Exercice 1 *(TPE MP 2019)*

Un nombre complexe α est dit algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul a coefficients entiers. Soit α un nombre algébrique.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$, unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d le degré de Π.

b) On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \{P(\alpha); P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$

c) Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

Exercice 2 *(TPE MP 2015)*

a) Soit p un nombre premier. Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n^2 + 13n + 20$ soit divisible par 9.

Exercice 3 *(TPE MP 2013)*

Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Exercice 4 *(TPE MP 2019)*

Montrer de deux manières différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 5 *(TPE MP 2018)*

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B inversible. Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 6 *(TPE MP 2016)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & -a \\ -b & 0 & -c \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 *(TPE MP 2016)*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et μ le polynôme minimal de u. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(u)$ est dans $GL(E)$ si et seulement si μ et P sont premiers entre eux.

Exercice 8 *(TPE MP 2019)*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, H un hyperplan de E, s la réflexion orthogonale d'hyperplan H, $f \in \mathscr{O}(E)$.

a) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale, en déterminer les espaces propres.

b) Déterminer les éléments de $\mathscr{O}(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

Exercice 9 *(TPE MP 2013)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

b) Soit $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

Exercice 10 *(TPE MP 2010)*

On note G l'ensemble des fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$g(x+y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 + g(x)g(y)}.$$

a) Déterminer les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

b) Montrer que G contient $g_0 : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Montrer que g_0 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Déterminer G.

Exercice 11 *(TPE MP 2017)*

Soient $d \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de $\mathbb{R}_d[X]$.

a) On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est dans $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Montrer que (P_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 12 *(TPE MP 2017)*

Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} e^{-n/k}$.

Exercice 13 *(TPE MP 2016)*

Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que f' est intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge. Montrer que $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge.

Exercice 14 *(TPE MP 2016)*

Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \ln 2$.

Exercice 15 *(TPE MP 2016)*

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+\frac{t}{2}) \leqslant \frac{t}{2}$ et $-t\ln 2 \leqslant \ln(1-\frac{t}{2}) \leqslant 0$.

b) On définit une suite de fonctions (f_n) sur $]-1,1[$ par $f_0 : x \mapsto x$ et $f_{n+1} : x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{2} f_n(x)\right)$. Montrer que cette suite est bien définie et étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

Exercice 16 *(TPE MP 2016)*

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$ pour $x > 0$. Justifier l'existence et étudier la continuité de f.

Exercice 17 *(TPE MP 2019)*

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} \ln(x) x^{2n+2}$ si $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$.

b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 18 *(TPE MP 2016)*

On définit la fonction par $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que G continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

c) Montrer que $G(x) - G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 19 *(TPE MP 2016)*

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$.

a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{b_n}{n!} x^n$.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ lorsque cela a un sens.

Exercice 20 *(TPE MP 2019)*

Trouver les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

Exercice 21 *(TPE MP 2016)*

Soit (S) le système différentiel $(2x' + y' - 3x - y = t, x' + y' - 4x - y = e^t)$. Écrire (S) sous la forme $X' = AX + B(t)$ où X est un vecteur colonne. Résoudre ce système.

Exercice 22 *(TPE MP 2016)*

Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x' & = & 5x + y - z \\ 2y' & = & x + 5y - z \\ z' & = & 2z \end{array} \right.$$

Exercice 23 *(TPE MP 2019)*

La fonction f est définie sur $[0,1]^2$ par $f(1,1)=0$ et $f(x,y)=\dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x,y)\neq(1,1)$,

a) Montrer que f est continue.

b) Déterminer le maximum de f.

Exercice 24 *(TPE MP 2016)*

Étudier les extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f:(x,y)\mapsto x^4+y^3-3y-2$.

Exercice 25 *(TPE MP 2016)*

Étudier les extrema locaux de $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$.

Exercice 26 *(TPE MP 2011)*

Soit $A>0$. Quel est le maximum de xyz pour x,y,z dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x+y+z=A$? tels que $x+2y+3z=A$?

Exercice 27 *(TPE MP 2019)*

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

a) Trouver $m\in\mathbb{R}$ minimisant $x\in\mathbb{R}\mapsto \mathbf{E}\big((X-x)^2\big)$.

b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$. On suppose que $\mathbb{P}(X\in[a,b])=1$. Montrer que $\mathrm{V}(X)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 28 *(TPE MP 2013)*

Soit $a,b\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $a\equiv b\,[n]\Rightarrow a^n\equiv b^n\,[n^2]$.

Exercice 29 *(TPE MP 2010)*

Résoudre $x^2+x+1=0$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Que peut-on dire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?