe $x_N\in\mathbb{Q}$ tel que $\sum_{i=1}^{n}a_ix_N^i=N$ En notant $x_N=\dfrac{p_N}{q_N}$ l'écriture irréductible de x_N (ainsi $(p_N,q_N)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p_N,q_N)=1$), ceci équivaut à :

$$\sum_{i=1}^{n}a_ip_N^iq_N^{n-i}=Nq_N^n$$

L'entier p_N divise le membre de gauche donc divise le membre de droite, et p_N est premier avec q_N donc avec q_N^n, donc (Gauss) p_N divise N. Comme N est premier, $|p_N|=1$ ou $|p_N|=N$.Si $|p_N|=1$, alors

$$N \leqslant N q_N^n = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i p_N^i q_N^{n-i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|\, q_N^{n-i} \leqslant n q_N^{n-1} M \leqslant n q_N^n M,$$

donc $N \leqslant nM$, ce qui est exclu. Donc $|p_N| = N$.

L'entier q_N divise $N q_N^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i p_N^i q_N^{n-i} = a_n p_N^n$ et q_N est premier avec p_N donc avec p_N^n, donc (Gauss) q_N divise a_n. Donc $q_N \leqslant |a_n|$, a fortiori $q_N \leqslant M$.

On a $a_n p_N^n = N q_N^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i p_N^i q_N^{n-i}$, donc

$$\begin{aligned}|a_n|\, N^n = \left|a_n p_N^n\right| &= \left|N q_N^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i p_N^i q_N^{n-i}\right| \\ &\leqslant N q_N^n + \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\, N^i q_N^{n-i} \leqslant N M^n + \sum_{i=1}^{n-1} M^{n+1-i} N^i,\end{aligned}$$

d'où

$$|a_n| \leqslant \frac{N M^n + \sum_{i=1}^{n-1} M^{n+1-i} N^i}{N^n}.$$

Ceci vaut pour tout N premier tel que $N > nM$.

En passant à la limite $N \to +\infty$, il vient $a_n = 0$: c'est absurde. Ainsi $\deg(P) = 1$. Évidemment si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est de degré 1 , alors $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

En conclusion les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ sont les éléments de degré 1 de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 74

On se donne $(A,B) \in \mathbb{Z}[X]^2$ et on pose $c := (A(n) \wedge B(n))_n$. Nous allons démontrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- A et B sont sans racine commune dans $\mathbb{C}$ ou tous deux nuls,
- A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ ou tous deux nuls,
- la suite c est périodique.

Supposons d'abord que A et B ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ et que l'un n'est pas nul. On en trouve un diviseur commun $D \in \mathbb{Q}[X]$ non constant

D'abord D admet au moins une racine complexe, qui est alors racine commune de A et B. Ensuite, on peut supposer D à coefficients dans $\mathbb{Z}$, quitte à le multiplier par un entier approprié. On peut écrire $A = DU$ et $B = DV$ pour des polynômes U, V dans $\mathbb{Q}[X]$. On peut ensuite trouver un entier $N \geqslant 1$ tel que NU et NV soient à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (par exemple, le produit des dénominateurs des coefficients non nuls de U et V dans leur écriture irréductible). Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $D(n)$ divise $NA(n)$ et $NB(n)$, et il divise donc leur pgcd $Nc(n)$. Il vient $|D(n)| \leqslant Nc(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $c(n) \neq 0$. Comme l'un des polynômes A ou B est non nul, on a $(A(n), B(n)) \neq (0,0)$ pour n assez grand, donc $c(n) \neq 0$ pour n assez grand. Enfin, comme D n'est pas constant, la suite $(|D(n)|)_n$ diverge vers $+\infty$; ainsi, $(c(n))_n$ diverge aussi vers $+\infty$ et ne peut donc être périodique. On a ainsi établi que (i) implique (ii), et (iii) implique (ii). Supposons A et B tous deux nuls ou premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. Dans le premier cas, c est nul. Plaçons-nous dans le second. L'identité de Bézout fournit alors U, V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = 1$. Comme précédemment, on peut trouver un entier $N \geqslant 1$ tel que NU et NV soient à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on part de

$$N = A(n) \times (NU(n)) + B(n) \times (NV(n))$$

pour obtenir que $c(n)$ divise N. Montrons alors que c est N-périodique. Pour cela, fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Comme A et B sont à coefficients entiers, la congruence $n+N \equiv n[N]$ donne $A(n+N) \equiv A(n)[N]$ et $B(n+N) \equiv B(n)[N]$ par opérations sur les congruences. Comme $c(n)$ divise N et $A(n)$, il divise $A(n+N)$, et on trouve de même qu'il divise $B(n+N)$. Ainsi $c(n)$ divise $c(n+N)$. Symétriquement, on trouve que $c(n+N)$ divise $c(n)$, donc $c(n+N) = c(n)$ car $c(n) \geqslant 0$ et $c(n+N) \geqslant 0$.

On a ainsi établi que (ii) implique (i) et (iii), ce qui achève l'étude.

Exercice 75

Posons $w = uv$. On a alors, sachant que u, v et w sont inversibles et que $(uv)^{-1} = vu$,

$$\ker(uv - vu) = \ker\left(w - w^{-1}\right) = \ker\left(w^{-1}\left(w^2 - \mathrm{id}\right)\right) = \ker\left(w^2 - \mathrm{id}\right)$$

et par le lemme des noyaux (du fait que $\mathrm{car}(K) \neq 2$),

$$\ker\left(w^2-\mathrm{id}\right)=\ker(w-\mathrm{id})\oplus\ker(w+\mathrm{id})$$

On a en outre les égalités $\ker(u-v)=\ker(w-\mathrm{id})$ et $\ker(u+v)=\ker(w+\mathrm{id})$; en effet, par exemple,

$$\ker(uv-\mathrm{id})=\ker\left(uv-u^2\right)=\ker(u(u-v))=\ker(u-v)$$

Ainsi, le résultat attendu s'ensuit.

Exercice 76

Posons $M_1=A$ et $M_2=B$. Développons :
$$(A+B)^p=\sum_{f\in\{1,2\}^p}\underbrace{M_{f(1)}M_{f(2)}\cdots M_{f(p)}}_{C_f}.$$

Par linéarité de la trace, il vient

$$\mathrm{tr}\,(A+B)^p=\sum_{f\in\{1,2\}^p}\mathrm{tr}\left(C_f\right)$$

Notons G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ engendré par le p-cycle $c=(12\cdots p)$. Ainsi, G est d'ordre p. Nous définissons une relation $\sim$ sur ${}^{\{}1,2\}^p$ comme suit : $f\sim g$ si et seulement s'il existe $\sigma\in G$ tel que $g=f\circ\sigma$. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Notons que pour tout $f\in\{1,2\}^p$, on a par propriété de la trace :

$$\mathrm{tr}\left(C_{f\circ c}\right)=\mathrm{tr}\left(M_{f(2)}M_{f(3)}\cdots M_{f(p)}M_{f(1)}\right)=\mathrm{tr}\left(M_{f(1)}M_{f(2)}M_{f(3)}\cdots M_{f(p)}\right)=\mathrm{tr}\left(C_f\right)$$

Par récurrence, il vient $\mathrm{tr}\left(C_f\right)=\mathrm{tr}\left(C_g\right)$ dès que f et g représentent deux éléments équivalents de $\{1,2\}^p$. En notant X l'ensemble des classes d'équivalences pour $\sim$ et en notant, pour une telle classe D, T_D la valeur constante (nécessairement entière) de $f\mapsto C_f$ sur D, il vient

$$\mathrm{tr}\,(A+B)^p=\sum_{D\in X}|D|T_D.$$

Nous remarquons que la classe de $f_1:x\mapsto 1$ est $\{f_1\}$ et que celle de $f_2:x\mapsto 2$ est $\{f_2\}$. Soit enfin $f\in\{1,2\}^p$ non constante. La fonction $\sigma\in G\mapsto f\circ\sigma$ est alors injective : supposons en effet le contraire et donnons-nous σ et τ distincts dans G tels que $f\circ\sigma=f\circ\tau$. Alors $f\circ\left(\sigma\circ\tau^{-1}\right)=f$. Posons $\sigma':=\sigma\circ\tau^{-1}$ et remarquons (récurrence évidente) que $f\circ(\sigma')^k=f$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Or $\sigma':=\sigma\circ\tau^{-1}$ est un élément différent de l'identité du groupe G ; comme p est premier le théorème de Lagrange montre que σ' engendre G, et en particulier $c=(\sigma')^k$ pour un $k\in\mathbb{N}$. Il vient $f\circ c=f$, donc f est constante. C'est absurde, donc $\sigma\in G\mapsto f\circ\sigma$ est injective, et ainsi la classe d'équivalence de f est de cardinal p. L'identité précédente donne alors

$$\mathrm{tr}\left((A+B)^p\right)\equiv\mathrm{tr}\left(A^p\right)+\mathrm{tr}\left(B^p\right)[p].$$

Exercice 77

- On suppose i). Prenant $M=0$, on obtient : $\chi_B=\chi_0=X^n$. Donc B est nilpotente. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la liste des racines, chacune répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, de $\chi_{AM+B}=\chi_{AM}$. En trigonalisant $AM+B$ et AM, on voit que

$$\mathrm{tr}\left((AM)^2\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2=\mathrm{tr}\left((AM+B)^2\right)$$

Donc, comme B^2 est nilpotente :

$$0=\mathrm{tr}\left((AM+B)^2\right)-\mathrm{tr}\left((AM)^2\right)=\mathrm{tr}\,(AMB)+\mathrm{tr}\,(BAM)+\mathrm{tr}\left(B^2\right)=2\mathrm{tr}\,(MBA).$$

Ceci vaut pour toute $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Prenant $M=(\overline{BA})^T=\overline{A}^T\overline{B}^T$, il vient

$$0=\mathrm{tr}\left((\overline{BA})^TBA\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|(BA)_{i,j}\right|^2$$

soit $BA=0$.

- $ii) \Longrightarrow i)$: réciproquement, supposons que B est nilpotente et $BA = 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, comme B est semblable à une matrice triangulaire avec une diagonale nulle, $\det\left(I_n - \frac{1}{z}B\right) = 1$. Or comme $BA = 0$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left(I_n - \frac{1}{z}B\right)(zI_n - AM) = zI_n - AM - B$$

Donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \chi_{AM}(z) = \det(zI_n - AM) = \det\left(I_n - \frac{1}{z}B\right)\det(zI_n - AM)$$
$$= \det(zI_n - AM - B) = \chi_{AM+B}(z).$$

Le polynôme $\chi_{AM+B} - \chi_{AM}$ a une infinité de racines, donc il est nul. Ainsi $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Exercice 78

Notons $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice $P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ étant de rang r, il existe $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $P = AJ_rB$. L'hypothèse $MP = PN$ s'écrit alors $CJ_r = J_rD$ où l'on a posé $C = A^{-1}MA$ et $D = BNB^{-1}$. écrivons C et D par blocs :

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad D = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline D_3 & D_4 \end{array}\right)$$

où $C_1, D_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. La relation $CJ_r = J_rD$ entraîne $C_1 = D_1, C_3 = 0, D_2 = 0$. Il en résulte $\chi_M = \chi_C = \chi_{C_1}\chi_{C_4}$ et $\chi_N = \chi_D = \chi_{D_1}\chi_{D_4} = \chi_{C_1}\chi_{D_4}$. Ainsi, χ_{C_1}, qui est de degré r, divise χ_M et χ_N, ce qui prouve que $\deg(\chi_M \wedge \chi_N) \geqslant r$.

Exercice 79

a) On considère $\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathbb{C}^I \\ M & \mapsto (\mathrm{tr}\,(Mg_i))_{i\in I} \end{cases}$

Par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la trace, ϕ est linéaire. Soit $M \in \ker(\phi)$. Ainsi pour tout $i \in I$, $\mathrm{tr}\,(Mg_i) = 0$. Comme $(g_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par linéarité de la trace, on en déduit que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(MA) = 0$. En particulier avec $A = {}^t\overline{M}$, en notant $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

$$0 = \mathrm{tr}\left(M\,{}^t\overline{M}\right) = \sum_{(i,k)\in[\![1,n]\!]^2} \left|m_{k,i}\right|^2$$

Finalement, pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2, m_{k,i} = 0$. On en déduit que ϕ est injective, et a fortiori, sa restriction à G l'est également.

b) On sait que la trace est constante sur chaque classe de similitude. Comme l'ensemble des classes de similitude des éléments de G est fini, l'ensemble $V = \{\mathrm{tr}(M), M \in G\}$ est fini. Comme G est stable par le produit matriciel, pour chaque $M \in G, (Mg_i)_{i\in I} \in G^I$; donc $(\mathrm{tr}\,(Mg_i))_{i\in I} \in V^I$. Ainsi $\phi(G)$ est inclus dans l'ensemble fini V^I et $\phi(G)$ est fini. Comme ϕ est injective d'après la question précédente, on en déduit que G est fini.

Exercice 80

On appellera hypothèse (0) celle voulant que C intersecte chaque demi-droite fermée d'origine 0 selon un unique vecteur.

Clairement, tout élément de $G(C)$ est injectif (le noyau d'un élément non injectif de C inclurait une droite vectorielle, donc contiendrait un élément de C) donc bijectif. Ensuite, $G(C)$ est clairement un sous-groupe de $\mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Notons $G^+(C) = \{u \in G(C) : \det u > 0\}$ et $G^-(C) = \{u \in G(C) : \det u < 0\}$. Nous allons montrer successivement les points suivants.

(a) $G^-(C)$ est constitué de symétries.
(b) Tout élément de $G^+(C)$ est de déterminant 1 et est produit de deux éléments de $G^-(C)$.
(c) $G^+(C)$ est commutatif.
(d) Pour tous u, v dans C, il existe un f dans $G^+(C)$ tel que $f(u) = v$.
(e) Les seuls éléments de $G^+(C)$ ayant une valeur propre sont $\pm\mathrm{id}$.
(g) $G^+(C)$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^2\right)$.
(h) C est l'image de la sphère unité S par un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

(a) Soit $f \in G^-(C)$. Le polynôme caractéristique de f a donc deux racines réelles $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, et l'on note u et v des vecteurs propres associés. L'hypothèse (0) donne $\alpha = 1$, puis la symétrie de C par rapport à 0 et l'hypothèse (0) donnent $\beta = -1$. Ainsi, f est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}u$ et parallèlement à $\mathbb{R}v$.
(b) Par les hypothèses (0) et (ii), on trouve aussi que $G(C)$ contient une symétrie axiale g. Soit $f \in G^+(C)$. Alors $f \circ g \in G^-(C)$ donc $f = (f \circ g) \circ g$ est le produit de deux symétries, donc il est de déterminant 1.

(c) En reprenant g quelconque dans $G^-(C)$, on obtient aussi $(f\circ g)^2 = \mathrm{id}$ donc $gfg^{-1} = gfg = f^{-1}$. Par suite, $(hg)f(hg)^{-1} = hf^{-1}h^{-1} = f$ pour tous g, h dans $G^-(C)$. En combinant cela avec le point (b), on trouve que $G^+(C)$ est commutatif.

(d) Le point (d) s'obtient facilement en prenant une symétrie s d'axe $\mathbb{R}u$ dans $G^-(C)$ (hypothèse (ii)) et une symétrie $t\in G(C)$ échangeant u et v : la composée $t\circ s$ convient donc.

(e) Soit $f\in G^+(C)$ ayant un vecteur propre w. Notons s l'unique symétrie d'axe $\mathbb{R}w$ qui est dans $G(C)$ (hypothèse (ii)). Alors fsf^{-1} est une symétrie fixant w, et $fsf^{-1}\in G(C)$. Ainsi $fsf^{-1} = s$. Ainsi, f et s commutent, puis f stabilise la deuxième droite propre de s, et est donc diagonalisable. Comme $f\in G(C)$, les hypothèses de départ imposent que toute valeur propre de f vaut ± 1. Comme $\det f = 1$, les seules possibilités sont $f = \pm\mathrm{id}$. Le point (e) est donc établi (réciproquement, id et $-$id sont évidemment dans $G^+(C)$).

(g) Prenons (u, v) libre constituée de vecteurs de C (c'est évidemment possible vu les hypothèses) et choisissons $f\in G^+(C)$ tel que $f(u) = v$. Notons que f ne peut avoir de vecteur propre. Son polynôme caractéristique est donc $X^2 - 2\alpha X + 1$ pour un $\alpha\in]-1,1[$. Posons $\beta := \sqrt{1-\alpha^2}$. Dans la base $\mathscr{B} = \left(u, \beta^{-1}v - \alpha\beta^{-1}u\right)$, la matrice M de f a pour première colonne $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. En prenant la trace et le déterminant, on conclut que

$$M = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} = \alpha I_2 + \beta K \text{ pour } K := \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Comme $\beta\neq 0$, il est facile de voir que les matrices commutant avec M sont celles commutant avec K, autrement dit celles de la forme $aI_2 + bK$ avec $(a, b)\in\mathbb{R}^2$. Soit $g\in G^+(C)$. Comme g commute avec f, on conclut en prenant le déterminant que la matrice de g dans $\mathscr{B}$ est de la forme $aI_2 + bK$ où $(a, b)\in\mathbb{R}^2$ vérifie $a^2 + b^2 = 1$, autrement dit c'est une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$

On est maintenant en mesure de conclure le point (g). Notons P la matrice de $\mathscr{B}$ dans la base canonique, et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à cette matrice. Alors $hfh^{-1}\in\mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ pour tout $f\in G^+(C)$.

(h) On peut maintenant conclure. Choisissons un $u\in C$ arbitraire, et notons λ la norme de $h(u)$. Soit $v\in C$. Il existe $f\in G^+(C)$ tel que $f(u) = v$. Alors

$$\|h(v)\| = \|h(f(u))\| = \left\|\left(hfh^{-1}\right)(h(u))\right\| = \|h(u)\| = \lambda.$$

Ainsi, h envoie C dans la sphère de centre 0 et de rayon λ, et par linéarité l'automorphisme $\Phi := \lambda h^{-1}$ vérifie $C\subset\Phi(S)$. Soit $v'\in S$. Alors $\Phi(v') = \lambda u$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}_+$et un $u\in C$. Ensuite $u = \Phi(v)$ pour un $v\in S$. Ainsi $v' = \lambda v$, puis $\lambda = 1$ en comparant les normes. Ainsi $\Phi(v')\in C$. On conclut que $\Phi(S) = C$, comme souhaité.

Exercice 81

a) on cherche un vecteur de la sphère unité telle que $\|MX\|^2 = {}^tX{}^tMMX = 1$. La matrice $A = {}^tMM$ est symétrique définie positive. Elle est diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives qu'on note $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$. On a $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = 1$. Soit toutes les valeurs propres valent 1, dans ce cas M est orthogonale et tout vecteur de la sphère unité convient. Soit $\lambda_1 < 1$ et $\lambda_n > 1$. On note respectivement X_1 et X_n des vecteurs propres pour ces deux valeurs propres - ils sont orthogonaux. On note $Y = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_n$. On a $\|Y\|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ et $\|MY\|^2 = \lambda_1\cos^2\theta + \lambda_n\sin^2\theta$. Cette quantité décrit le segment $[\lambda_1, \lambda_n]$ lorsque θ décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$ et il existe θ tel que $\|MY\| = 1$.

b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On note e_1 et f_1 deux vecteurs unitaires tels que $f(e_1) = f_1$ (question précédente). On complète en deux bases orthonormées $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est sous la forme $T = \begin{pmatrix}1 & X & \ldots & X\\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec $\det N = 1$. On a donc deux matrices orthogonales U et V telles que $UMV = T$.

On effectue alors une récurrence sur la taille des matrices. On écrit $N = P\tilde{T}Q$ avec P et Q dans $O_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\tilde{T}$ triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On note enfin $\tilde{P} = \begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P\end{pmatrix}$ - de même pour $\tilde{Q}$. Les matrices $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont orthogonales et $UMV = \tilde{P}\tilde{T}\tilde{Q}$. Cela permet d'obtenir la décomposition souhaitée.

c) voir question a) (peut on faire mieux ? ou en trouver un d'une autre façon ?).

Exercice 82

On peut écrire $A = C^2$ avec $C\in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors

$$AB = C^2B = C(CBC)C^{-1}.$$

Il suffit de montrer que CBC est diagonalisable. Mais CBC est encore antisymétrique réelle. On a donc réduit le problème à montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable, matrice que l'on note toujours B.

La matrice $B^2 = -B^T B$ est diagonalisable, donc admet un polynôme minimal μ_{B^2} scindé à racines simples (dans $\mathbb{R}$). On a $\mu_{B^2}\left(B^2\right) = 0$, donc $\mu_{B^2}\left(T^2\right)$ annule B. Il en résulte que μ_B divise $\mu_{B^2}\left(T^2\right)$. Si l'on écrit

$$\mu_{B^2}(T) = \prod_k (T - \lambda_k)$$

on voit donc que μ_B divise

$$\prod \left(T - \sqrt{\lambda_k}\right)\left(T + \sqrt{\lambda_k}\right)$$

(où $\sqrt{\lambda_k}$ désigne une racine carrée complexe de λ_k). Les divers $\sqrt{\lambda_k}$ non nuls sont distincts. Donc μ_B est de la forme $T^j P$, où P est à racines simples non nulles. On suppose sans restriction que $j \geqslant 1$.

Enfin, $\ker B = \ker B^2$. En effet, si $B^2 X = 0, X^T B^2 X = -(BX)^T (BX) = 0$, donc $BX = 0$. Il en résulte aisément que $\ker B^j = \ker B$ pour $j \geqslant 1$. Mais $\operatorname{Im} P(B) \subset \ker B^j = \ker B$. Donc $BP(B) = 0$, et B est annulé par un polynôme à racines simples.

Exercice 83

a) D'abord $O \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(OM)$ est continue car linéaire avec espace-source de dimension finie. L'ensemble non vide $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact car :
   - il est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque de $\{I_n\}$ par la fonction $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t MM$, continue car polynomiale);
   - il est borné (inclus dans la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$ pour la norme euclidienne standard sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$);
   - $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

   Par suite, $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(OM)$ possède bien un maximum $\varphi(M)$.

b) Nous allons constater que φ est lipschitzienne pour la norme infinie standard sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui donnera le résultat voulu. Soit M, N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\operatorname{tr}(OM) - \operatorname{tr}(ON) = \operatorname{tr}(O(M-N)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} O_{i,j}(M-N)_{j,i}$$

   donc

$$|\operatorname{tr}(OM) - \operatorname{tr}(ON)| \leqslant n^2 \|M - N\|_\infty \cdot \|O\|_\infty \leqslant n^2 \|M - N\|_\infty.$$

   En effet, tout coefficient de O est dans $[-1, 1]$ car la somme des carrés des coefficients de O sur n'importe quelle colonne vaut 1 . Prenons O réalisant le maximum de $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(UM)$. Alors $\operatorname{tr}(ON) \geqslant \operatorname{tr}(OM) - n^2 \|M - N\|_\infty = \varphi(M) - n^2 \|M - N\|_\infty$ donc

$$\varphi(N) - \varphi(M) \geqslant -n^2 \|M - N\|_\infty.$$

   Puisque M et N jouent des rôles symétriques, on a aussi $\varphi(M) - \varphi(N) \geqslant -n^2 \|N - M\|_\infty$ et finalement

$$|\varphi(M) - \varphi(N)| \leqslant n^2 \|M - N\|_\infty$$

c) Commençons par le cas où M est diagonale à coefficients positifs. Soit $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{tr}(OM) = \sum_{k=1}^n O_{i,i} M_{i,i} \leqslant \sum_{k=1}^n M_{i,i} = \operatorname{tr}(M)$.

   Passons maintenant au cas général. Soit $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Le théorème spectral fournit $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que $M = UDU^{-1}$. Pour tout $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a donc

$$\operatorname{tr}(OM) = \operatorname{tr}\left(OUDU^{-1}\right) = \operatorname{tr}(\underbrace{U^{-1}OU}_{\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})} D) \leqslant \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(I_n M).$$

   Ainsi, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(M)$.

d) Soit $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ réalisant le maximum de $\psi : U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(UM)$. Fixons une matrice antisymétrique A. D'abord $\left(e^A\right)^T = e^{A^T}$ par retour au sommes partielles et continuité de la transposition (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). Ainsi $\left(e^A\right)^T = e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$, ce qui montre que e^A est orthogonale. Par suite, pour tout réel t, la matrice e^{tA} est aussi orthogonale. On en déduit que $t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{tr}\left(\left(e^{tA}O\right)M\right)$ atteint un maximum en 0 . Or, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composition de la fonction dérivable $t \mapsto e^{tA}$ par la fonction linéaire $B \mapsto \operatorname{tr}(BOM)$) et de dérivée $t \mapsto \operatorname{tr}\left(e^{tA}AOM\right)$. Sa dérivée est alors nulle en 0 , si bien que $\operatorname{tr}(AOM) = 0$. En fixant (i,j) dans $\{1, \ldots, n\}^2$ et en appliquant cela à $A = E_{i,j} - E_{j,i}$, on trouve $(OM)_{j,i} - (OM)_{i,j} = 0$. Ainsi OM est symétrique.

Montrons enfin que OM est à valeurs propres positives. Supposons le contraire : par le théorème spectral, on trouve alors $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ telles que $OM = UDU^{-1}$ et $a_1 < 0$. Posons alors $\Delta := \mathrm{Diag}(-1, 1 \dots, 1)$ de taille n (évidemment orthogonale) puis $O' := U\Delta U^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Remarquons alors que $\mathrm{tr}(O'(OM)) = \mathrm{tr}(\Delta D) = -a_1 + a_2 + \cdots + a_n > a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(OM)$, ce qui, $O'O$ étant orthogonale, contredit notre hypothèse initiale sur O. Ainsi, $OM \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.