Exercices à préparer

Lundi 18 mai (13h-15h)

Exercice 1 *(Polytechnique MPI 2025)*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $O \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\alpha_O = |\det(\psi_O)|$ où $\psi_O : A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto O^T AO$.

Complément d'exercice : généraliser en remplaçant $O \in O_n(\mathbb{R})$ par $S \in S_n(\mathbb{R})$, puis par $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 *(Polytechnique MPI 2025)*

Déterminer les réels α et β tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin t|^\alpha t^\beta \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ un morphisme de groupes de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}(V)$ tel que $\{0\}$ et V soient les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\varphi(g)$ pour $g \in \mathbb{U}$.

a) Montrer que $\dim V = 1$.

b) On suppose $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi\left(e^{i\theta}\right)$ dérivable en 0. Déterminer φ.

Exercice 4 *(Polytechnique MPI 2024)*

On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u.

Exercice 5 *(ENS MP/MPI 2023)*

Soient $(M_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} \to N$.

Mardi 26 mai (13h-15h)

Exercice 6 *(ENS MP 2024 (PLSR))*

Soit p un nombre premier impair.

a) Déterminer card $\{x^2, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$.

b) Démontrer l'équivalence : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p] \iff a$ est un carré non nul modulo p.

c) On pose $a = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (2k)$. Démontrer que :

- si $p \equiv 1[4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \, [p]$,
- si $p \equiv -1[4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \, [p]$.

Exercice 7 *(Polytechnique MPI 2025)*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur $]0,1[$.

a) Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\int_0^1 f(x)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

b) Calculer $\lim\limits_{p\to 0^+} \left(\int_0^1 f(x)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

Exercice 8 *(Polytechnique MPI 2025)*

Un tiroir contient $2n$ chaussettes, constituant n paires. On tire successivement et aléatoirement les chaussettes du tiroir les unes après les autres jusqu'à avoir tiré une paire. Quelle est l'espérance du nombre total de chaussettes tirées ?

Indication : pour simplifier le résultat, on pourra utiliser un raisonnement probabiliste pour établir que $\sum\limits_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = 1$.

Exercice 9 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soient $u_0, u_1 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, avec $u(t = 0, \cdot) = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, \cdot) = u_1$.

Indication : on utilisera la fonction $U = f \circ u$ avec $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convenable.

Exercice 10 *(ENS MP 2024 (SR))*

Soient E euclidien et $T : E \to E$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, |\|T(x) - T(y)\| - \|x - y\|| \leqslant C$. L'objectif est de montrer qu'il existe $h \in \mathbb{R}^+$et un unique $u \in \mathscr{O}(E)$ tels que $\forall x \in E, \|T(x) - u(x)\| \leqslant h$.

a) Conclure dans le cas où $C = 0$.

b) Prouver l'unicité de u.

c) Pour tout x de E, on pose $u_0(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{T(2^n x)}{2^n}$. Montrer que u_0 est bien définie, linéaire et conserve la norme.

d) Conclure.

Mardi 2 juin (10h-12h)

Exercice 11 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ commutant à $AB - BA$. Calculer $\exp(A+B)$.

Exercice 12 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

Exercice 13 *(ENS MP/MPI 2023)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1. Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

Exercice 14 *(ENS MP/MPI 2023)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

a) Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}P'\left(e^{it}\right)}{P\left(e^{it}\right)}\mathrm{d}t$.

b) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité.

Exercice 15 *(Polytechnique 2025)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit u et v dans $\mathscr{L}(E)$, $c = u \circ v - v \circ u$, on suppose $\operatorname{rg} c = 1$.

a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\operatorname{Im} c) \subset \ker c$.

c) Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E non trivial tel que $u(F) \subset F$. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Étudier la réciproque.

Vendredi 5 juin (10h-12h)

Exercice 16 *(Polytechnique MPI 2024)*

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ (où $d \geqslant 1$).

a) Montrer que la boule unité fermée pour N est fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0.

b) Soit C une partie non vide de E, fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^d$ dont C est la boule unité fermée.

Exercice 17 *(Polytechnique MPI 2024)*

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-(1-e^{-n})^x\right) \sim \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 18 *(ENS MP/MPI 2023)*

a) Calculer $\sum \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

b) Calculer $\sum_{d|n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1)=1, \mu(p)=-1$, $\mu\left(p^k\right)=0$ pour $k \geqslant 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm)=\mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m=1$. On pose $F: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]; q \leqslant x\right\}\right|$.

c) Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x)$.

Exercice 19 *(ENS MP 2022)*

On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]=\left\{a+ib\sqrt{2},(a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que l'anneau $A:=\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $N: \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $(a,b) \in A \times (A \backslash \{0\})$, il existe un couple $(q,r) \in A^2$ tel que $a=bq+r$ et $N(r)<N(b)$.

c) Énoncer et démontrer un théorème d'existence et d'unicité d'une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

Exercice 20 *(ENS MP 2022 (PLSR))*

a) Soit $n \geqslant 1, \sigma>0$ et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires réelles telles que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1;n]\!], \mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) \leqslant e^{t^2\sigma^2/2}$. Montrer qu'il existe un réel $C>0$, indépendant de n et σ, tel que $\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\right) \leqslant C\sigma\sqrt{\ln(2n)}$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(X=k)=\alpha e^{-k^2/2}$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leqslant e^{t^2/2}$.