

## Polytechnique MPI (2025)

**Exercice 1** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé à finir)

Soit  $G$  un groupe. Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit maximal lorsque  $H \neq G$  et aucun sous-groupe de  $G$  n'est compris strictement entre  $H$  et  $G$ . Soit  $n \geq 2$ .

- Montrer que  $\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$  est un sous-groupe maximal de  $\mathcal{S}_n$ .
- Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Montrer que  $\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(k) = k\}$  est un sous-groupe maximal de  $\mathcal{S}_n$ .
- On suppose que  $G$  est fini, et on se donne un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que  $\frac{|G|}{|H|}$  soit un nombre premier. Montrer que  $H$  est maximal.

**Exercice 2** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $\alpha_O = |\det(\psi_O)|$  où  $\psi_O : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto O^T A O$ .

Complément d'exercice : généraliser en remplaçant  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  par  $S \in S_n(\mathbb{R})$ , puis par  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 3** (Polytechnique MPI 2025)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $C_n = \{-1, 1\}^n$ . On pose  $H = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), f(C_n) = C_n\}$ . Montrer que  $H$  est un groupe pour la loi de composition et déterminer son cardinal.

**Exercice 4** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

Soient  $a < b$  réels et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , il existe une suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t u_n - k_n = 0$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

**Exercice 5** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

- Pour  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on note  $I_f = \left\{ p > 0, \int_{\mathbb{R}} |f|^p < +\infty \right\}$ . Montrer que  $I_f$  est un intervalle et exhiber  $f$  telle que  $I_f = ]a, b[$ ,  $]0, b[$  ou  $]b, +\infty[$  pour  $0 < a < b$ .
- Déterminer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}$ .

**Exercice 6** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

Soit  $f$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ , de réciproque notée  $g$ .

- Montrer que, pour  $x \geq 0$ ,  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt = x f(x)$ .
- Déduire que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y g(t) dt$ . On pourra également s'intéresser aux cas d'égalité.
- (ajout) : généraliser la première question au cas où  $f$  est seulement continue et réalise une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$

**Exercice 7** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(x - \frac{1}{x}\right)$ . Montrer que  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et sur  $\mathbb{R}^{-*}$ . Exprimer  $\int_{-\infty}^0 g + \int_0^{+\infty} g$  en fonction de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ .

**Exercice 8** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} f_i f_j = \delta_{i,j}$  pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ . Pour  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ , on pose  $K_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x) f_k(y)$ . Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ , on pose  $\varphi_p(x_1, \dots, x_p) = \det\left(\left(K_N(x_i, x_j)\right)_{1 \leq i, j \leq p}\right)$ . Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \varphi_p(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p.$$

**Exercice 9** (Polytechnique MPI 2025 - corrigé)

- a) On pose  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $u_n$ .
- b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_{-2}^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx$ . Prouver l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c I_n$  et la déterminer.

**Exercice 10** (Polytechnique MPI 2025)

- a) Soient  $\lambda > 0$  et  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Calculer  $\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-p+1))$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , et calculer  $\mathbb{E}(1/(X+1))$  et  $\mathbb{E}(1/(X+2))$ .
- b) Soient  $A$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Une  $p$ -partition de  $A$  est une partition de  $A$  formée de  $p$  sous-ensembles (non vides) de  $A$ . Soit  $B$  un ensemble fini de cardinal  $m$ . Dénombrer, pour une  $p$ -partition de  $\mathcal{F}$  de  $A$ , les applications de  $A$  dans  $B$  dont  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des fibres non vides (à savoir des ensembles non vides de la forme  $f^{-1}\{b\}$  où  $b \in B$ ).
- c) En utilisant les deux questions précédentes, exprimer le nombre de partitions de  $A$  comme la somme d'une série numérique.

**Exercice 11** (Polytechnique MPI 2025)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète positive ayant un moment d'ordre 2 et telle que  $\mathbb{E}(X^2) > 0$ . Montrer que, pour  $t > 0$

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{\mathbb{E}(X^2)}\right).$$

**Exercice 12** (Polytechnique MPI 2025)

On cherche à prouver l'existence d'un réel  $C > 0$  tel que, pour toutes variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  indépendantes et de même loi, on ait l'inégalité  $\mathbb{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C \cdot \mathbb{P}(|X - Y| \leq 1)$ .

- a) On suppose  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer l'existence de  $C' > 0$  indépendant de  $X$  et  $Y$  tel que  $\mathbb{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C' \cdot \mathbb{P}(X = Y)$ .
- b) Montrer le résultat souhaité.
- c) Montrer que  $C' \geq 3$ .

**Polytechnique MPI (2024)****Exercice 13** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  commutant à  $AB - BA$ . Calculer  $\exp(A + B)$ .

**Exercice 14** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille  $n \in \mathbb{N}^*$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ?

**Exercice 15** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

On munit l'espace  $E = \mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . On note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$ . Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de vecteurs propres de  $u$ .

**Exercice 16** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie  $A$  de  $E$  à la fois ouverte et fermée?

**Exercice 17** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Trouver une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  telle que  $A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}, \overset{\circ}{\overline{A}}$  et  $\overline{\overset{\circ}{A}}$  soient toutes distinctes.

**Exercice 18** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle majorée telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est constante.

**Exercice 19** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive telle que la série  $\sum u_n$  converge. Montrer que la série de terme général  $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$  diverge.

**Exercice 20** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

- a) Soit  $(f_n)$  une suite de  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  convergeant uniformément vers une fonction  $f$  sur  $[0, 1]$ . On suppose que, pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $\int_0^1 f'_n g \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Que dire de  $f$  ?
- b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ .

**Exercice 21** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$ .

**Exercice 22** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $r \in ]0, \pi[$ . Déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = \int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt$ .

**Exercice 23** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Calculer  $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt$ .

**Exercice 24** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $E$  un ensemble fini. Dénombrer les triplets  $(A, B, C)$  de parties de  $E$  telles que  $A \subset B \subset C$ .

**Exercice 25** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Combien y a-t-il de façon d'apparier les entiers de 1 à  $2r$  ?

**Exercice 26** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

- a) Dénombrer les triplets  $(A, B, C)$  de parties deux à deux disjointes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
- b) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Dénombrer les fonctions  $f : \llbracket 0, 2N \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, 2N \rrbracket$  telles que  $f(0) = f(2N) = 0$  et  $\forall k \in \llbracket 0, 2N-1 \rrbracket, |f(k+1) - f(k)| = 1$ .

**Exercice 27** (Polytechnique MPI 2024)

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , et on note  $N : \omega \mapsto \text{card} \{n \in \mathbb{N}^*, S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

- a) Montrer que  $\mathbf{E}(N) = +\infty$ .
- b) Exprimer  $\mathbf{P}(N \geq 2)$  en fonction de  $\mathbf{P}(N \geq 1)$ .
- c) Montrer que  $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$ .

**Exercice 28** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

**Exercice 29** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

On joue à pile ou face avec probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'obtenir pile. On découpe la succession des lancers en séquences maximales de résultats identiques. Déterminer l'espérance de la longueur de la deuxième séquence.

**Exercice 30** (Polytechnique MPI 2024 - corrigé)

Une grille  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant  $t = 0$  une goutte d'eau au point  $(2, n)$ . À chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point  $(2, k)$ ), la goutte descend d'un niveau avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ou se déplace à droite (resp. gauche) avec probabilité  $\frac{1}{4}$ ; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ou va au milieu avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .

- a) Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant  $t$ .
- b) Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

## Polytechnique MP - 2025

## Exercice 31 (Polytechnique 2025)

- a) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et 1-périodique. On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(x+ka) \leq \sum_{k=0}^n f(y+ka)$ . Montrer que  $f$  est constante.
- b) Soient  $p$  un nombre premier et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la valuation  $p$ -adique de  $n!$ .
- c) Soient  $m, k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\prod_{j=1}^m \binom{2jk}{jk} \left( \prod_{j=1}^m \binom{2j}{j} \right)^{-1} \in \mathbb{N}$ .

## Exercice 32 (Polytechnique 2025)

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  on pose  $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$ .

- a) Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de  $R(I_n)$  non semblables deux à deux.
- b) On suppose  $A$  diagonalisable avec  $n$  valeurs propres distinctes. Déterminer le cardinal de  $R(A)$ .
- c) Est-il vrai que, si  $A$  est diagonalisable, toutes les matrices de  $R(A)$  le sont?
- d) Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet-elle une racine carrée?
- e) On pose  $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$ . Montrer que toute matrice  $A$  de  $U_n$  admet une unique racine carrée dans  $U_n$ .

## Exercice 33 (Polytechnique 2025 - corrigé)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$a(n) = \sup \left\{ r \in \mathbb{N}; \exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall i, A_i^2 = I_n \text{ et } \forall i \neq j, A_i A_j = -A_j A_i \right\}.$$

- a) Si  $n$  est impair, montrer que  $a(n) = 1$ .
- b) Soient  $s, t \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $a(2^s(2t+1)) = 2s+1$ .

## Exercice 34 (Polytechnique 2025)

Pour  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  tel que  $-1 \notin \text{Sp}(M)$ , on pose  $T(M) = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ . On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques et  $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telles que  $-1 \notin \text{Sp}(M)$ .

- a) Montrer que  $T$  est bien définie sur  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ .
- b) Si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $T(A) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ .
- c) Si  $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $T(B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
- d) Calculer  $(T \circ T)(A)$  si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
- e) Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $T(A)$ .
- f) Dédire des questions précédentes que toute matrice de  $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$  est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 35 (Polytechnique 2025)

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique.

- a) Soit  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer que l'application  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \langle M^{-1}x, y \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Soient  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $MN$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à spectre inclus dans  $i\mathbb{R}$ .
- c) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à spectre inclus dans  $i\mathbb{R}$ . Existe-t-il  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = MN$ ?

**Exercice 36** (Polytechnique 2025)

- a) Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que si  $N_1$  et  $N_2$  ont la même sphère unité alors  $N_1 = N_2$ .
- b) On pose  $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ . Soit  $(f, g) \in E^2$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|xf + yg\|_\infty$  soit une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .
- c) Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien, dont on note  $\|\cdot\|$  la norme. Soit  $p$  une autre norme sur  $E$ . On note  $S$  et  $S_p$  les sphères unité respectives pour  $\|\cdot\|$  et  $p$ . Montrer que  $d : x \in S \mapsto \sup_{y \in S_p} |\langle x, y \rangle|$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ , que  $k = \sup_{y \in S_p} \|y\|$  est un réel strictement positif, et enfin que  $d$  est  $k$ -lipschitzienne pour la norme  $\|\cdot\|$ . d) On note  $B = \{f \in E, p(f) \leq 1\}$  et, pour  $x \in S, D_x = \{z \in E; |\langle x, z \rangle| \leq d(x)\}$ . Montrer que  $B = \bigcap_{x \in S} D_x$ .

**Exercice 37** (Polytechnique 2025 - corrigé)

Soit  $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  continue telle que, pour tout  $t, \rho(t)^2 = \rho(t)$ .

- a) Montrer que  $t \mapsto \text{rg } \rho(t)$  est constante.
- b) Montrer l'existence de  $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \text{GL}_n(\mathbb{C}))$  telle que  $\forall t, \rho(t) = u(t)\rho(0)u^{-1}(t)$ .
- c) On suppose de plus que  $\rho(1) = \rho(0)$ . Montrer que l'on peut choisir  $u$  de sorte que l'on ait aussi  $u(0) = u(1)$ .

**Exercice 38** (Polytechnique 2025 - corrigé)

On munit  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$  tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ . Soit  $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum a_n$  converge.
- b) Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_{3^n}(x)$ .
- i) Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $[-1, 1]$ .
- ii) Montrer que  $d(f, \mathbb{R}_{3^n}[X]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_{3^n}[X]} \|f - P\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ .
- Indication* : on pourra considérer les points  $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$  pour  $k \in \llbracket 0; 3^{n+1} \rrbracket$ .

**Exercice 39** (Polytechnique 2025 - corrigé)

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\beta = 1/\alpha$ . Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $z_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n$ .

- a) Donner un équivalent de  $z_n$  et sa valeur exacte lorsque  $\beta \in \mathbb{N}^*$ .
- b) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}, \mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$  et  $y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha)\mu_n$ . On suppose que  $y_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x_n \rightarrow x$ .

**Exercice 40** (Polytechnique 2025)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ .

- a) On suppose que  $a_0 = 1/2$ . Montrer que  $\frac{1}{a_n} - n \sim \ln n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- b) On suppose  $a_0 > 1$ . Déterminer la limite de  $(a_n)$  puis un équivalent de  $a_n$ .
- c) Donner un développement asymptotique à deux termes de  $a_n$ .

**Exercice 41** (Polytechnique 2025 - corrigé)

Soient  $M, m \in \mathbb{R}$  avec  $0 < m < M, f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, [m, M]), q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Soit  $(*)$  l'équation fonctionnelle  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}$ .

- a) On suppose  $m > 2$  ou  $M < 1/2$ . Montrer qu'il existe une unique solution bornée de  $(*)$ .
- b) Montrer dans ce cas que les solutions bornées de  $(*)$  ne s'annulent pas.

**Exercice 42** (Polytechnique 2025 - corrigé)

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. On pose  $\Psi(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}, \alpha \in \mathbb{N}^* \\ p^\alpha \leq x}} \ln p$  et  $T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)$ .

- a) Montrer que  $T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \ln(n) = x \ln(x) - x + O(\ln x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- b) Montrer que  $T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} (-1)^{n-1} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln 2 + O(\ln x)$ .

**Exercice 43** (Polytechnique 2025)

- a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique  $T_n \in \mathbb{Z}[X]$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(2 \cos(x)) = 2 \cos(nx)$ .
- b) Pour  $x, y \in [-2, 2]$  [avec  $x \neq y$ , on pose  $S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} T_n(x) T_n(y)$ .
- i) Montrer que  $S_n(x, y)$  est bien défini.
- ii) Montrer que, pour  $x, y \in [-2, 2]$  avec  $x \neq y$ , on a  $S(x, y) = -2 \ln|x - y|$ .

**Exercice 44** (Polytechnique 2025)

Soient  $\theta > 1$  et  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  dont  $\theta$  est racine de multiplicité 1 et dont les autres racines complexes sont de module  $< 1$  et dont  $1/\theta$  n'est pas racine. Soit  $Q = X^n P(1/X)$ .

- a) Montrer que  $f : z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$  est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon  $1/\theta$ . On note  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$  ce développement.
- b) Montrer que  $g : z \mapsto f(z)(1 - \theta z)$  est développable en série entière de rayon  $> 1$ . On note  $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ . Montrer que les  $c_n$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$ .
- c) Démontrer que  $1 + \theta^2 = b_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - \theta b_{n-1})^2$ .
- d) On suppose que  $P(0) > 0$ . Montrer que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Exercice 45** (Polytechnique 2025)

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 1$ .

- a) Soient  $p$  un projecteur de  $E$  et  $a \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $ap + pa = a$ . Montrer que  $\text{tr } a = 0$ .
- b) On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des projecteurs orthogonaux de  $E$ . Pour  $p \in \mathcal{P}(E)$ , décrire l'espace tangent à  $\mathcal{P}(E)$  en  $p$ . Quelle est sa dimension ?

**Exercice 46** (Polytechnique 2025 - corrigé)

Soient  $X$  une variable aléatoire à support fini à valeurs dans  $\mathbb{Z}^2$  et telle que  $-X \sim X, (X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de  $X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

- a) Montrer que, si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}(\|S_n\|^2) = n\mathbb{E}(\|X\|^2)$  et  $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(S_n = x)^2$ .
- b) Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{c}{n}$ .
- c) Démontrer que  $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$ .

**Polytechnique MP - 2024****Exercice 47** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

Soit  $p$  un nombre premier impair.

- a) Dénombrer les  $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$  tels que  $x^2 + y^2 = 1$ .
- b) Soit  $z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Dénombrer  $\{(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 : x^2 + y^2 = z\}$ .

**Exercice 48** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

Soit  $G$  un groupe fini de cardinal  $2n$  où  $n$  est impair.

- a) Montrer que  $G$  possède un élément d'ordre 2.
- b) Montrer que  $G$  possède un sous-groupe d'ordre  $n$ .  
Indication : Considérer l'application  $\Phi$  qui à  $g \in G$  associe  $\Phi(g) : G \rightarrow G$  telle que, pour tout  $x \in G, \Phi(g)(x) = gx$ .
- c) (infaisable seul) Trouver un contre-exemple si  $n$  est pair.

**Exercice 49** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{Z}[X]$  de degré majoré par  $n, \Delta$  le pgcd de  $P(0), P(1), \dots, P(n)$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}, \Delta$  divise  $P(k)$ .

**Exercice 50** (Polytechnique MP/MPI 2024)

Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $a, b \in \mathcal{L}(V)$ . Pour  $u, v \in \mathcal{L}(V)$ , on pose  $[u, v] = uv - vu$ . On suppose que  $a$  est nilpotent et que  $[a, [a, b]] = 0$ . Montrer que  $[a, b]$  et  $ab$  sont nilpotents.

**Exercice 51** (Polytechnique MP/MPI 2024)

- a) Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que l'équation  $\sum_{k=1}^n x^k = 1$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}^+$  que l'on note  $a_n$ .
- b) Montrer que  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge vers une limite  $\ell$  à déterminer. Donner un équivalent de  $a_n - \ell$ .

**Exercice 52** (Polytechnique MP/MPI 2024)

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ .

**Exercice 53** (Polytechnique MP/MPI 2024)

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  à support compact et  $E$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  bornées par 1. Déterminer  $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi'; \varphi \in E \right\}$ .

**Exercice 54** (Polytechnique MP/MPI 2024)

Nature de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x} |\sin x|} dx$  ?

**Exercice 55** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

Soit  $n \geq 2$ . On pose  $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}} \binom{2k}{k}^2$ . Soit  $K_n$  l'élément de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = K_n(x) + o(x^n)$ .

- a) Montrer que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = g_n$ .
- b) Soit  $\sum a_k z^k$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, de somme  $f(z)$ . On suppose que, pour  $|z| < 1$ ,  $|f(z)| \leq 1$ . Montrer que  $\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq g_n$ .

**Exercice 56** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

- a) Soient  $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues et  $K$  un réel strictement positif. On suppose que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t f(u) du$ . Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t e^{K(t-u)} g(u) du$ .
- b) Soient  $A, B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des fonctions continues, et  $M, N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $M'(t) = A(t)M(t)$ ,  $N'(t) = B(t)N(t)$  et que  $M(0) = N(0) = I_n$ . On suppose de plus que  $\|A(t)\| \leq K$  et  $\|A(t) - B(t)\| \leq \eta$  pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $K, \eta, T$  sont des réels strictement positifs, et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\|M(t) - N(t)\| \leq e^{Kt} (e^{\eta t} - 1)$ .

**Exercice 57** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in [0, n]$ ,  $\mathcal{P}$  l'ensemble des projecteurs orthogonaux de  $\mathbb{R}^n$  sur un sous-espace de dimension  $r$  et  $p \in \mathcal{P}$ . Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à  $\mathcal{P}$  en  $p$ .

**Exercice 58** (Polytechnique MP/MPI 2024 - corrigé)

Soient  $N \geq 1$ ,  $\mu$  une distribution de probabilité sur  $[1, N]$  telle que  $\mu(1) > 0$ ,  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi  $\mu$ . On pose  $S_0 = 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Soit  $E = \{S_m, m \in \mathbb{N}\}$ .

- a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbf{P}(n - k \in E)$ .

On pose  $F : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(n \in E) z^n$  et  $G : z \mapsto \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k$ .

- b) On pose  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ . Montrer que :  $\forall z \in \mathbb{D}, F(z) = \frac{1}{1 - G(z)}$ .
- c) Montrer que 1 est un pôle simple de  $F$  et tous les autres pôles de  $F$  ont un module strictement supérieur à 1.
- d) Montrer que  $\mathbf{P}(n \in E) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$ .

## Polytechnique MPI/MP - années précédentes

**Exercice 59** (Polytechnique 2022 - corrigé)

Soient  $\rho > 1$  et  $A_\rho = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{\rho^n}, (\epsilon_n)_{n \geq 1} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$ . Montrer que  $A_\rho$  est un compact de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 60** (Polytechnique 2022 - corrigé)

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{N}^*$  telle qu'il existe  $d > 0$  tel que  $F(n) = \text{card}(A \cap \llbracket 1; n \rrbracket) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nd$ . On pose  $Q = \{a/b, (a, b) \in A^2\}$ .

- Montrer que  $Q$  est dense dans  $\mathbb{R}^+$ .
- On suppose que  $d = 1$ . Montrer que  $Q = \mathbb{Q}^{+*}$ .
- Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $A \subset \mathbb{N}^*$  telle que  $Q \neq \mathbb{Q}^{+*}$  et  $\frac{F(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d \geq 1 - \varepsilon$ .

**Exercice 61** (Polytechnique MP/MPI 2023 - corrigé)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ , strictement croissante et bijective. Montrer que les séries  $\sum \frac{1}{f(n)}$  et  $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$  sont de même nature.

**Exercice 62** (Polytechnique 2020 - corrigé)

Soient  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ ,  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  dont la restriction à  $D_o = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  est développable en série entière.

- Soit  $f \in E$ . On écrit  $\forall z \in D_o, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ . Montrer que  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que, si  $f \in E$ ,  $\max_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in \mathbb{U}} |f(z)|$ .
- Montrer qu'il existe  $K$  tel que, pour toute  $f$  dans  $E$  écrite comme dans la question a) et tout  $N \geq 2$ , on ait

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq K \|f\|_\infty \ln N.$$

**Exercice 63** (Polytechnique 2020 - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si, pour tout couple  $(u, v)$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction  $t \mapsto f(u + tv)$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- On suppose que  $f$  est convexe. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que toutes les dérivées partielles  $\partial_i f(x)$ , pour  $1 \leq i \leq n$  existent. Montrer que  $f$  est différentiable en  $x$ .

**Exercice 64** (Polytechnique MP/MPI 2023 - corrigé)

Soient  $p \in [0, 1/2]$ ,  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. telle que  $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$  et  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$ . On cherche  $p$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = b\right).$$

- Montrer que  $p \leq 1/3$ , puis que  $p < 1/3$  et enfin que  $p \leq 1/4$ .
- Si  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , on pose  $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}(e^{iX\theta})$ . Exprimer  $\mathbf{P}(X = k)$  en fonction de  $\Phi_X$ .
- En déduire que  $p \leq 1/4$  est une condition suffisante.

**Exercice 65** (Polytechnique 2022 - corrigé)

On note  $G$  le sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  formé des matrices à coefficients entiers et de déterminant 1. On pose les matrices  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $G$  est le sous-groupe engendré par  $S$  et  $T$ .
- Soit  $\varphi$  un morphisme de groupes de  $G$  vers  $\mathbb{C}^*$ . Montrer que  $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{U}_{12}$ .

**Exercice 66** (Polytechnique MP 2021 - corrigé)

On considère  $G$  le groupe des symétries d'un pentagone régulier, c'est-à-dire les isométries vectorielles de  $\mathbb{C}$  conservant  $\mathbb{U}_5$ .

- Décrire  $G$ . En donner un système de générateurs. On note  $\{r, s\}$  un système de générateurs de  $G$ , avec  $r^5 = 1$  et  $s^2 = 1$ . Montrer que  $G = \{r^k, 0 \leq k \leq 4\} \sqcup \{sr^k, 0 \leq k \leq 4\}$ .
- On souhaite maintenant montrer que tout groupe à 10 éléments est isomorphe, soit à  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ , soit au groupe des symétries du pentagone. On considère  $(G, \cdot)$  un groupe à 10 éléments, non cyclique. Montrer que  $G$  possède un élément d'ordre 5, noté  $\rho$ , et un élément d'ordre 2, noté  $\sigma$ .  
Montrer que  $G = \{\rho^k, 0 \leq k \leq 4\} \sqcup \{\sigma\rho^k, 0 \leq k \leq 4\}$ . Montrer que  $\sigma\rho\sigma^{-1} \in \{\rho, \rho^{-1}\}$ . En distinguant les cas, conclure.

**Exercice 67** (Polytechnique 2020 - corrigé)

Soient  $p$  un nombre premier,  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , et  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $\text{tr}((A+B)^p) \equiv \text{tr}(A^p) + \text{tr}(B^p) \pmod{p}$ .

**Exercice 68** (Polytechnique 2020 - corrigé)

Soient  $\mathbb{K}$  un corps,  $n, p, r$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $P$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$  telle que  $MP = PN$ . Montrer que  $\chi_M \wedge \chi_N$  est de degré supérieur ou égal à  $r$ .

**Exercice 69** (Polytechnique 2022 - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$ .

- Montrer qu'il existe  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|MX\|_2 = \|X\|_2 = 1$
- Montrer qu'il existe  $O$  et  $O'$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telles que  $OMO'$  soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.
- Expliciter un vecteur  $X$  vérifiant les conditions de la question a).

**Exercice 70** (Polytechnique MP 2021 - corrigé)

Soient  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

**Exercice 71** (Polytechnique 2020 - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\varphi$  l'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \max\{\text{tr}(OM) \mid O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$$

- Justifier la définition de  $\varphi$ .
- Montrer que  $\varphi$  est continue.
- Calculer  $\varphi(M)$  lorsque  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(UM)$  admet son maximum en une matrice  $O$  alors  $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

## ENS

**Exercice 72** (ENS MP/MPI 2025 - corrigé)

- a) Soit  $p$  un nombre premier et  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$ .
- b) Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4, u_1 = u_2 = 0, u_3 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$ . Montrer que, pour tout nombre premier  $p, p$  divise  $u_p$ .

**Exercice 73** (ENS MP/MPI (PLSR) 2025)

- a) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers  $p$  tels que  $p \equiv 3[4]$ .
- b) Soient  $p$  un nombre premier et  $n \geq 2$ . Soit  $k = \frac{(np)^p - 1}{np - 1}$ .
- i) Montrer que  $k \equiv 1[p]$ .
- ii) Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que si  $d$  divise  $k$  alors  $d \equiv 1[p]$ .
- c) Soit  $p$  un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo  $p$ .

**Exercice 74** (ENS MP/MPI (SR) 2025)

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau intègre (donc commutatif). On suppose que  $A$  est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $t : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i)  $\forall (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\}), \exists (q, r) \in A^2, a = bq + r$  et ( $r = 0$  ou  $t(r) < t(b)$ ).
- (ii)  $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$ .

- a) Montrer que  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}[X]$  sont euclidiens, tout comme n'importe quel corps  $\mathbb{K}$ .
- b) Montrer que tout idéal de  $A$  est principal.
- c) On suppose que  $t(1_A) = 0$ . Montrer que les éléments inversibles de  $A$  sont les  $u \in A \setminus \{0\}$  tels que  $t(u) = 0$ .
- d) On suppose dans toute la suite de l'exercice que dans l'hypothèse (i) il y a en plus unicité du couple  $(q, r)$  solution. Montrer que  $t(a + b) \leq \max(t(a), t(b))$  quels que soient  $a \in A \setminus \{0\}$  et  $b \in A \setminus \{0\}$  tels que  $a + b \neq 0$ .
- e) Montrer que  $A^\times \cup \{0\}$  est un sous-corps de  $A$ .
- f) Montrer que  $A$  est un corps ou est isomorphe à  $\mathbb{K}[X]$  pour un corps  $\mathbb{K}$ .

**Exercice 75** (ENS MP/MPI 2025)

Soit  $I = \{P \in \mathbb{C}[X]; \forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}\}$ . On pose  $H_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$ . Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on pose  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$  et  $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$ .

- a) Montrer que  $(H_n)_{n \geq 0}$  est une base de  $\mathbb{C}[X]$ .
- b) Montrer que, pour tout  $n, H_n \in I$ .
- c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ .
- d) Montrer que  $I \subset \mathbb{Q}[X]$ .
- e) Montrer que  $I = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i H_i; n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$ .
- f) Soient  $P_1, P_2 \in I$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}, P_1(n)$  soit premier avec  $P_2(n)$ . Montrer qu'il existe  $U_1, U_2 \in I$  tels que  $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$ .

**Exercice 76** (ENS MP/MPI 2025 (SR))

Soient  $G$  un groupe admettant une partie génératrice finie et  $H$  un groupe fini.

- a) Montrer que l'ensemble  $E$  des morphismes de groupes de  $G$  vers  $H$  est fini.
- b) Soit  $\psi$  un endomorphisme surjectif du groupe  $G$ . Montrer que  $\ker(\psi) \subset \bigcap_{\varphi \in E} \ker(\varphi)$ .
- c) On pose  $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$ .
- i) Montrer que  $G$  est un groupe multiplicatif.
- ii) Montrer que  $G$  est engendré par  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- iii) Montrer que tout endomorphisme surjectif du groupe  $G$  est bijectif.

**Exercice 77** (ENS MP/MPI 2025)

- a) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer que si  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est suffisamment proche de  $M$ , alors  $N$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.
- b) Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . À quelle condition la matrice  $A + \varepsilon B$  admet-elle deux valeurs propres distinctes pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit?
- c) Même question en demandant que  $A + \varepsilon B$  soit diagonalisable pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit.

**Exercice 78** (ENS MP/MPI 2025 (PLSR) - corrigé)

Soient  $(a_n)_n \geq 0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence égal à  $+\infty$ .

- a) Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , justifier la définition de  $f^*(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$ .
- b) Montrer que  $f^*$  est continue.
- c) On suppose que  $f$  est surjective. Montrer que  $f$  induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.
- d) On suppose que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $f(z) = \lambda$  et  $f'(z) \neq 0$ . Montrer que  $f^*$  est une surjection de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sur lui-même.

**Exercice 79** (ENS MP/MPI 2025 (PLSR))

- a) Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , diagonalisables et telles que  $AB = BA$ . Montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $PAP^{-1}$  et  $PBP^{-1}$  soient diagonales.
- b) Montrer que l'application  $\Phi : (S, O) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  est bien définie et bijective, et que  $\Phi^{-1}$  est continue.
- c) Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique suite de matrices  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $M_0 = M$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, M_{k+1} = \frac{M_k}{2} \left( I_n + (M_k^T M_k)^{-1} \right)$ , et étudier sa convergence.

**Exercice 80** (ENS MP/MPI 2025 (PLSR - corrigé))

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa norme euclidienne canonique et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la norme subordonnée notée  $\|\cdot\|_{\text{op}}$ . Si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , on définit le conditionnement de  $M$  comme le réel  $\text{cond}(M) = \|M\|_{\text{op}} \|M^{-1}\|_{\text{op}}$ .

- a) Calculer  $\text{cond}(M)$  dans le cas où  $M$  est symétrique définie positive.
- b) Montrer que, pour toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{cond}(M) \geq 1$  et  $\text{cond}(M^T) = \text{cond}(M)$ .
- c) Que dire des matrices  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\text{cond}(M) = 1$ ?
- d) Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{S}_n^{++}$ , montrer que  $\text{cond}(A + B) \leq \max(\text{cond}(A), \text{cond}(B))$ .

**Exercice 81** (ENS MP/MPI 2025 (SR))

Soient  $n \geq 2, a : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  continue et  $A = \int_0^1 a(t) dt$ .

- a) Montrer que  $A$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A = 0$ . Exprimer  $\ker(A)$ .
- c) Montrer que  $M = \left( \frac{1}{1+i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  est dans  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
- d) On suppose  $a$  à valeurs dans l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux. Donner une condition pour que  $A$  soit une matrice de projecteur orthogonal.
- e) Soit  $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ . Soient  $0 < \alpha < \beta$ . Montrer que  $\begin{pmatrix} \Gamma(2\alpha) & \Gamma(\alpha + \beta) \\ \Gamma(\alpha + \beta) & \Gamma(2\beta) \end{pmatrix}$  est dans  $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .
- f) En déduire que  $\ln(\Gamma)$  est convexe.

**Exercice 82** (ENS MP/MPI 2025 (PLSR) - corrigé)

- a) Déterminer la nature des séries  $\sum \frac{\sin n}{n}$ ,  $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$ ,  $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ .
- b) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $Q \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$  tels que  $|qx - p| \leq \frac{1}{Q}$ . En déduire qu'il existe une infinité de couples  $(p, q)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$ .
- c) On admet que  $\pi$  est irrationnel. Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{1}{n \sin(n)}$ .

**Exercice 83** (ENS MP/MPI 2025 (SR))

- a) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ .
- Si  $f$  est continue, montrer que  $f$  possède un point fixe.
  - Si  $f$  est croissante, montrer que  $f$  possède un point fixe.
- b) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Montrer que l'ensemble  $(\text{dis}(f))$  des points de discontinuité de  $f$  est au plus dénombrable.
- c) Construire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 84** (ENS MP/MPI 2025 - corrigé)

Soit  $(a_k)_{k \geq 1}$  une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $ka_k \leq (k+1)a_{k+1}$ . Montrer que

$$\int_0^\pi \max_{1 \leq k \leq n} \left( a_k \frac{|\sin(kx)|}{x} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} + O(1).$$
**Exercice 85** (ENS MP/MPI 2025 - corrigé)

Soit  $n \geq 2$ . Soit  $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  continue. On considère les solutions de l'équation différentielle (\*) :  $x'(t) = A(t)x(t)$ .

- a) On suppose qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  continue et à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans  $]-\infty, -1]$  telles que, pour tout  $t$ ,  $A(t) = PD(t)P^{-1}$ . Les solutions de (\*) ont-elles toutes pour limite 0 en  $+\infty$ ?
- b) On suppose qu'il existe  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  continue et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale à coefficients dans  $]-\infty, -1]$  telles que, pour tout  $t$ ,  $A(t) = P(t)DP^{-1}(t)$ . Les solutions de (\*) ont-elles toutes pour limite 0 en  $+\infty$ ?

**Exercice 86** (ENS MP/MPI 2025 (PLSR) - corrigé)

Soit  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . On considère  $(E_\mu) : y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$ .

- a) Résoudre  $(E_0)$ .
- b) Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux fonctions bornées et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $\omega_1 \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe des fonctions  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables par rapport à la seconde variable telles que :
- $\omega(\mu) \underset{\mu \rightarrow 0}{=} 1 + \omega_1 \mu + o(\mu)$  ; i
  - il existe  $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante telle que  $\forall k \in \{0, 1, 2\}, \forall (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \left| (\partial_\tau)^k \varepsilon(\tau, \mu) \right| \leq C(\tau) \mu^2$  ;
  - pour  $x : (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$ , la fonction  $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$  est solution de  $(E_\mu)$  sur  $\mathbb{R}^+$  pour  $\mu$  voisin de 0.

Calculer alors  $\omega_1$  et donner une expression explicite de  $x_0$  et  $x_1$  en fonction de quelques constantes inconnues.

**Exercice 87** (ENS MP/MPI 2025 (L) - corrigé)

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = -k) = ce^{-|k|}$  où  $c$  est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire  $\sum X_n z^n$ .

**Exercice 88** (ENS MP/MPI 2025 (L) - corrigé)

Montrer qu'il existe un réel  $c > 0$  vérifiant la condition suivante : quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , quelle que soit  $S$  partie non vide de  $\cup_n$ , il existe un entier naturel  $p \leq \frac{cn}{|S|}$  ainsi qu'une  $p$ -liste  $(z_1, \dots, z_p)$  d'éléments de  $\cup_n$  telle que  $\left| \bigcup_{k=1}^p z_k S \right| \geq \frac{n}{2}$ .

**Exercice 89** (ENS MP/MPI 2025 (SR))

Soit  $\alpha > 0$ . On considère l'équation différentielle  $(*) : (y' = -x, x' = \alpha^2 y)$  avec  $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

- Si  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  est fixé, justifier l'existence et l'unicité d'une solution de  $(*)$  vérifiant  $x(0) = x_0$  et  $y(0) = y_0$ . Pour cette solution, on pose  $I(t) = y^2(t)$  et  $J(t) = \alpha^2 x^2(t)$ .
- Montrer que les applications  $T \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$  et  $T \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T J(t) dt$  admettent une limite finie en  $+\infty$ .
- Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On considère deux variables aléatoires  $x_0, y_0$  indépendantes à valeurs dans  $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$  telles que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{P}\left(x_0 = \frac{k}{N}\right) = \mathbb{P}\left(y_0 = \frac{k}{N}\right) = \gamma_N \exp(-(k/N)^2)$ .
  - Justifier l'existence de  $\gamma_N \in \mathbb{R}^+$  pour lequel ces conditions définissent la loi des deux variables aléatoires.
  - On fixe  $t$  et on considère, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $f_N(t) = I(t) + J(t)$  (les fonctions  $I$  et  $J$  sont associées aux variables aléatoires  $x_0$  et  $y_0$ ). Montrer que  $\mathbb{E}(e^{-f_N(t)})$  possède une limite quand  $N \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 90** (ENS MP 2024 (PLSR) - corrigé)

Soient  $n \geq 2$  et  $I_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \exists \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$ , où  $E_\lambda(A)$  est le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- Montrer que  $I_n(\mathbb{R})$  est stable par similitude.
- Soient  $A, B \in I_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si  $\text{rg } A = \text{rg } B$  et  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ .
- On note  $I_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \exists \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Im}(A) = E_\lambda(A)\}$ . Étudier la connexité par arcs de  $I_n(\mathbb{R})$  et de  $I_n^*(\mathbb{R})$ .
- Déterminer les classes de similitude incluses dans  $I_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 91** (ENS MP 2024 (PLSR) - corrigé)

Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$  distincts et  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ . On suppose que  $\sum_{k=1}^m a_k z_k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer que  $a_1 = \dots = a_m = 0$ .

**Exercice 92** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

- Si  $n \geq 2$  est un entier, montrer que  $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$ .
- Donner un équivalent lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor$ .

**Exercice 93** (ENS MP 2024 (PLSR))

On admet l'irrationalité de  $\pi$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos(n)}$ .

- Montrer que  $\sum u_n$  converge si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 94** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Montrer la convergence et calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$ .

**Exercice 95** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Soient  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , décroissante de limite nulle en  $+\infty$  et  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$ . Quelle est la limite de  $g$  en  $0^+$  ?

**Exercice 96** (ENS MP 2021 (PLSR) - corrigé)

On fixe un entier naturel  $n$ . On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes. Pour  $A$  dans  $\mathcal{D}$ , on note  $\lambda_1(A) < \dots < \lambda_n(A)$  ses valeurs propres.

- Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{D}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On admet que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $\alpha_k : t \mapsto \lambda_k(A(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On admet également que l'on peut trouver des fonctions  $u_1, \dots, u_n$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^n$  telles que, pour tout  $t \in I$ , la famille  $(u_1(t), \dots, u_n(t))$  soit une base orthonormée de vecteurs propres de  $A(t)$  associée à  $(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ . On fixe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Exprimer la dérivée de  $\alpha_k$  à l'aide de  $A, A'$  et de  $u_k$  seulement. Exprimer la dérivée seconde de  $\alpha_k$  à l'aide de  $A', A'', u_k$  et  $u'_k$  seulement.
- Démontrer que  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
- Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On admet que  $\lambda_k : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On fixe  $A \in \mathcal{D}$  et  $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Donner une expression simple de la dérivée seconde en zéro de  $t \mapsto \lambda_k(A + tH)$ .

**Exercice 97** (ENS MP 2022 (L) - corrigé)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère des fonctions dérivables  $y_1, \dots, y_n$  et des réels  $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$  tels que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $y_i' = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_i(t) = 0$ . Montrer que  $(y_1, \dots, y_n)$  est liée.

**Exercice 98** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Soient  $f$  une application différentiable convexe de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{**}$ .

- Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ .
- On suppose que l'application  $\nabla f$  est  $L$ -lipschitzienne. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$ .

**Exercice 99** (ENS MP 2021 (PLSR) - corrigé)

Soient  $(A, +, \times)$  un anneau commutatif et  $M$  un idéal de  $A$ . On dit que  $M$  est maximal si  $M$  est différent de  $A$  et si tout idéal de  $A$  contenant  $M$  est égal à  $M$  ou à  $A$ .

- Soit  $M$  un idéal de  $A$ . Montrer que  $M$  est maximal si et seulement si, pour tout  $a \notin M$ , il existe  $x \in M$  et  $u \in A$  tels que  $1 = x + u \times a$ .
- Soient  $(B, +, \times)$  un anneau commutatif et  $f : A \rightarrow B$  un morphisme surjectif de  $A$  sur  $B$ . Montrer que si  $M$  est un idéal maximal de  $A$  alors, soit  $f(M) = B$ , soit  $f(M)$  est un idéal maximal de  $B$ .
- Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Déterminer les idéaux maximaux de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Soit  $M$  un idéal maximal de  $\mathbb{Z}[X]$  tel que  $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$ .
  - Montrer qu'il existe  $p$  premier tel que  $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ .
  - Montrer qu'il existe des éléments irréductibles  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{Z}[X]$  tels que  $M = (P) + (Q)$

**Exercice 100** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 1$ .

- On suppose  $P$  scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$ .
- Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

**Exercice 101** (ENS MP 2021 (L) - corrigé)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{K}$  un corps. Déterminer les automorphismes de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 102** (ENS MP 2024 (SR))

À quelle condition sur la matrice  $A$ , la comatrice de  $A$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 103** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Soient  $r \in \mathbb{N}^*, d_1, \dots, d_r$  des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que  $d_1 | d_2 | \dots | d_r$ . Déterminer le plus petit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  contienne un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$

**Exercice 104** (ENS MP 2018 - corrigé)

Déterminer les matrices de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.

**Exercice 105** (ENS MP 2024 (PLSR) - corrigé)

- a) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de  $A$  dont tous les coefficients sont  $> 0$ .
- b) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à coefficients  $> 0$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre à coefficients  $> 0$ .
- c) Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Montrer que  $M_1 \times \dots \times M_n$  est à spectre inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Exercice 106** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Soient  $A, B$  deux matrices de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  qui n'ont pas  $-1$  pour valeur propre et telles que  $AB$  n'ait pas  $1$  pour valeur propre. Montrer que  $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$  est antisymétrique.

**Exercice 107** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Pour  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\lambda_1(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$  le spectre ordonné de  $M$ .

- a) On considère  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A + B \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ . Montrer que, si  $i + j < n + 2$ , alors  $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$ .
- b) Généraliser à  $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A_1 + \dots + A_d \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ .

**Exercice 108** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

On note  $\|\cdot\|$  la norme d'opérateur sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associée à la norme  $X \mapsto \sqrt{X^T X}$ .

- a) Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|e^{iA} - e^{iB}\| \leq \|A - B\|$ .
- b) Montrer que le résultat reste vrai sous l'hypothèse que  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $\bar{A}^T = A$  et  $\bar{B}^T = B$ .

**Exercice 109** (ENS MP 2024 (SR))

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes,  $X$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , et  $Y$  la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1]$ .

- a) Montrer que  $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k)$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} X & X + Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ .
- b) Calculer  $\mathbf{E}(\text{rg}(A))$ .
- c) Calculer  $\mathbf{P}(A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}))$  puis  $\mathbf{P}(A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}))$ .
- d) Déterminer la probabilité pour que  $A$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
- e) On pose  $B = \begin{pmatrix} X & X + Y \\ X - Y & Y \end{pmatrix}$ . Calculer  $\mathbf{P}(B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$ .
- f) Soient  $Z$  une variable aléatoire réelle et  $C = \begin{pmatrix} X & X + Y \\ Z & Y \end{pmatrix}$ . Calculer  $\mathbf{P}(C \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$ .
- g) Soit  $M$  une matrice aléatoire dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la famille des coefficients est i.i.d., chaque coefficient suivant la loi uniforme sur  $\{0, -1, 1\}$ . Déterminer  $\mathbf{P}(M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ .

**Exercice 110** (ENS MP 2024 (SR))

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . L'entropie de  $X$  est définie par  $\mathcal{H}(X) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k)$  avec  $p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$ .

- a) Montrer que  $\mathcal{H}(X) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $X$  est constante.  
Soit  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite positive telle que  $p_1 + \dots + p_n = 1$  et  $(q_i)$  une autre suite positive de somme 1.
- b) Montrer que  $\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \geq \sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i)$ . Expliciter le cas d'égalité.
- c) Montrer que  $\mathcal{H}(X) \leq \ln(n)$  avec égalité si et seulement si  $X$  suit une loi uniforme.  
Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\{x_1, \dots, x_n\}^2$ . On note  $p_{i,j} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = x_j)$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ .  
L'entropie de  $(X, Y)$  est  $\mathcal{H}(X, Y) = - \sum_{i,j=1}^n p_{i,j} \ln(p_{i,j})$ .
- d) Montrer que  $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$ .

**Exercice 111** (ENS MP/MPI 2023 - corrigé)

Soient  $m \geq 1$  et  $r \geq 1$  deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$  dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement « le morphisme  $\varphi$  est surjectif ».

**Exercice 112** (ENS MP 2022 (PLSR) - corrigé)

Soient  $f$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2, ayant toutes  $m$  pour espérance et telles que, si  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^{*2}$ ,  $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = f(|k - \ell|)$ .

- On suppose que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \rightarrow 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $m$ .
- On suppose que la suite  $(f(k))_{k \geq 0}$  est sommable. Montrer que la suite  $(n\mathbf{V}(Y_n))_{n \geq 1}$  converge vers un nombre réel à préciser.

**Exercice 113** (ENS MP 2021 (SR) - corrigé)

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables de Rademacher indépendantes. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Soit enfin  $N$  le cardinal (dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ) de l'ensemble aléatoire  $\{n \in \mathbb{N}^*; S_n = 0\}$ .

- Donner un équivalent de  $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$ . En déduire  $\mathbf{E}(N)$ .
- Montrer que  $N$  est presque sûrement égale à  $+\infty$ .