

## Corrections

## Exercice 1

- a) On note  $H$  le sous-groupe  $\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$  et  $K$  un sous-groupe de  $G = \mathcal{S}_n$  tel que  $H \subsetneq K \subset G$ . Il existe donc  $\rho \in K$  avec  $\sigma(\rho) = -1$ . Si on note  $K' = G \setminus H$  (les permutations de signature  $-1$ ), alors l'application  $\sigma \in H \mapsto \rho \circ \sigma \in K'$  est bijective (sa réciproque est la composition par  $\rho^{-1}$ ). Puisque  $K$  est un sous-groupe contenant  $H$  et  $\rho$ , il contient  $\rho.H = K'$  et donc  $K$  contient toutes les permutations. Ainsi  $K = G$  est  $H$  maximal.
- b) Pour la rédaction, on suppose que  $k = n$  (on peut s'y ramener en considérant l'automorphisme intérieur  $\sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$  où  $\tau$  est une transposition bien choisie...). On note  $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(n) = n\}$  (qui est en bijection avec  $\mathcal{S}_{n-1}$ ) et  $K$  un sous-groupe strictement plus grand que  $H$ . Il contient une permutation telle que  $\sigma(n) = p \neq n$ . On décompose cette permutation en produit de cycle à supports disjoints :  $\sigma = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m) \circ \mu$  avec  $x_1 = n, x_2 = p$  et  $\mu$  le produit des autres cycles. On a donc  $\mu \in H$  et  $\theta = \mu^{-1} \sigma = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m) \in K$ . On a

$$\theta = \begin{pmatrix} n & x_2 & x_3 & \dots & x_{m-1} & x_m \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_m & n \end{pmatrix}$$

On compose à gauche avec le cycle  $c = (x_m \ x_{m-1} \ \dots \ x_3 \ x_2)$  (qui est dans  $H$  donc dans  $K$ ) et on obtient

$$c \circ \theta = \begin{pmatrix} n & x_2 & x_3 & \dots & x_{m-1} & x_m \\ x_m & x_2 & x_3 & \dots & x_{n=1} & n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la transposition  $\tau_{n,x_m}$  qui est dans  $K$ . Si  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  et  $\tau' = \tau_{x_m,i} \in H$  alors  $(\tau')^{-1} \tau_{n,x_m} \tau' = \tau_{n,i}$  est encore dans  $K$ . Ainsi  $K$  contient toutes les transpositions  $\tau_{n,i}$  avec  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  et finalement toutes les transpositions (car  $H \subset K$ ). Puisque les transpositions engendrent  $\mathcal{S}_n$ ,  $K = \mathcal{S}_n$ .

- c) On suppose avec des sous-groupes  $H \subsetneq K \subset G$ . Notamment  $H$  est un sous-groupe de  $K$ .
- version hors-programme : on a le théorème de Lagrange. On a donc  $\text{card}(H) \mid \text{card}(K)$  et  $\text{card}(K) \mid \text{card}(G)$ . Il existe  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  tel que  $\text{card}(K) = m \cdot \text{card}(H)$ . On en déduit que  $m \neq 1$  divise  $\frac{\text{card}G}{\text{card}H}$  qui est premier donc  $m = \frac{\text{card}G}{\text{card}H}$  et finalement  $\text{card}K = \text{card}G$ .
  - version au programme : on peut redémontrer le théorème de Lagrange, ou essayer de s'en inspirer : on prend  $x \in K \setminus H$  et on s'intéresse au sous-groupe engendré par  $H$  et  $x$ ... à voir

## Exercice 2

On vérifie que  $\psi_O$  est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel  $S_n(\mathbb{R})$ . On constate également que  $\psi_O \circ \psi_{O^T} = \psi_{OO^T} = \text{Id}$ . On a  $\psi_{O^T} = \psi_{O^{-1}} = (\psi_O)^{-1}$  mais cela ne suffit pas pour conclure... On montre que  $\psi_{O^T}$  est l'adjoint de  $\psi_O$  (pour le produit scalaire canonique induit sur  $S_n(\mathbb{R})$  - les matrices étant symétriques, on peut retirer la transposition dans le produit scalaire)

$$\forall M, N \in (S_n(\mathbb{R}))^2, \langle \psi_O(A), B, \rangle = \text{tr}(O^T M O N) = \text{tr}(M O N O^T) = \langle M, \psi_{O^T}(N) \rangle$$

Cela donne bien  $(\psi_O)^* = \psi_{O^T}$ . Puisque les déterminants sont identiques, on a finalement  $\det(\psi_O \circ \psi_{O^T}) = 1 = (\det \psi_O)^2$ . Cela donne  $|\det \psi_O| = 1$ .

compléments :

- on commence par le faire lorsque  $O$  est une matrice diagonale - on obtient alors  $|\det \psi_O| = |\det O|^{n+1}$  en écrivant la matrice de  $\psi_O$  dans une base de  $S_n(\mathbb{R})$ .
- on généralise à une matrice symétrique en diagonalisant  $S = P^{-1} D P$  et  $\psi_S = \psi_{P^{-1}} \circ \psi_D \circ \psi_P$  qui donne  $\det \psi_S = \det \psi_D$
- pour une matrice inversible  $M$ , on justifie qu'on peut l'écrire  $M = O S$  avec  $O \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\psi_M = \psi_O \circ \psi_S$ .

Finalement, on obtient  $|\det \psi_A| = |\det A|^{n+1}$ .

## Exercice 4

- si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux éléments distincts de  $[a, b]$ , par différence, il existe une suite d'entiers  $(k_n)$  telle que  $(t_2 - t_1)u_n - k_n$  tend vers 0. Si  $t$  est un réel quelconque alors il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{|t|}{N} < \frac{b-a}{2}$  et il existe  $t_1, t_2 \in [a, b]$  tels que  $\frac{t}{N} = t_2 - t_1$  et ainsi  $t = N(t_2 - t_1)$ . Il existe une suite d'entiers telle que  $(t_2 - t_1)u_n - k_n$  tend vers 0 et en multipliant par  $N$ ,  $t u_n - (N k_n)$  tend encore vers 0 avec  $N k_n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe une suite d'entiers  $(k_n)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t u_n - k_n = 0$ .
- si  $(u_n)$  est bornée : si  $|t| < \frac{1}{2} \|u\|_\infty$  avec  $t \neq 0$ , alors  $|t u_n| < \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un rang  $n_0$  à partir duquel  $|t u_n - k_n| < \frac{1}{2}$  et ainsi  $|k_n| < 1$ . On a donc  $k_n$  nul à partir d'un certain rang et  $t.u$  donc  $u$  tendent vers 0.

- si la suite n'est pas bornée. On considère une extractrice  $\varphi$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$  (quitte à changer  $u$  en  $-u$ ). On remplace  $u_n$  par  $u_{\varphi(n)}$ . Il existe une suite d'entiers  $(k_n)$  tel que  $v_n - k_n$  tend vers 0 donc  $v_n = k_n + o(1)$  avec  $(k_n)$  de limite infinie. Quitte à décaler les indices, on peut même supposer que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . L'idée est que si  $t$  décrit  $[\alpha, \beta]$  alors  $t u_n$  va décrire  $[\alpha u_n, \beta u_n]$  et lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  la largeur de ce segment va aussi tendre vers l'infini donc le segment va contenir un intervalle centré sur un réel  $m + \frac{1}{2}$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . on va ainsi construire une suite de segments emboîtés avec des valeurs de  $t u_n$  proche d'un entier  $+1/2$ .
  - On revient à  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et un entier  $m_0$  tel que  $[m_0 + \frac{1}{4}, m_0 + \frac{3}{4}] \subset [a_0 u_{n_0}, b_0 u_{n_0}]$ . Puisque  $t \mapsto u_{n_0}$  est strictement croissante, il existe  $a_1 < b_1$  dans  $[a_0, b_0]$  tel que  $[a_1 u_{n_0}, b_1 u_{n_0}] = [m_0 + \frac{1}{4}, m_0 + \frac{3}{4}]$ . On pose  $\psi(1) = n_0$ .
  - on suppose avoir construit une suite  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_p < b_p \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$  et une suite strictement croissante  $\varphi(1) < \varphi(2) \dots < \varphi(p)$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ , il existe un entier  $m_k$  tel que  $[a_k u_{\varphi(k)}, b_k u_{\varphi(k)}] = [m_k + \frac{1}{4}, m_k + \frac{3}{4}]$ . De nouveau, on peut trouver  $n > \varphi(p)$  tel que  $[a_n u_n, b_n u_n]$  contiennent un segment  $[m_{p+1} + \frac{1}{4}, m_{p+1} + \frac{3}{4}]$ . On pose  $\psi(p+1)$  cet entier et on définit  $a_{p+1}$  et  $b_{p+1}$  de sorte que  $[a_{p+1} u_{\psi(p+1)}, b_{p+1} u_{\psi(p+1)}] = [m_{p+1} + \frac{1}{4}, m_{p+1} + \frac{3}{4}]$  et  $[a_{p+1}, b_{p+1}] \subset [a_p, b_p]$ . Cela permet de définir les suite  $a, b, m$  et l'extractrice  $\psi$ .
  - Soit  $K = \bigcap_{p \geq 1} [a_p, b_p] = [\alpha, \beta]$  où  $\alpha$  est la limite de la suite croissante majorée  $(a_k)$  et  $\beta$  celle de la suite  $b$  (éventuellement  $\alpha = \beta$ ). On choisit alors  $t \in [\alpha, \beta]$ , alors  $t \in [a_p, b_p]$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et notamment  $d(t u_{\psi(n)}, \mathbb{Z}) \geq \frac{1}{4}$  pour tout  $n \geq 1$ . La suite  $(t u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a donc une suite extraite qui ne se rapproche pas d'une suite d'entiers (plus précisément, pour toute suite d'entiers  $(k_n)$ ,  $|t u_{\psi(n)} - k_{\psi(n)}| \geq \frac{1}{4}$ ) et cela contredit l'hypothèse. La suite est donc bornée et dans ce cas on a montré que  $(u_n)$  est de limite nulle.

### Exercice 5

- a) on suppose que  $a < b$  sont deux éléments de  $I_f$ . Soit  $c \in ]a, b[$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , si  $|f(x)| \leq 1$ , alors  $|f(x)|^c \leq |f(x)|^a$  et si  $|f(x)| \geq 1$  alors  $|f(x)|^c \leq |f(x)|^b$ . On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)|^c \leq |f(x)|^a + |f(x)|^b$  et par majoration,  $|f|^c$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $[a, b] \subset I_f$  et que  $I_f$  est un intervalle.
- avec  $f(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha}$  où  $\alpha > 0$ . On a  $|f(t)|^p \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{|t|^{p\alpha}}$  et  $|f|^p$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $p > \frac{1}{\alpha}$ . Avec  $\alpha = \frac{1}{b}$ , on a un exemple où  $I_f = ]b, +\infty[$ .
  - On prend une fonction qui vaut  $n^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) entre sur  $[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$  qu'on rend continue avec des fonctions affines que rejoignent  $(n + \frac{1}{n^3}, n^\alpha)$  à  $(n + \frac{2}{n^3}, 0)$  - de même à gauche - et qui vaut 0 ailleurs. L'intégrale sur  $|f|^p$  est de l'ordre de la somme  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{n^{p\alpha}}{n^3}$  (à faire proprement avec des encadrements, l'intégrale de chaque morceaux est compris entre  $n^{p\alpha} \frac{2}{n^3}$  et  $n^{p\alpha} \frac{4}{n^3}$ ). Elle existe si et seulement si  $0 < p < \frac{2}{\alpha}$ .
  - en alternant l'exemple précédent (sur les valeurs paires de  $n$ ) avec une fonction où la largeur des trapèzes est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  et la hauteur en  $\frac{1}{n^\beta}$  (ou  $\beta > 0$ ), on doit pouvoir trouver un intervalle  $I_f$  de la forme  $]a, b[$  (les aires de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^{p\beta}}$  nécessite d'avoir  $p$  supérieur à un certain seuil).

b) voir autre exercice

### Exercice 6

- a) On note  $h(x)$  la différence. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et bijective de  $\mathbb{R}^+$  sur lui-même. Ainsi  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ . On note  $F$  et  $G$  les primitives sur  $\mathbb{R}^+$  s'annulant en 0 de  $f$  et  $g$ . On a alors pour tout  $x \geq 0$ ,

$$h(x) = F(x) + G(f(x)) - x f(x)$$

et  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ , nulle en 0 et

$$\forall x \geq 0, h'(x) = f(x) + f'(x).g(f(x)) - f(x) - x f'(x) = 0 \quad (\text{car } g(f(x)) = x).$$

Ainsi  $h$  est nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

- b) On commence par le cas où  $y \geq f(x)$ . On a d'après l'identité précédente,

$$\int_0^x f + \int_0^y f^{-1} - xy = x f(x) + \int_{f(x)}^y g - xy = \int_{f(x)}^y (g - x) \geq 0$$

car  $g$  est croissante sur  $[f(x), y]$  et minorée par  $x$  sur cet intervalle. Par caractère défini de l'intégrale, on a même une quantité strictement positive si  $y > f(x)$  ( $g - x$  ne peut pas être identiquement nul). Lorsque  $y \leq f(x)$  on fait de même en inversant les rôles de  $f$  et  $g$  : on a

$$\begin{aligned} \int_0^x f + \int_0^y g - xy &= \int_0^{g(y)} f + \int_{g(y)}^x f + \int_0^y g - xy \\ &= \int_{g(y)}^x f + yg(y) - xy = \int_{g(y)}^x (f - y) \geq 0. \end{aligned}$$

De nouveau, l'inégalité est stricte si  $y < f(x)$ . On a obtenu l'inégalité demandée ainsi que le cas d'égalité.

- c) On a notamment  $f(0) = 0$ . on prend une subdivision régulière  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$  de l'intervalle  $[0, x]$ . On note  $y_i = f(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$  (la suite des  $(y_i)$  est toujours strictement croissante). Puisque  $f$  est continue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n y_i (x_i - x_{i-1}) = \int_0^x f$$

On transforme cette quantité :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i (x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} x_i \\ &= y_n x_n - y_0 x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - y_{i+1}) x_i \quad (\text{et } x_0 = 0) \\ &= x f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - y_{i+1}) x_i \\ &= x f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) f^{-1}(y_i) \end{aligned}$$

Comme  $f^{-1}$  est également continue, la dernière somme est une somme de Riemann qui tend vers  $\int_0^{f(x)} f^{-1}$  si pas de la subdivision des  $y_i$  converge aussi vers 0. On sait que  $f$  est continue donc uniformément continue sur le segment  $[0, x]$ . On se donne  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que si  $|u - v| \leq \eta$ , on a  $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ . Pour  $n$  suffisamment grand,  $\frac{x}{n} \leq \eta$  et pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_i - x_{i-1} = \frac{x}{n}$  et  $0 \leq y_i - y_{i-1} \leq \varepsilon$ . Le pas de la subdivision des  $y_i$  est donc inférieur ou égal à  $\varepsilon$ . En passant à la limite dans la relation obtenue précédemment, on obtient

$$\int_0^x f(t) dt = x f(x) - \int_0^{f(x)} f^{-1}(u) du.$$

### Exercice 7

- Soit  $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x - 1/x \end{cases}$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $\varphi_1'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ . Ainsi  $\varphi_1$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\varphi_1(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ . De même  $\varphi_2 : x \mapsto x - 1/x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_-^*$  dans  $\mathbb{R}$ . De plus, soit  $y \in \mathbb{R}$ .  $\varphi_1(x) = y$  équivalent à  $x^2 - yx - 1 = 0$  ce qui donne  $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$  et puisque  $x$  doit être positif, on obtient  $\varphi_1^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ . Le même calcul donne  $\varphi_2^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ .
- Soit  $K$  un segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . On a

$$\int_K |g(x)| dx = \int_K |f(\varphi_1(x))| dx = \int_{\varphi_1(K)} |f(u)| (\varphi_1^{-1})'(u) du$$

avec  $(\varphi_1^{-1})'(u) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right)$  ce qui donne  $0 \leq (\varphi_1^{-1})'(u) \leq 1$ . Ainsi  $\int_K |g(x)| dx \leq \int_{\varphi_1(K)} |f(u)| du \leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du$ . Par définition,  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On refait le même calcul sur les segments de  $\mathbb{R}_-^*$  avec  $(\varphi_1^{-1})'(u) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right)$  toujours entre 0 et 1.

- Le fait d'avoir  $g$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$  ainsi que les deux  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  permet de réaliser le changement de variable dans les intégrales, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^0 g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right) du$$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left( 1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right) du$$

En ajoutant, on obtient l'égalité demandée.

### Exercice 8

On note  $I_{N,p}$  l'intégrale qu'on cherche à calculer. On note également  $M_{N,p}$  la matrice de taille  $p$  dont les coefficients sont  $K_N(x_i, x_j)$ . On utilisera plusieurs le résultat suivant (lorsqu'on peut séparer les variables) - si  $g_1, \dots, g_p$  sont des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_p(x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p = \prod_{k=1}^p \left( \int_{\mathbb{R}} g_k(x_k) dx_k \right).$$

Enfin on note  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$  si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de carré intégrable (on a bien  $fg$  intégrable).

- cas  $p = 1$  : on a

$$I_{N,1} = \int_{\mathbb{R}} K_N(x, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k^2(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} f_k^2(x) dx = N$$

- cas  $p = 2$  : on a  $M_{N,2} = \begin{pmatrix} K_N(x_1, x_1) & K_N(x_1, x_2) \\ K_N(x_2, x_1) & K_N(x_2, x_2) \end{pmatrix}$  et

$$I_{N,2} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_N(x, x) K_N(y, y) - K_N^2(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_N(x, x) K_N(y, y) dx dy - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_N^2(x, y) dx dy$$

La première intégrale vaut  $\left( \int_{\mathbb{R}} K_N(x, x) dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} K_N(y, y) dy \right) = N^2$ . On développe la seconde :

$$(K_N(x, y))^2 = \left( \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x) f_i(y) \right) \left( \sum_{j=0}^{N-1} f_j(x) f_j(y) \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_i(x) f_j(x) f_i(y) f_j(y)$$

En intégrant (et en séparant les variables) :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (K_N(x, y))^2 dx dy = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_i(x) f_j(x) f_i(y) f_j(y) dx dy = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \langle f_i, f_j \rangle \cdot \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} 1^2 = N$$

Finalement  $I_{N,2} = N^2 - N = N(N-1)$ .

- Réécriture de  $M_{N,p}$  : on constate que  $K_N(x, y)$  est le produit scalaire entre les vecteurs  $V(x)$  et  $V(y)$  où  $V(x) = (f_0(x), \dots, f_{N-1}(x))$ . La matrice  $M_{N,p}$  est donc une matrice de Gram. On note  $A_{N,p}$  la matrice

$$A_{N,p} = \begin{pmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \dots & f_0(x_p) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{N-1}(x_1) & f_{N-1}(x_2) & \dots & f_{N-1}(x_p) \end{pmatrix} = (f_i(x_j))_{0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{N,p}$$

de sorte que  $M_{N,p} = A_{N,p}^T A_{N,p}$ . On a  $\text{rg}(M) = \text{rg}(A^T A) = \text{rg} A \leq \min(N, p)$ . Puisque  $M_{N,p} \in \mathcal{M}_p$ , elle n'est pas de rang  $p$  lorsque  $N < p$  et ainsi son déterminant est nul. On a donc  $I_{N,p} = 0$  si  $p > N$ .

- cas  $N = p$  : on a  $M = A^T A$ , toutes les matrices sont carrées de taille  $N$  (ou  $p$ ) et  $\det M = (\det A)^2$ . On essaie avec ça en développant :

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p f_{\sigma(i)}(x_i) \right) \left( \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^p f_{\sigma'(j)}(x_j) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^p f_{\sigma(i)}(x_i) f_{\sigma'(i)}(x_i) \end{aligned}$$

En utilisant la séparation des variables :

$$I_{N,N} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_N} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^p \langle f_{\sigma(i)}, f_{\sigma'(i)} \rangle$$

l'un des produits est non nul si et seulement si  $\sigma = \sigma'$  et dans ce cas il vaut 1. Il reste

$$I_{N,N} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \varepsilon(\sigma)^2 = N!$$

- cas  $p < N$  : on veut montrer que  $I_{N,p} = N(N-1)\dots(N-p+1) = \frac{N!}{(N-p)!}$  (au passage, la première égalité devient toujours vrai puisque le produit est nul si  $p > N$ ). On utilise la formule de Cauchy-Binet (pour l'instant je ne vois pas comment faire autrement... peut-être en développant tout brutalement mais je n'ai pas très envie) : si  $A$  est de taille  $(p, q)$  et  $B$  de taille  $(q, p)$  alors  $AB$  est de taille  $p$  (on suppose  $p \leq q$ ) :

$$\det(AB) = \sum_{s \in \mathcal{P}_p(\{1, \dots, q\})} \det(A_s) \det(B_s)$$

où  $s$  décrit les parties à  $p$  éléments des entiers  $\llbracket 1; q \rrbracket$  et  $A_s$  est la matrice carrée de taille  $p$  extraite de  $A$  ou on a gardé les colonnes de  $A$  qui sont dans la liste  $s$ . On peut alors utiliser cela avec  $M = A^T A$  et obtenir

$$\det M = \sum_{s \in \mathcal{P}_p(\{1, \dots, q\})} \det(A_s)^2$$

on se retrouve avec la situation  $N = p$  pour les matrices  $A_s$ , ce qui donne  $\det M = \sum_{s \in \mathcal{P}_p(\{1, \dots, q\})} p!$ . Il y a  $\binom{N}{p}$  termes dans la somme et ainsi

$$I_{N,p} = \binom{N}{p} p! = \frac{N!}{(N-p)!}$$

### Exercice 9

- a) Comme d'habitude, on introduit la série entière associée :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  sous réserve de convergence. On suppose que le rayon de convergence de la série entière est  $R > 0$ . On a alors,

$$\forall x \in ]-R, R[, f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n \text{ et } x f^2(x) = f(x) - u_0 = f(x) - 1$$

On a donc  $x f^2(x) - f(x) + 1 = 0$  pour tout  $x \in ]-R, R[$ . Cela donne  $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$  si  $x \in ]-R, R[$ . Au voisinage de 0, si on veut obtenir  $f(0) = 1$ , on doit avoir  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ . On prend alors cette fonction  $f$  définie sur  $I = ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ . Elle est développable en série entière sur cet intervalle et plus précisément on a, après calculs,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$  pour tout  $x \in I$ . On note  $v_n$  son coefficient de degré  $n$ . Puisque  $f(x)$  vérifie  $x f^2(x) - f(x) + 1 = 0$  pour tout  $x \in I$ , un produit de Cauchy permet de justifier que  $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n v_k v_{n-k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $v_0 = 1$ , on vérifie par récurrence que  $u_n = v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- b) On a  $I_0 = 2\pi$  (changement de variable  $x = 2 \sin t$  par exemple) ce qui donnerait  $c = \frac{1}{2\pi}$ . On détermine une relation de récurrence vérifiée par la suite  $I_n$ . Par intégration par parties, on obtient  $I_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} I_n$ . On peut alors exprimer  $I_n$  à l'aide factorielles et simplifier pour retrouver  $I_n = 2\pi u_n$  ou vérifier que  $2\pi u_n$  vérifie la même relation de récurrence :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = 2\pi u_n$ .

### Exercice 13

Comme souvent dans ce genre de question, on cherche une équation différentielle vérifiée par deux expressions différentes. Comme

on ne sait pas ce qu'il faut chercher, ce n'est pas immédiat. On se doute qu'il va y avoir  $\exp(tA)$ ,  $\exp(tB)$  et une exponentielle avec  $[A, B] = AB - BA$ . On peut avoir une idée en regardant le début du développement limité de  $\exp(tA)\exp(tB)$  :

$$\begin{aligned} \exp(tA)\exp(tB) &= \left( I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + o(t^2) \right) \left( I_n + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + o(t^2) \right) \\ &= I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + B^2 + 2AB) + o(t^2) \\ &= I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + B^2 + AB + BA + AB - BA) + o(t^2) \\ &= I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}((A+B)^2 + [A, B]) + o(t^2) \end{aligned}$$

ce qui correspond au début du DL de  $\exp(t(A+B)) \cdot \exp\left(\frac{t^2}{2}[A, B]\right)$ . On note alors  $f(t) = \exp(tA)\exp(tB)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[A, B]\right)$  et on regarde sa dérivée :

$$f'(t) = Af(t) + \exp(tA)B\exp(tB)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[A, B]\right) + \exp(tA)\exp(tB)(-t[A, B])\exp\left(-\frac{t^2}{2}[A, B]\right)$$

(on peut/doit justifier la troisième dérivée en revenant à la somme de la série) La matrice  $[A, B]$  commute avec  $A$  et  $B$  et on en déduit qu'elle commute avec  $\exp(tA)$  et  $\exp(tB)$ . On s'intéresse au terme  $\exp(tA)B$  :

On a  $AB = AB - BA + BA = BA + [A, B]$ , puis

$$A^2B = A(AB) = A(BA + [A, B]) = ABA + A[A, B] = (BA + [A, B])A + A[A, B] = BA^2 + 2A[A, B]$$

Par récurrence (à faire), on a  $A^k B = BA^k + kA^{k-1}[A, B]$  si  $k \geq 1$ . On a alors, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} \right) B = B \left( \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} \right) + \left( \sum_{k=1}^N k \frac{t^k A^{k-1}}{k!} \right) [A, B] = B \left( \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} \right) + (t[A, B]) \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{t^k A^k}{k!} \right)$$

En limite (avec la continuité de la multiplication par une matrice constante), cela donne  $\exp(tA)B = B\exp(tA) + \exp(tA) \cdot (t[A, B])$ . Il vient alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = Af(t) + (B + t[A, B])f(t) - t[A, B]f(t) = (A+B)f(t)$$

Puisque  $f(0) = I_n$ , on en déduit que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \exp(t(A+B))$ , c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA)\exp(tB)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[A, B]\right) = \exp(t(A+B))$$

Finalement, en  $t = 1$ ,

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$$

#### Exercice 14

Soit  $M$  une telle matrice. Chaque colonne de  $M$  est de norme 1. Si les coefficients sont dans  $\mathbb{Z}$ , ce la signifie qu'il y a exactement un coefficient qui vaut  $\pm 1$  et les  $n-1$  autres qui sont nuls. Il y a donc exactement un et un seul coefficient non nul qui vaut  $\pm 1$  dans chaque colonne. De même, il y a exactement un et un seul coefficient non nul sur chaque ligne. On note  $\sigma(k)$  la ligne où le coefficients de la colonne  $k$  est non nul. Les valeurs  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$  sont deux à deux distinctes et à valeurs dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , ainsi  $\sigma$  est une permutation des entiers  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Réciproquement si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $M$  est une matrice qui en colonne  $k$  à un unique coefficient non nul en ligne  $\sigma(k)$  et que ce coefficient vaut  $\pm 1$ , alors les colonnes de  $M$  sont unitaires et deux à deux orthogonales. Il y a  $2^n n!$  matrices de  $O_n(\mathbb{R})$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  (les  $n!$  permutations et pour chaque permutation le choix du signe pour chaque coefficient)

#### Exercice 15

On note  $A$  la matrice de  $u$  dans la base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ . Cette matrice est symétrique (et la diagonale est  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ).

On commence par montrer le résultat suivant : si  $u$  est autoadjoint et  $\lambda_n$  la plus grande valeur propre de  $E$  alors  $E_{\lambda_n}(u) = \ker(u - \lambda_n \text{Id}_E) = \{x \in E, \langle u(x), x \rangle = \lambda_n \|x\|^2\}$ .

En effet si on prend une base orthonormée  $(e'_1, \dots, e'_n)$  de vecteurs propres pour  $u$  associée à une suite croissante de valeurs propres comme dans l'énoncé et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ , alors

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

et si on a égalité alors

$$\lambda_n \|x\|^2 - \langle u(x), x \rangle = 0 = \sum_{i=1}^n (\lambda_n - \lambda_i) x_i^2$$

donc  $(\lambda_n - \lambda_i)x_i^2$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $x_i = 0$  lorsque  $\lambda_i \neq \lambda_n$ . Cela donne  $x$  dans l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ . Réciproquement ces vecteurs conviennent.

On en déduit que  $e_n$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ . On a  $u(e_n) = \lambda_n e_n$ . La dernière colonne de  $M$  est donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et par symétrie, la première ligne est sous la même forme.}$$

On en déduit que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$  est stable par  $u$ . On note  $v = u|_F$ . Cela reste un endomorphisme autoadjoint, son polynôme caractéristique vérifie  $\chi_u = (X - \lambda_n)\chi_v$  donc les valeurs propres de  $v$  sont  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$  et  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base orthonormée de  $F$  avec  $\langle v(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$ .

On a tout ce qu'il faut pour terminer la démonstration par récurrence sur  $n$  (le cas  $n = 1$  étant immédiat).

### Exercice 16

Les deux ensembles  $E$  et  $\emptyset$  conviennent. On montre que ce sont les seuls. Supposons que  $A$  est ouvert et fermé et n'est ni  $E$  ni  $\emptyset$ . Il existe donc  $a \in A$  et  $b \in E \setminus A$ . On s'intéresse au segment  $[a, b] = \{(1-t)a + tb, t \in [0, 1]\}$ . Cet ensemble est non vide, part d'un point de  $A$  et termine sur un point hors de  $A$ . On s'intéresse à la transition. Soit  $I = \{t \in [0, 1], (1-t)a + tb \in A\}$ .

- $I$  est non vide (car  $0 \in I$ ) et majoré par 1, il admet une borne supérieure  $s$ ,
- puisque  $A$  est fermé, on a  $s \in I$  : par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite  $(t_n)$  de  $I$  qui converge vers  $s$ . On a  $x_n = (1-t_n)a + t_n b$  qui est une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $(1-s)a + sb$ . Puisque  $A$  est fermé,  $(1-s)a + sb \in A$  donc  $s \in I$ .
- On en déduit que  $s < 1$ . Puisque  $A$  est également ouvert, on va montrer que cela donne une contradiction :  $u = (1-s)a + sb \in A$  donc il existe  $r > 0$  tel que  $B(u, r) \subset A$ . On peut alors prolonger l'ensemble  $I$  vers la droite. Pour  $h > 0$  avec  $s+h \leq 1$  (possible car  $s < 1$ ), on a  $u_h = (1-(s+h))a + (s+h)b = u + h(b-a)$ . Si  $|h| < \frac{r}{\|b-a\|}$ , alors  $u_h \in B(u, r) \subset A$ . Ainsi pour tout  $h \in [0, \frac{r}{b-a}]$ ,  $s+h \in I$ . Cela contredit le caractère maximal de  $s$ .

Conclusion l'hypothèse de départ, à savoir qu'il existe  $a \in A$  et  $b \notin A$  est fausse. On en déduit que  $A$  est  $\emptyset$  ou  $E$ .

### Exercice 17

On peut prendre  $A = ]0, 1] \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$ . On a

$$\bar{A} = [0, 1] \cup [2, 3], \overset{\circ}{A} = ]0, 1[ \cup ]2, 3[, \overset{\circ}{A} = ]0, 1[ \text{ et } \bar{\bar{A}} = [0, 1]$$

Plus simplement, on peut prendre  $A = ]0, 1[ \cup ]1, 2] \cup \{3\}$  et alors

$$\bar{A} = [0, 2] \cup \{3\}, \overset{\circ}{A} = ]0, 2[ \cup \{3\}, \overset{\circ}{A} = ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \text{ et } \bar{\bar{A}} = [0, 2]$$

### Exercice 18

- on note  $M$  la borne supérieure de la suite. On se ramène à une suite minorée, de borne inférieure nulle en posant  $v_n = M - u_n$ . Cette suite vérifie la même propriété que la suite  $u$ . On va montrer qu'elle est constante égale à 0 (toujours plus simple).
- La relation de récurrence est  $nv_n = \sum_{k=n+1}^{2n} v_k$ . Cela donne  $(n+1)v_{n+1} - nv_n = v_{2n+2} + v_{2n+1} - v_{n+1}$  d'où

$$(n+2)v_{n+1} - nv_n = v_{2n+2} + v_{2n+1} \geq 0 \text{ ce qui donne } nv_n \leq (n+2)v_{n+1} \Leftrightarrow v_n \leq \frac{n+2}{n} v_{n+1}.$$

Plus généralement, on obtient une majoration des termes précédents : si  $i \leq j-2$  (pour qu'il y ait au moins 2 facteurs aux numérateurs et dénominateurs),

$$0 \leq v_i \leq \frac{(i+2) \dots (j)(j+1)}{i(i+1) \dots (j-2)(j-1)} v_j = \frac{j(j+1)}{i(i+1)} v_j$$

- Puisque  $\inf v = 0$  : on se donne  $\varepsilon > 0$ ; il existe alors  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq v_{n_0} \leq \varepsilon$ . Puisque  $v_{n_0} = \frac{1}{n_0} \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} v_k$ , il existe  $k \in \llbracket n_0+1; 2n_0 \rrbracket$  tel que  $v_k \leq \varepsilon$  (sinon la somme est  $> n_0 \varepsilon$  et  $v_{n_0} > \varepsilon$ ). Pour tout  $i \in \llbracket n_0+1; k-2 \rrbracket$ , on a

$$v_i \leq \frac{k(k+1)}{i(i+1)} v_k \leq \frac{2n_0(2n_0+1)}{(n_0+1)(n_0+2)} v_k \leq 4v_k$$

et  $v_{k-1} \leq \frac{k+1}{k-1} v_k \leq 4v_k$ . On a donc, pour tout  $i \in \llbracket n_0; k \rrbracket$ ,  $v_i \leq 4\varepsilon$ .

- Dès qu'on a un entier  $n_0$  tel que  $v_{n_0} < \varepsilon$ , alors on en a un autre strictement supérieur avec la même propriété. On note alors

$$A = \{n \geq n_0, v_n \leq \varepsilon \text{ et } \forall k \in \llbracket n_0; n \rrbracket, v_k \leq 4\varepsilon\}.$$

Cet ensemble est non vide et il n'est pas majoré : dès qu'un entier  $p$  convient, le principe précédent permet d'en trouver un autre  $q$  strictement plus grand avec  $v_k \leq 4\varepsilon$  pour tout entier entre  $p$  et  $q$ . On en déduit que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $v_n \leq 4\varepsilon$ .

- Grâce à la relation  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} v_k$ , on obtient par récurrence descendante que  $v_{n_0-1}$ , puis  $v_{n_0-2}$ ... jusqu'à  $v_1$  sont inférieurs à  $4\varepsilon$ .
- On a donc montré que pour un  $\varepsilon > 0$  donné, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq v_n \leq 4\varepsilon$ . Cela étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , tous les termes sont nuls.

### Exercice 19

Si  $v_n$  ne tend pas vers 0 alors la série diverge grossièrement. On se place donc dans le cas où  $v_n$  tend vers 0, ce qui revient à dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = +\infty$ . On a alors  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 u_n}$ .

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 u_n} \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^N u_n \right) = \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n \sqrt{u_n}} \right)^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N (\sqrt{u_n})^2 \right) \geq \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \sqrt{u_n}} \sqrt{u_n} \right)^2 = \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

Puisque  $\sum u_n$  converge, on a la divergence de  $\sum \frac{1}{n^2 u_n}$  et donc celle de  $\sum \frac{1}{1 + n^2 u_n}$ .

### Exercice 20

- a) On commence par récrire l'intégrale pour pouvoir utiliser la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  :

$$\int_0^1 f'_n(t) g(t) dt = f_n(1)g(1) - f_n(0)g(0) - \int_0^1 f_n(t)g'(t) dt$$

La suite  $f_n g'$  converge uniformément vers  $f g'$ . La convergence uniforme donne également la convergence simple. Cela donne en limite, pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$f(1)g(1) - f(0)g(0) = \int_0^1 f(t)g'(t) dt$$

Si  $g = 1$ , on obtient  $f(1) = f(0)$ . On a donc

$$\int_0^1 f(t)g'(t) dt - f(1)(g(1) - g(0)) = 0 = \int_0^1 f(t)g'(t) dt - \int_0^1 f(1)g'(t) dt = \int_0^1 (f(t) - f(1))g'(t) dt$$

On a donc, pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ ,  $\int_0^1 (f(t) - f(1))g'(t) dt = 0$ . Si  $h$  est une fonction continue quelconque sur  $[0, 1]$ , toute primitive  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et  $g' = h$ . Ainsi, si  $g$  convient alors, pour toute fonction  $h$  continue sur  $[0, 1]$ , on a  $\int_0^1 (f(t) - f(1))h(t) dt = 0$ . Avec  $h(t) = f(t) - f(1)$ , on en déduit que  $f - f(1)$  est nulle et  $f$  est constante.

- b) On note  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ . Elle est définie, continue sur  $\mathbb{R}$ , paire et de période  $2\pi$ . On peut montrer que, pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ ... mais aucun moyen simple. Le problème vient qu'on aimerait dériver mais qu'on ne peut pas le faire (pas de convergence suffisante pour la série des dérivées premières ou secondes). On peut compenser cela avec l'ajout d'un paramètre :

- on peut introduire une fonction auxiliaire comme  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\cos nx}{n^2}$  où  $t$  est un réel dans  $[0, 1[$ . On peut alors dériver, obtenir  $g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cos(nx)$  qui se calcule en tant que somme géométrique. On espère pouvoir intégrer deux fois pour obtenir  $g(x)$ . On vérifie alors qu'on peut faire tendre  $t$  vers 1 pour obtenir  $f(x)$

- une autre fonction utilisable :  $h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \frac{\cos(nx)}{n^2}$  (on change la variable d'étude). On dérive par rapport à  $t$  deux fois (à justifier) pour obtenir  $h''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \cos(nx)$  qui se calcule bien (somme géométrique). Dans une idée proche, on a

$$h'(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n} \cos(nx)$$

et, en justifiant l'intégration terme à terme, puisque  $\int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{n}$  (et qu'on a convergence de  $\sum \frac{1}{n^2}$ ), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n} \cos(nx) dt = f(x)$$

### Exercice 21

- on commence par le changement de variable «  $t = u^{1/n}$  » qui donne

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-1/n}} du$$

On en profite pour justifier l'existence de cette nouvelle intégrale (par IPP) ce qui donne l'existence de la suite  $u_n$  (avec le changement de variable réciproque).

- on ne peut évidemment pas appliquer le théorème de convergence dominée puisque  $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$  n'est pas intégrable sur  $]0, +\infty[$ . On intègre par parties pour avoir, pour  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \left[ \frac{1 - \cos u}{u^{1-1/n}} \right]_0^{+\infty} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} du = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} du$$

- on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée, avec la domination par  $\frac{1 - \cos u}{u^2}$  sur  $]0, 1]$  et  $\frac{1 - \cos u}{u^{3/2}}$  sur  $[1, +\infty[$ , ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

la seconde égalité s'obtenant par une nouvelle intégration par parties.

### Exercice 22

On note  $v_n = \int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{t} dt$ . On a  $u_n - v_n = \int_{-r}^r \left( \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin(nt) dt$ . On vérifie que la fonction

$$g : \begin{cases} [-r, r] \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \end{cases}$$

se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-r, r]$  (on l'a déjà fait). On utilise alors le lemme de Lebesgue (à redémontrer) pour en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$ .

Avec un changement de variable, on a  $v_n = \int_{-nr}^{nr} \frac{\sin u}{u} du$  et cette suite d'intégrales converge vers  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$  (on prolonge par continuité en 0 par la valeur 1 pour définir l'intégrale sur  $\mathbb{R}$ ).

*Remarque* : évidemment il y a plein de choses à démontrer en cours de route : le prolongement  $\mathcal{C}^1$ , le lemme de Lebesgue (cadre  $\mathcal{C}^1$ , c'est facile), la convergence de l'intégrale.

### Exercice 23

Par domination par  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ , on montre facilement que  $f$  est définie, continue, paire et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Le reste de l'exercice consiste à montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et de déterminer une équation différentielle vérifiée par  $f$ . La difficulté est qu'on ne peut pas le faire avec l'expression donnée. Il faut commencer par intégrer par parties afin d'augmenter le degré du dénominateur et ainsi pouvoir appliquer les théorèmes de dérivation (avec domination par une fonction intégrable). On peut aussi écrire par relation de Chasles (en 0) et changement de variable que  $f(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$  - l'exercice est corrigé sur la feuille d'exercices sur les intégrales à paramètre.

### Exercice 24

On note  $n$  le cardinale de  $E$ . On peut le faire de plusieurs façons :

- par calculs : on choisit les éléments de  $C$  - il y a  $\binom{n}{k}$  façons de choisir  $k$  éléments, puis on choisit  $j$  éléments parmi ces  $k$  éléments pour  $B$ , et enfin  $i \leq j$  éléments parmi ces derniers pour  $A$ . Cela donne

$$N = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{n}{k} \binom{k}{j} \binom{j}{i} = \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k 2^j \binom{k}{j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+2)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = (1+3)^n = 4^n$$

- plus rapidement : on « code » une description d'un tel choix (et donc on crée une bijection avec un ensemble simple). Pour chaque élément  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  (on suppose qu'on a numéroté les éléments de  $E$ ), on associe la valeur 1 si l'élément est dans  $A$ , 2 s'il est dans  $B \setminus A$ , 3 s'il est dans  $C \setminus B$  et 4 (ou 0) s'il n'est pas dans  $C$ . Ainsi les triplets  $A, B, C$  vérifiant l'hypothèse sont en bijection avec  $\{1, 2, 3, 4\}^n$  (réciproquement, la donnée d'un élément de ce dernier ensemble permet de trouver  $A, B, C$  et avec  $A \subset B \subset C$ ). On a donc  $4^n$  possibilités.

**Exercice 25**

On note  $a_n$  le nombre de façon pour appairer  $2n$  entiers distincts. On a  $a_1 = 1$ . Pour  $n \geq 2$ , on doit associer 1 avec un autre entiers; cela donne  $2n - 1$  possibilités. On doit alors appairer les  $2n - 2$  entiers restants. Cela donne  $a_n = (2n - 1)a_{n-1}$  et finalement

$$a_n = (2n - 1)(2n - 3) \dots 3.1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

**Exercice 26**

- a) On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des triplets correspondants. Soit  $(A, B, C)$  des parties deux à deux disjointes de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Pour chaque élément  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on associe 1 si  $k \in A$ , 2 si  $k \in B$ , 3 si  $k \in C$  et 4 sinon. Cela crée une application entre  $\mathcal{A}$  et  $\{1, 2, 3, 4\}^n$ . Cette application est bijective (si on se donne un élément de  $\{1, 2, 3, 4\}^n$ , on obtient un unique antécédent). On a donc  $4^n$  éléments dans  $\mathcal{A}$ .

*remarque* : c'est la même question que l'exercice où on dénombre les triples  $A \subset B \subset C$  : il suffit de prendre  $\tilde{A} = A$ ,  $\tilde{B} = B \setminus A$  et  $\tilde{C} = C \setminus B$  pour obtenir un triplet d'ensembles disjoints; et on fait de même avec des réunions dans l'autre sens.

- b) La fonction est entièrement déterminée par la donnée des valeurs  $f(k+1) - f(k)$  pour  $k \in \llbracket 0; 2N - 1 \rrbracket$ . Plus précisément, on note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions recherchées. on peut créer une application  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \{-1, 1\}^{2N}$  qui à  $f$  associe la suite

$(f(k+1) - f(k))_{k \in \llbracket 0; 2N - 1 \rrbracket}$ . On a en effet  $f(p) = f(0) + \sum_{k=0}^{p-1} f(k+1) - f(k)$  pour tout  $p \in \llbracket 1; 2N \rrbracket$ . L'application est injective et donc bijective de  $\mathcal{B}$  dans l'image de  $\theta$ . Un élément  $u$  de  $F = \{-1, 1\}^{2N}$  est dans l'image de  $\theta$  si et seulement si  $\sum_{k=1}^{2N} u_k = 0$

(cela équivaut à la condition  $f(2N) = 0$ ). On doit donc dénombrer l'ensemble des éléments de  $F$  dont la somme fait 0. Cela correspond à dire qu'il y a autant de 1 que de -1. On choisit la position des  $n$  termes +1, cela impose celle des  $n$  termes valant

-1. Il y a donc  $\binom{2n}{n}$  éléments dans  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 28**

Voir feuille exercice de probas (variables aléatoires) - sujet CCINP

**Exercice 29**

On appelle  $L_1$  la longueur de la première séquence et  $L_2$  celle de la seconde (on peut les définir proprement en variables aléatoires, par exemple par  $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}, X_1 = X_2 = \dots = X_k \text{ et } X_k \neq X_{k+1}\}$  où les  $X_i$  sont des variables de Bernoulli indépendantes et  $(X_i = 1)$  est l'événement « pile au lancer  $i$  »).

Pour  $i, j$  des entiers de  $\mathbb{N}^*$ , l'événement  $(L_1 = i, L_2 = j)$  correspond aux deux tirages

$$\underbrace{PP \dots P}_{i \text{ fois}} \underbrace{FF \dots F}_{j \text{ fois}} P \quad \text{et} \quad \underbrace{FF \dots F}_{i \text{ fois}} \underbrace{PP \dots P}_{j \text{ fois}} P$$

donc  $\mathbb{P}(L_1 = i \cap L_2 = j) = p^{i+1} q^j + p^j q^{i+1}$ . On en déduit la loi de  $L_2$  : on a  $L_2$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(L_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1} q^j + p^j q^{i+1} = \frac{p^2}{1-p} q^j + \frac{q^2}{1-q} p^j = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}$$

On détermine alors l'espérance. On a  $\sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$  (dérivée de la somme de la série entière  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ). On obtient finalement

$$\mathbb{E}(L_2) = \frac{p^2}{p^2} + \frac{q^2}{q^2} = 2$$

**Exercice 30**

Quelle que soit la position de la goutte, elle descend avec une probabilité de 1/2. Formalisons. Soient, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$X_k = Y_k(0, -1) + (1 - Y_k)(Z_k(1, 0) + (1 - Z_k)(-1, 0)).$$

La position de la goutte à l'instant  $t$  est

$$S_t = (2, n) + \sum_{i=1}^t X_i,$$

où les  $Y_i$  sont i.i.d. et suivent la loi de Bernoulli de paramètre 1/2, et les  $Z_i$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$  avec

$$\{ \mathbf{P}(Z_i = 1 \mid S_{i-1} \in \{2\} \times \llbracket 1, n \rrbracket) = 1/2, \mathbf{P}(Z_i = 1 \mid S_{i-1} \in \{1\} \times \llbracket 1, n \rrbracket) = 1, \mathbf{P}(Z_i = 1 \mid S_{i-1} \in \{3\} \times \llbracket 1, n \rrbracket) = 0.$$

a) La boule sort à l'instant  $t$ , pour  $t \geq n$ , est l'événement :

$$(Y_1 + \dots + Y_t = n) \cap (Y_1 + \dots + Y_{t-1} = n - 1) = (Y_1 + \dots + Y_{t-1} = n - 1) \cap (Y_t = 1).$$

Or  $Y_1 + \dots + Y_{t-1} \sim \mathcal{B}(t-1, 1/2)$ , donc la probabilité que la boule sorte à l'instant  $t$  est, par indépendance de  $Y_1 + \dots + Y_{t-1}$  et de  $Y_t$ ,

$$\mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_{t-1} = n - 1, Y_t = 1) = \binom{t-1}{n-1} \frac{1}{2^{t-1}} \times \frac{1}{2} = \binom{t-1}{n-1} \frac{1}{2^t}$$

b) On note  $Z = \min\{t \in \mathbb{N}, Y_1 + \dots + Y_t = n\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ . La variable aléatoire  $Z$  est presque sûrement finie et sa fonction génératrice est

$$G_Z(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k) x^k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

En dérivant  $(n-1)$  fois la série géométrique (série entière de rayon 1), on obtient :

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n-1)(k+n-2)\dots(k+1)x^k \quad \text{donc} \quad \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

On en déduit que

$$G_Z(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \times \frac{1}{(1-x/2)^n},$$

série entière de rayon 2. L'espérance de  $Z$  est

$$\mathbf{E}(Z) = G'_Z(1) = 2n.$$

**Exercice 33**

a) On dira que  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^2 = I_n$  est une symétrie. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $A^2 = B^2 = I_n$  et  $AB = -BA$ . Puisque comme  $n$  est impair, on a

$$\det(A) \det(B) = \det(AB) = (-1)^n \det(BA) = -\det(BA) = -\det(A) \det(B)$$

Ainsi  $\det(A) \det(B) = 0$ , ce qui est impossible car  $A$  et  $B$  sont inversibles (ce sont des matrices de symétries vectorielles). On a donc  $I(n) \leq 1$  et  $I(n) = 1$  puisque un ensemble avec une matrice de symétrie convient (par exemple avec  $I_n$ ).

b) On a  $a(2t+1) = 1$ . On va montrer que  $a(2n) = a_n + 2$  pour tout  $n$ . Par récurrence la donnera bien  $a(2^s(2t+1)) = 2s$ .

• on considère  $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  des symétries anticommétant deux à deux. On pose

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

et, pour  $k \in \llbracket 3; r+2 \rrbracket$ ,

$$A_{k+2} = \begin{pmatrix} 0 & iB_k \\ -iB_k & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par produits par blocs que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; r+2 \rrbracket^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad A_i A_j = -A_j A_i.$$

Ainsi, on a  $a(2n) \geq 2 + a(n)$ .

- Supposons que  $A_1, \dots, A_R \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$  sont des matrices de symétrie qui anticommulent. On décompose l'espace selon les espaces propres de  $A_1$  :

$$\mathbb{C}^{2n} = E_+ \oplus E_- \quad \text{où} \quad E_+ = \ker(A_1 - I_n) \quad \text{et} \quad E_- = \ker(A_1 + I_n).$$

Comme  $A_j$  anticommute avec  $A_1$ , l'endomorphisme canoniquement associé à  $A_j$  échange  $E_+$  et  $E_-$ . En particulier,  $E_+$  et  $E_-$  ont la même dimension  $n$ . En choisissant une base adaptée à cette décomposition, on peut supposer que

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Comme  $A_2^2 = I_n$ , on a  $UV = VU = I_n$ . En conjuguant par  $P = \text{diag}(I_n, U)$ , on ne change pas  $A_1$  et  $A_2$  devient  $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ . On suppose donc que  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $j \in \llbracket 3; R \rrbracket$ . Comme  $A_j$  anticommute avec  $A_1$ , la matrice  $A_j$  a la forme

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & C_j \\ D_j & 0 \end{pmatrix}.$$

La relation  $A_2 A_j = -A_j A_2$  entraîne que  $D_j = -C_j$  et donc, on a

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & C_j \\ -C_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $A_j^2 = I_{2n}$ , on a  $C_j^2 = -I_n$ . On pose  $B_{j-2} = iC_j$  de sorte que

$$B_{j-2}^2 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 3; R \rrbracket \setminus \{j\}, \quad B_{j-2} B_{k-2} = -B_{k-2} B_{j-2}.$$

On obtient alors  $R-2$  symétries qui anticommulent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et donc on a  $R-2 \leq a(n)$ . Ainsi, on a  $a(2n) \leq a(n) + 2$ .

### Exercice 37

- Le rang d'un projecteur est égal à sa trace. La fonction  $t \mapsto \text{tr}(\rho(t))$  est continue à valeurs dans l'ensemble  $\llbracket 0; n \rrbracket$ . Elle est donc constante. On notera  $r = \text{rg}(\rho(t))$  dans la suite.
- Le problème revient essentiellement à trouver, pour tout  $t \in [0, 1]$ , une base  $B_t$  de  $\mathbb{C}^n$  adaptée à la somme directe  $\text{Im}(\rho(t)) \oplus \ker(\rho(t))$ , et qui dépende continûment de  $t$ .
  - Solution locale** avec valeur donnée en un point  $t_0$  Soient  $t_0 \in [0, 1]$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{C}^n$  adaptée à  $\text{Im}(\rho(t_0)) \oplus \ker(\rho(t_0))$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\begin{cases} \rho(t_0) e_i = e_i & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ (I_n - \rho(t_0)) e_i = e_i & \text{si } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Posons, pour  $t$  au voisinage de  $t_0$ ,

$$B_t = (\rho(t)e_1, \dots, \rho(t)e_r, (I_n - \rho(t))e_{r+1}, \dots, (I_n - \rho(t))e_n)$$

et notons  $u(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice de la famille  $B_t$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . La fonction  $u$  est continue,  $u(t_0)$  est inversible et  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ; il existe donc un voisinage  $V(t_0)$  de  $t_0$  tel que, pour tout  $t \in V(t_0)$ ,  $u(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , i.e.  $B_t$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ . Les sous-familles  $(\rho(t)e_1, \dots, \rho(t)e_r)$  et  $((I_n - \rho(t))e_{r+1}, \dots, (I_n - \rho(t))e_n)$  sont alors des bases de  $\text{Im}(\rho(t))$  et  $\ker(\rho(t)) = \text{Im}(I_n - \rho(t))$  respectivement (vu qu'elles sont libres, contenues dans ces sous-espaces et de cardinaux  $r$  et  $n-r$ ). On vient ainsi de construire une fonction continue  $u : V(t_0) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $t \in V(t_0)$ ,  $u(t)^{-1} \rho(t) u(t) = J_r$ , où  $J_r$  est la matrice diagonale  $\text{diag}(I_r, 0_{n-r})$ . Or  $\rho(0)$  est elle aussi semblable à  $J_r$  : il existe  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\rho(0) = A^{-1} J_r A$ . Alors la fonction  $\tilde{u} : t \mapsto u(t) A$  vérifie  $\tilde{u} \in C^0(V(t_0), \text{GL}_n(\mathbb{C}))$  et  $\tilde{u}(t)^{-1} \rho(t) \tilde{u}(t) = \rho(0)$  pour tout  $t \in V(t_0)$ .

- **Solution globale** : on considère l'ensemble  $I$  des  $t \in [0, 1]$  tels qu'il existe une solution sur l'intervalle  $[0, t]$ , i.e. une fonction continue  $u : [0, t] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $u(s)^{-1}\rho(s)u(s) = \rho(0)$  pour tout  $s \in [0, t]$ .

D'après le cas local appliqué avec  $t_0 = 0$ , on a  $I \neq \emptyset$  et  $m = \sup I$  est  $> 0$ . Si  $m \in I$  et  $m < 1$ , on obtient une contradiction car on peut prolonger  $u$  sur un voisinage à droite de  $m$  grâce au cas local en  $t_0 = m$ . Si l'on montre que  $m \in I$ , on aura donc nécessairement  $m = 1$ .

Supposons par l'absurde que  $m \notin I$ . Par le cas local en  $m$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et une fonction  $v \in C^0([m - \varepsilon, m], \text{GL}_n(\mathbb{C}))$  vérifiant  $v(s)^{-1}\rho(s)v(s) = \rho(0)$  pour tout  $s \in [m - \varepsilon, m]$ . D'autre part il existe  $t \in I \cap [m - \varepsilon, m[$  et  $u \in C^0([0, t], \text{GL}_n(\mathbb{C}))$  vérifiant  $u(s)^{-1}\rho(s)u(s) = \rho(0)$  pour tout  $s \in [0, t]$ . Au point  $t$ , on a deux descriptions que l'on va faire coïncider par un changement de base. On a

$$\rho(t) = u(t)\rho(0)u(t)^{-1} = v(t)\rho(0)v(t)^{-1}$$

donc la matrice  $v(t)^{-1}u(t)$  commute avec  $\rho(0)$ . Ceci permet de prolonger  $u$  en posant, pour tout  $s \in ]t, m]$ ,  $u(s) = v(s)v(t)^{-1}u(t)$ . Le prolongement est continu et pour  $t < s \leq m$ , on a

$$\begin{aligned} u(s)^{-1}\rho(s)u(s) &= u(t)^{-1}v(t)v(s)^{-1}\rho(s)v(s)v(t)^{-1}u(t) \\ &= u(t)^{-1}v(t)\rho(0)v(t)^{-1}u(t) = \rho(0) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une solution sur  $[0, m]$ , en contradiction avec le fait que  $m \notin I$ .

On a donc prouvé que  $I = [0, 1]$  et qu'il existe  $u \in C^0([0, 1], \text{GL}_n(\mathbb{C}))$  vérifiant  $\rho(s) = u(s)\rho(0)u(s)^{-1}$  pour tout  $s \in [0, 1]$ .

- c) On utilisera le résultat classique : pour tout  $k \geq 1$ ,  $\text{GL}_k(\mathbb{C})$  est connexe par arcs. L'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec  $J_r = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$  est

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}; A \in \text{GL}_r(\mathbb{C}), B \in \text{GL}_{n-r}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Cet ensemble est connexe par arcs, car  $\text{GL}_r(\mathbb{C})$  et  $\text{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$  le sont. Comme  $\rho(0)$  est un projecteur de rang  $r$ , il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle la matrice de ce projecteur est  $J_r$ . On en déduit que

$$C' := \{w \in \text{GL}_n(\mathbb{C}); w\rho(0) = \rho(0)w\}$$

est lui aussi connexe par arcs. Si  $\rho(0) = \rho(1)$  alors  $u(1)$  commute avec  $\rho(0)$ . De plus  $u(0)$  commute évidemment avec  $\rho(0)$ . On peut donc trouver un chemin  $\gamma \in C^0([0, 1], C')$  tel que  $\gamma(0) = u(0)$  et  $\gamma(1) = u(1)$ . On pose, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $v(t) = u(t)\gamma(t)^{-1}$ . Alors

$$v(t)\rho(0)v(t)^{-1} = u(t)\gamma(t)^{-1}\rho(0)\gamma(t)u(t)^{-1} = u(t)\rho(0)u(t)^{-1} = \rho(t)$$

et  $v(0) = v(1) = I_n$ .

### Exercice 38

- a) Résultat habituel sur les polynômes de Tchebychev. On peut justifier que les polynômes vérifient la relation  $T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0$  pour en déduire l'existence ou le refaire par un calcul complet : soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a l'égalité suivante, via la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \text{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) = \text{Re} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) \right] \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta) \cos^{n-2k}(\theta) \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos^2(\theta) - 1)^k \cos^{n-2k}(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme  $T_n(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$  est de degré  $n$ , de coefficient dominant  $2^{n-1}$  et vérifie l'égalité  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$  pour tout réel  $\theta$ , ce qui prouve l'existence. De plus, deux éventuels polynômes solutions coïncident sur  $[-1, 1]$  donc doivent être égaux, ce qui prouve l'unicité.

- b) i) Posons  $u_n : x \rightarrow a_n T_{3^n}(x)$ . Sur  $[-1, 1]$ ,  $|T_{3^n}(x)| = |\cos(3^n \arccos x)| \leq 1$ . On a donc  $\|u_n(x)\|_\infty \leq |a_n| = a_n$ . La série des  $u_n$  converge donc normalement sur  $[-1, 1]$ , ce qui assure sa continuité.

ii) Notons  $T = \sum_{k=0}^n a_k T_{3^k}(x)$ . Commençons par vérifier que  $\|f - T\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ . En effet, pour tout  $x$ ,

$$|f(x) - T(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k T_{3^k}(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| |T_{3^k}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k,$$

avec égalité dans l'inégalité pour  $x = 1$ .

Supposons qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}_{3^n}[X]$  tel que  $\|f - P\|_\infty < \|f - T\|_\infty$ . Posons, comme le suggère l'indication,  $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$  pour  $k \in \llbracket 0, 3^{n+1} \rrbracket$ . Pour tout  $\ell \geq n + 1$ ,  $T_{3^\ell}(x_k) = \cos(3^\ell \pi + k3^{\ell-n-1}\pi) = \cos((k+1)\pi) = (-1)^{k+1}$ , où l'on a utilisé que  $3^\ell$  et  $3^{\ell-n-1}$  sont impairs. On en déduit que

$$\begin{aligned} T(x_k) - P(x_k) &= f(x_k) - P(x_k) - (-1)^{k+1} \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} a_\ell \\ &= f(x_k) - P(x_k) + (-1)^k \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} a_\ell \end{aligned}$$

Comme  $\|f - P\|_\infty < \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} a_\ell$ , on déduit que cette expression est du signe de  $(-1)^k$ . Or, la suite  $(x_k)$  est une suite strictement croissante. On en déduit que  $T - P$  change  $3^{n+1}$  fois de signe sur  $[-1, 1]$ , donc qu'il admet  $3^{n+1}$  racines. Comme il est de degré au plus  $3^n$ , on conclut que ce polynôme est nul.

Pour compléter la contradiction, on voit alors que  $\|f - T\|_\infty = \|f - P\|_\infty < \|f - T\|_\infty$ . Ainsi, le polynôme  $T$  est celui qui réalise la distance, ce qui conclut la question.

### Exercice 39

- a) La relation se réécrit  $z_{n+1} = \frac{n+\beta}{n+1} z_n$ , ce qui permet d'avoir la formule explicite

$$z_n = \frac{n+\beta-1}{n} \cdot \frac{n+\beta-2}{n-1} \cdots \beta z_0 = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}$$

Dans le cas où  $\beta$  est entier, cette formule devient

$$z_n = \binom{n+\beta-1}{\beta-1} = \frac{(n+\beta-1)(n+\beta-2)\cdots(n+1)}{(\beta-1)!} \sim \frac{n^{\beta-1}}{(\beta-1)!}.$$

La formule de Stirling pour la fonction  $\Gamma$  (c'est-à-dire  $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$ ) permet de trouver l'équivalent  $z_n \sim \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ . Sans utiliser la formule de Stirling, on va montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que  $z_n \sim C n^{\beta-1}$ . La relation peut également se réécrire

$$\begin{aligned} z_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\beta-1}{k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{\beta-1}{k}\right)\right) \\ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{\beta-1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\beta-1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = (\beta-1) \ln n + K + o(1) \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante. En repassant à l'exponentielle, on trouve l'équivalent souhaité.

- b) Quitte à raisonner sur  $(x_n - x)$ , on peut supposer pour la suite que  $x = 0$ . Notons que si  $\mu_n$  tend vers 0, on déduit de  $\alpha x_n = y_n - (1-\alpha)\mu_n$  que la suite  $(x_n)$  tend vers 0 comme voulu. Ainsi, plutôt que de raisonner avec la suite  $(x_n)$ , on réexprime le problème en fonction de la moyenne de Cesàro  $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ . Puisque  $x_n = (n+1)\mu_n - n\mu_{n-1}$ , la relation de l'énoncé se réécrit

$$[\alpha(n+1) + (1-\alpha)]\mu_n = \alpha n\mu_{n-1} + y_n \iff \mu_n = \frac{\alpha n}{\alpha n + 1} \mu_{n-1} + \frac{y_n}{\alpha n + 1}.$$

On pose à présent  $P_n = (n+1)\mu_n z_{n+1}$ , où  $(z_n)$  est la suite de la question a). La relation devient

$$\begin{aligned} P_n &= (n+1)\mu_n z_{n+1} = \frac{\alpha n}{\alpha n + 1} \mu_{n-1} (n+1) z_{n+1} + \frac{y_n}{\alpha n + 1} (n+1) z_{n+1} \\ &= P_{n-1} + y_n z_{n+1} \frac{n+1}{\alpha n + 1} \end{aligned}$$

On a donc  $P_n = P_0 + \sum_{k=1}^n y_k z_{k+1} \frac{k+1}{\alpha k + 1}$ . Or, d'après la question a), on a

$$y_n z_n \frac{n+1}{\alpha n + 1} = o\left(\frac{z_n}{\alpha}\right) = o(n^{1/\alpha-1})$$

En utilisant l'équivalent  $\sum_{k=1}^n k^{1/\alpha-1} \sim \alpha n^{1/\alpha}$  qui diverge, et par sommation des relations de comparaison, on trouve

$$P_n = o\left(\sum_{k=1}^n k^{1/\alpha-1}\right) = o(n^{1/\alpha})$$

On revient alors à la suite  $(\mu_n)$ , et on utilise de nouveau que  $z_n \sim C n^{1/\alpha-1}$ , qui vérifie donc

$$\mu_n = \frac{P_n}{(n+1)z_{n+1}} = o\left(\frac{n^{1/\alpha}}{nn^{1/\alpha-1}}\right) = o(1)$$

donc la limite est bien nulle pour  $(\mu_n)$  et donc pour  $(x_n)$ .

#### Exercice 41

- a) • Notons  $E$  le sous-espace vectoriel des fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $m > 2$ , considérons l'application  $\Psi$  définie sur  $E$  par, pour tout  $f$  dans  $E$ , pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Psi(g)(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}$ . On est ramené à chercher un point fixe de  $\Psi$ . Le caractère minoré de  $f$  assure que  $\Psi$  est à valeurs dans  $E$  et que, si  $g_1$  et  $g_2$  sont dans  $E$ ,

$$\|\Psi(g_1) - \Psi(g_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty,$$

ce qui assure que  $\Psi$  est contractante, et donne facilement l'unicité d'un point fixe de  $\Psi$ . Pour l'existence, on redémontre ce cas du théorème du point fixe. En posant  $u_0 = 0_E$  et, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \Psi(u_n)$ , on remarque que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{1}{2^n} \|u_1 - u_0\|$ , ce qui assure que la série de fonctions  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge normalement, donc uniformément. Ainsi, la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $g$ . Le caractère fermé de  $E$  et la continuité de  $\Psi$  assurent que  $g \in E$  et  $\Psi(g) = g$ .

- Dans le cas où  $M < \frac{1}{2}$ , en posant, pour  $g \in E$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi(g)(t) = f\left(\frac{t}{q}\right) \left(g\left(\frac{t}{q}\right) - 1\right)$$

on montre que  $\Phi$  est aussi contractante et qu'elle admet un point fixe, solution de l'équation en posant  $x = t/q$ .

- b) Si  $m > 2$ , par itération de la relation de récurrence, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} f(q^j t)} + \frac{g(q^n t)}{\prod_{j=0}^{n-1} f(q^j t)}$$

Comme  $f$  est minorée par  $m$ , on a

$$0 \leq \frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} f(q^j t)} \leq \frac{1}{m^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui assure que

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} f(q^j t)}$$

La fonction  $g$  est une somme de termes strictement positifs et est donc strictement positive.

Si  $M < \frac{1}{2}$ , on a, de même que précédemment,  $g(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^k f\left(\frac{t}{q^j}\right)$ , qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 42

a) On note  $\theta(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{si } n = p^\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Ainsi  $\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \theta(n)$ , et

$$T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{n} \\ mn \leq x}} \theta(m) = \sum_{\substack{m, n \geq 1 \\ mn \leq x}} \theta(m) = \sum_{k \leq x} \sum_{m|k} \theta(m).$$

On calcule  $\sum_{d|k} \theta(d) = \ln(k)$ . Si on introduit la décomposition en facteurs premiers de  $k$ ,  $k = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ , les diviseurs  $d$  de  $k$  pour lesquels  $\theta(d) \neq 0$  sont exactement les  $p_i^j$  pour  $1 \leq j \leq \alpha_i$ . Ainsi,

$$\sum_{d|k} \theta(d) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \ln(p_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \ln(p_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}\right) = \ln(k).$$

On en déduit ainsi que

$$T(x) = \sum_{k \leq x} \ln(k).$$

Pour le développement asymptotique, on peut utiliser la formule de Stirling. En posant  $n = \lfloor x \rfloor$ ,  $T(x) = \ln(n!)$ . Or,  $\ln(n!) - \ln\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$  a une limite finie et donc :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln n)$$

Comme  $x - 1 < n \leq x$ ,  $\ln(n) = \ln(x) + O(1)$  et donc finalement,

$$T(x) = x \ln(x) - x + O(\ln x).$$

On peut également faire une comparaison série-intégrale,  $\ln$  étant croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$T(x) = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \ln(n)$$

et

$$n \ln(n) - n + 1 = \int_1^n \ln(t) dt \leq T(x) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln t dt = \ln(n) + n \ln(n) - n + 1.$$

On conclut comme ci-dessus puisque  $n = x + O(1)$

b) On calcule

$$2T\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sum_{1 \leq n \leq \frac{x}{2}} \Psi\left(\frac{x}{2n}\right) = 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq \frac{x}{2} \\ m \text{ pair}}} \Psi\left(\frac{x}{m}\right).$$

Ainsi, on a

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2 \sum_{\substack{1 \leq n \leq \frac{x}{2} \\ n \text{ pair}}} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ impair}}} (-1)^{n-1} \Psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

On utilise l'estimation précédente pour conclure :

$$\begin{aligned} T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n \leq x} \ln(n) - 2 \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{2} \\ n \text{ pair}}} \ln(n) \\ &= x \ln(x) - x + O(\ln x) - 2 \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \frac{x}{2} + O(\ln x) \\ &= x \ln(2) + O(\ln x) \end{aligned}$$

### Exercice 46

a) On a  $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|X_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle X_i, X_j \rangle$ . Comme les  $X_i$  sont indépendantes, et par bilinéarité du produit scalaire (même démo que  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ):

$$\mathbb{E}\left(\langle X_i, X_j \rangle\right) = \langle \mathbb{E}(X_i), \mathbb{E}(X_j) \rangle = \|\mathbb{E}(X)\|^2 = 0$$

car comme  $X \sim -X$ ,  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X)$ . On a donc  $\mathbb{E}(S_n^2) = n\mathbb{E}(X)^2$ . On a, puisque les  $X_i$  sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = x, X_{n+1} + \dots + X_{2n} = -x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = x) \mathbb{P}(X_{n+1} + \dots + X_{2n} = -x) \end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires  $(X_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  sont indépendantes et de même loi et comme les  $X_i$  sont symétriques, les  $n$ -uplets  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $(X_{n+1}, \dots, X_{2n})$  et  $(-X_{n+1}, \dots, -X_{2n})$  suivent la même loi donc  $(X_1 + \dots + X_n) \sim -(X_{n+1} + \dots + X_{2n})$ . Ainsi

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(S_n = x)^2.$$

b) Pour  $R > 0$ , on note  $B_R = \{x \in \mathbb{Z}^2, \|x\| \leq R\}$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(S_n = x)^2 &\geq \sum_{x \in B_R} \mathbb{P}(S_n = x)^2 \geq \frac{1}{|B_R|} \left( \sum_{x \in B_R} \mathbb{P}(S_n = x) \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{|B_R|} \mathbb{P}(\|S_n\| \leq R)^2 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}(\|S_n\| > R) = \mathbb{P}(\|S_n\|^2 > R^2) \leq \frac{\mathbb{E}(\|S_n\|^2)}{R^2} = \frac{n\mathbb{E}(\|X\|^2)}{R^2}$$

En prenant  $R^2 = 4n\mathbb{E}(\|X\|^2)$ , on a  $\mathbb{P}(\|S_n\| > R) \leq \frac{1}{4}$  et donc

$$\mathbb{P}(\|S_n\| \leq R) \geq \frac{3}{4}$$

On en déduit déjà que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{9}{16|B_R|}$$

Enfin, on a  $B_R \subset \llbracket -[R]; [R] \rrbracket^2$  et donc, pour  $n$  assez grand,

$$|B_R| \leq (2R+1)^2 \leq 16R^2$$

Ainsi, on en déduit que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{9}{16 \times 16R^2} = \frac{9}{1024\mathbb{E}(\|X\|^2)} \times \frac{1}{n}$$

c) Soit  $T = \inf\{n \geq 1, S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_n = 0, T = k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k, X_{k+1} + \dots + X_n = 0).$$

Or l'événement  $(T = k)$  ne dépend que des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$ , donc les événements  $(T = k)$  et  $(X_{k+1} + \dots + X_n = 0)$  sont indépendants. De plus, si  $k \leq n-1$ ,  $(X_{k+1}, \dots, X_n) \sim (X_1, \dots, X_{n-k})$ , donc

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$$

On pose

$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) t^n \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) t^n.$$

Ces séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et, par produit de Cauchy,

$$\forall t \in [0, 1[, f(t) = 1 + f(t)g(t) \quad \text{ou encore} \quad g(t) = 1 - \frac{1}{f(t)}.$$

D'après la question b),  $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$  diverge donc  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$  (les coefficients sont positifs,  $f$  est croissante sur  $[0, 1[$  et elle admet une limite finie si  $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$  converge, infinie sinon). On a alors

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = 1.$$

a) On s'inspire des relations qui paramétrisent le cercle unité (avec  $t = \tan(\theta/2)$ ) :

$$z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2}$$

Puisque  $t^2 + 1$  peut s'annuler, on note  $D := \mathbb{F}_p \setminus \{t \in \mathbb{F}_p : t^2 = -1\}$ ,  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation considérée, et on va montrer que  $S \setminus \{(-1, 0)\}$  est constitué des couples de la forme

$$(x_t, y_t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad \text{où } t \in D,$$

et que la fonction  $\varphi : t \in D \rightarrow (x_t, y_t)$  ainsi définie est injective.

- Soit d'abord  $t \in D$ . On observe alors que  $x_t$  et  $y_t$  sont bien définis et que

$$(x_t)^2 + (y_t)^2 = (1+t^2)^{-2} \left( (1-t^2)^2 + (2t)^2 \right) = (1+t^2)^{-2} (1+2t^2+t^4) = 1.$$

- si  $y_t = 0$  alors  $t = 0$  (on utilise ici l'imparité de  $p$  pour voir que 2 est inversible dans  $\mathbb{F}_p$ ), puis  $x_t = 1 \neq -1$  (à nouveau puisque 2 est inversible dans  $\mathbb{F}_p$ ). Ainsi  $(x_t, y_t) \neq (-1, 0)$ .
- Soit  $t \in D$ . Alors  $x_t + 1 = \frac{2}{1+t^2} \neq 0$  puis  $y_t = (1+x_t)t$  et  $t = \frac{y_t}{x_t+1}$ . On a donc montré l'injectivité de  $\varphi$ .
- Soit enfin  $(x, y) \in S \setminus \{(-1, 0)\}$ . Si  $x = -1$  alors  $y^2 = 1 - x^2 = 0$  donc  $y = 0$ , ce qui est interdit. Ainsi  $x \neq -1$  et on peut donc poser  $t := \frac{y}{x+1}$ . Alors

$$1+t^2 = \frac{y^2 + (x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{y^2 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}.$$

$$\text{Ainsi } y = t(x+1) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } x+1 = \frac{2}{1+t^2} \text{ puis } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

On a donc établi que  $S \setminus \{(-1, 0)\}$  est en bijection avec  $D$ . Puisque  $(-1, 0)$  est une solution, on conclut que  $\#S = \#D + 1$ . Ensuite, il y a deux cas :

- si  $-1$  est un carré dans  $\mathbb{F}_p$ , alors  $X^2 + 1$  a exactement deux racines de  $\mathbb{F}_p$  (de nouveau puisque  $-1 \neq 1$  dans  $\mathbb{F}_p$ ); ainsi  $\#D = p - 2$ ;
- sinon  $\#D = p$ .

En conclusion,  $\#S = p - 1$  si  $-1$  est un carré dans  $\mathbb{F}_p$ , et  $\#S = p + 1$  sinon.

*Remarque :* on peut montrer que  $-1$  est un carré dans  $\mathbb{F}_p$  si et seulement si  $p \equiv 1$  modulo 4 (voir d'autres exercices)

b) Pour  $z \in \mathbb{F}_p$ , notons  $S_z$  l'ensemble des solutions de l'équation  $x^2 + y^2 = z$ . Tout du long, on notera  $C := \{\alpha^2 \mid \alpha \in \mathbb{F}_p^\times\}$  l'ensemble des carrés non nuls dans  $\mathbb{F}_p$ , qui est un sous-groupe de  $\mathbb{F}_p^\times$  (image du morphisme d'élévation au carré). Nous faisons trois observations essentielles :

- pour tout  $\alpha \in \mathbb{F}_p^\times$ , la fonction  $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$  est clairement une bijection de  $S_z$  sur  $S_{\alpha^2 z}$ ;
- pour la fonction  $x \in (\mathbb{F}_p)^\times \mapsto x^2 \in \mathbb{F}_p^\times$ , tout élément  $y$  ayant un antécédent  $x$  a exactement pour antécédents  $x$  et  $-x$ , qui sont distincts; le lemme des bergers assure donc que  $\#C = \frac{p-1}{2}$ , et par suite

$$\#(\mathbb{F}_p^\times \setminus C) = (p-1) - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2};$$

- soit enfin  $z \in \mathbb{F}_p^\times \setminus C$ . Pour tout  $x \in C$  on observe que  $xz \notin C$  (sinon  $z = (xz)x^{-1}$  serait dans le sous-groupe  $C$ ). Ainsi  $x \in C \mapsto xz \in \mathbb{F}_p^\times \setminus C$  est bien définie; or elle est injective par inversibilité de  $z$ , donc bijective puisque  $\#C = \#(\mathbb{F}_p^\times \setminus C)$ .

En combinant ces points, on trouve que la fonction  $z \mapsto \#S_z$  est constante sur  $C$  et sur  $\mathbb{F}_p^\times \setminus C$ . Notons  $a$  et  $b$  ses valeurs respectives sur ces ensembles. On a vu à la question précédente que  $a = p - 1$  si  $-1 \in C$ , et  $a = p + 1$  sinon. Il reste à évaluer  $b$ .

On trouve l'égalité  $a\#C + b\#(\mathbb{F}_p^\times \setminus C) + \#S_0 = p^2$  en partitionnant  $(\mathbb{F}_p)^2$  selon la somme des carrés des composantes, donc

$$b = 2 \frac{p^2 - \#S_0}{p-1} - a.$$

On distingue maintenant deux cas, où à chaque fois on dénombre  $S_0$ .

- Supposons d'abord que  $-1 \notin C$ . Soit  $(x, y) \in S_0$ . Si  $y \neq 0$  alors  $(xy^{-1})^2 = -1$ , ce qui est interdit. Ainsi  $y = 0$  puis  $x^2 = 0 - y^2 = 0$  et donc  $x = 0$ . Réciproquement  $(0, 0) \in S_0$ . Ainsi  $\#S_0 = 1$ , et comme  $a = p - 1$  on conclut que

$$b = 2 \frac{p^2 - 1}{p-1} - (p+1) = 2(p+1) - (p+1) = p+1.$$

- Supposons enfin que  $-1 = \alpha^2$  pour un  $\alpha \in \mathbb{F}_p$ . Nécessairement  $\alpha \neq 0$ . L'équation  $x^2 + y^2 = 0$  se réécrit  $x^2 = \alpha^2 y^2$  soit  $x = \pm \alpha y$ . Ainsi  $S_0 = D_\alpha \cup D_{-\alpha}$  où l'on note  $D_t := \{(ty, y) \mid y \in \mathbb{F}_p\}$  lorsque  $t \in \mathbb{F}_p$ . Clairement  $D_t$  est en bijection avec  $\mathbb{F}_p$  (via  $y \mapsto (ty, y)$ ) pour tout  $t \in \mathbb{F}_p$ , et  $D_\alpha \cap D_{-\alpha} = \{(0, 0)\}$  car  $2\alpha \neq 0$ . Ainsi  $\#S_0 = 2p - 1$ . En conclusion

$$b = 2 \frac{p^2 - 2p + 1}{p - 1} - (p - 1) = 2(p - 1) - (p - 1) = p - 1.$$

Conclusion : quel que soit  $z \in \mathbb{F}_p^\times$ , l'équation  $x^2 + y^2 = z$  possède exactement  $p + 1$  solutions si  $-1$  n'est pas un carré modulo  $p$ , et exactement  $p - 1$  solutions sinon.

### Exercice 48

- a) Notons  $e$  l'élément neutre de  $G$  et  $E$  l'ensemble des éléments de  $G$  d'ordre 2. On a  $g \neq g^{-1}$  si et seulement si  $g^2 \neq e$  ce qui équivaut à  $g \notin \{e\} \cup E$ . Soit  $H = G \setminus (\{e\} \cup E)$ . Si  $g \in H$  alors  $g^{-1}$  est aussi dans  $H$  et  $g \neq g^{-1}$ .  $H$  peut être partitionné avec des ensembles de cardinal 2 de la forme  $\{g, g^{-1}\}$ . Donc les cardinaux de  $G$  et  $\{e\} \cup E$  ont la même parité. Comme le cardinal de  $G$  est pair, on conclut que  $E$  n'est pas vide.
- b) • Pour tout  $g \in G$ ,  $\Phi(g)$  est une bijection de  $G$  de bijection réciproque  $\Phi(g^{-1})$ . On va considérer les applications  $\Phi(g)$  comme des permutations de  $G$  (donc des éléments de  $\mathfrak{S}(G)$ ). L'application  $\Phi$  est être un morphisme de groupes de  $G$  dans le groupe des permutations  $\mathfrak{S}(G)$  (On a  $\Phi(g)\Phi(g') = \Phi(gg')$ ).
- Soit  $g$  un élément d'ordre 2 de  $G$  (existence garantie d'après la question précédente). La permutation  $\Phi(g)$  vérifie  $\Phi(g) \circ \Phi(g) = \text{Id}$ . Les orbites dans  $G$  d'une telle permutation sont évidemment de la forme  $\{x, gx\}$ . Comme les orbites partitionnent  $G$  (de cardinal  $2n$ ), on comprend qu'il y a exactement  $n$  orbites. Or on sait que  $\Phi(g)$  peut se décomposer en produit de cycles à supports disjoints et que ces derniers supports sont précisément les orbites. Autrement dit,  $\Phi(g)$  est produit de  $n$  transpositions. La signature de  $\Phi(g)$  est donc  $(-1)^n = -1$  car  $n$  est impair.
- Le morphisme de groupes  $\theta = \varepsilon \circ \Phi : G \rightarrow \{-1, 1\}$  est donc surjectif. On utilise la relation

$$|\ker(\theta)| \times |\text{Im}(\theta)| = |G|.$$

Cette formule assure que le groupe  $\ker(\theta)$  - sous-groupe de  $G$  - est de cardinal  $2n/2 = n$ .

- c) trop compliqué - voir RMS 2024/2025 - ex 278

### Exercice 49

On pose  $d := \deg P$ . On introduit les polynômes de Lagrange relatifs aux point  $0, \dots, d$ , à savoir, pour tout  $i \in \{0, \dots, d\}$ ,

$$L_i(X) := \prod_{j \neq i, 0 \leq j \leq d} \frac{X - j}{i - j}.$$

On peut écrire  $P = \sum_{i=0}^d P(i)L_i$  et donc, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ,

$$P(k) = \sum_{i=0}^d P(i)L_i(k).$$

Il suffit à présent de montrer que  $L_i(k) \in \mathbb{Z}$  pour être certain que  $\Delta$  divise  $P(k)$ . On a

$$L_i(k) = \prod_{j \neq i, 0 \leq j \leq d} \frac{k - j}{i - j} = (-1)^{d-i} \frac{1}{i!(d-i)!} \prod_{j \neq i, 0 \leq j \leq d} (k - j)$$

- Premier cas : si  $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$ , alors  $L_i(k) = 0$  ou 1.
- Deuxième cas :  $k \geq d + 1$ . Alors

$$L_i(k) = (-1)^{d-i} \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)(k-i-1)\dots(k-d)}{i!(d-i)!} = (-1)^{d-i} \binom{k}{i} \binom{k-i-1}{d-i}$$

- Troisième cas :  $k < 0$ . On pose  $l = -k$  et alors

$$L_i(k) = (-1)^{d-i} (-1)^d \frac{l(l+1)\dots(l+i-1)(l+i+1)\dots(l+d)}{i!(d-i)!} = (-1)^{d-i} \binom{l+i-1}{i} \binom{l+d}{d-i}$$

## Exercice 55

a) La fonction  $z \mapsto (1-z)^{-1/2}$  est développable en série entière au voisinage de 0 et son rayon de convergence est égal à 1. On a, pour  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < 1$ ,

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} (-z)^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{2^k k!} \prod_{i=0}^{k-1} (2i+1).$$

Or

$$\prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(2i+1)(2i+2)}{(2i+2)} = \frac{(2k)!}{2^k k!},$$

donc

$$K_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} X^k = \sum_{k=0}^n b_k X^k.$$

Il suffit ainsi de remarquer que  $|K_n(e^{i\theta})|^2 = K_n(e^{i\theta}) \overline{K_n(e^{i\theta})}$  pour pouvoir conclure :

$$|K_n(e^{i\theta})|^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n b_h b_k e^{i\theta(k-h)} = g_n + \sum_{(k,h) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2, k \neq h} b_h b_k e^{i\theta(k-h)}$$

Or, si  $k \neq h$  :

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-h)} d\theta = \left[ \frac{e^{i\theta(k-h)}}{i(k-h)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

D'où, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi g_n$$

b) Prenons  $|z| < 1$ . Alors, par produit de Cauchy,

$$\frac{f(z)}{1-z} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \left( \sum_{k=0}^n a_k \right).$$

De ce fait, pour tout  $n \geq 2, \theta \in [0, 2\pi]$  et  $0 < r < 1$  :

$$\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} e^{-in\theta} = r^n \sum_{j=0}^n a_j + \sum_{k \neq n} r^k e^{i(k-n)\theta} \left( \sum_{i=0}^k a_i \right).$$

Pour  $r \in ]0, 1[$  fixé, la série de fonction de terme général

$$u_k : \theta \mapsto r^k e^{i(k-n)\theta} \left( \sum_{i=0}^k a_i \right),$$

converge normalement sur le segment  $[0, 2\pi]$ , puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \left| \sum_{i=0}^k a_i \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^k |a_i| \right) r^k = \frac{1}{1-r} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k < +\infty.$$

On peut donc permuter série et intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} e^{-in\theta} d\theta \right| = r^n \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|.$$

Or, par produit de Cauchy et en reprenant les notations de  $\mathbf{a}$ ,

$$\frac{1}{1-z} = \left( \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right)^2 = \left( K_n(z) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^k \right)^2 = K_n(z)^2 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k z^k$$

où le rayon de convergence de  $\sum c_k z^k$  est  $\geq 1$ . On a également :

$$\frac{f(z)}{1-z} = f(z)K_n(z)^2 + \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right) \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k z^k \right) = f(z)K_n(z)^2 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} d_k z^k,$$

où le rayon de convergence de  $\sum d_k z^k$  est  $\geq 1$ . On fixe  $r \in ]0, 1[$ . On permute à nouveau série et intégrale (convergence normale sur un segment) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})K_n(re^{i\theta})^2 d\theta + \sum_{k=n+1}^{+\infty} d_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})K_n(re^{i\theta})^2 d\theta$$

On a donc, pour  $r \in ]0, 1[$ ,

$$r^n \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})K_n(re^{i\theta})^2 d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Comme  $|K_n(re^{i\theta})|^2$  est polynomiale en  $r$ , on peut faire tendre  $r$  vers 1 et obtenir le résultat souhaité.

### Exercice 56

a) On note  $F(t) = \int_0^t f(u)du$ . L'inéquation se réécrit  $F'(t) - KF(t) \leq g(t)$ . On multiplie par  $e^{-Kt}$  et intègre entre 0 et  $x$  ce qui donne

$$[F(t)e^{-Kt}]_0^x \leq \int_0^x g(u)e^{-Ku} du \text{ ou encore } F(x)e^{-Kx} \leq \int_0^x g(u)e^{-Ku} du$$

On a donc  $F(x) \leq e^{Kx} \int_0^x g(u)e^{-Ku} du$  et en revenant à l'inéquation de départ,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leq g(t) + K \int_0^t e^{K(t-u)} g(u) du$$

b) • on commence par majorer les normes de  $M$  et  $N$ . On a, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|M(t) - M(0)\| = \left\| \int_0^t A(u)M(u)du \right\| \leq \int_0^t \|A(u)M(u)\| du$$

On utilisant la relation  $\|A(u)M(u)\| \leq \|A(u)\| \|M(u)\|$  et le fait que  $\|M(0)\| = \|I_n\| = 1$ , on obtient

$$\forall t \geq 0, \|M(t)\| \leq 1 + K \int_0^t \|M(u)\| du.$$

On peut utiliser la question a) pour en déduire (avec  $f(t) = \|M(t)\|$  et  $g(t) = 1$ ),

$$\forall t \geq \|M(t)\| \leq 1 + K e^{Kt} \int_0^t e^{-Ku} du = 1 + (e^{Kt} - 1) = e^{Kt}.$$

De la même manière, on obtient que  $\|N(t)\| \leq e^{(K+\eta)t}$ .

• On revient à la question (avec le même type de majoration que a)) :

$$\begin{aligned} \|M(t) - N(t)\| &= \left\| \int_0^t A(u)M(u) - B(u)N(u)du \right\| \\ &= \left\| \int_0^t A(u)(M(u) - N(u)) - (B(u) - A(u))N(u)du \right\| \\ &\leq \eta \int_0^t \|N(u)\| du + K \int_0^t \|M(u) - N(u)\| du \end{aligned}$$

On note  $f(t) = \|M(t) - N(t)\|$  et  $g(t) = \eta \int_0^t \|N(u)\| du$ . On a

$$0 \leq g(t) \leq \eta \int_0^t e^{(K+\eta)u} du = \frac{\eta}{K+\eta} (e^{(K+\eta)t} - 1).$$

On réutilise la question a) et on obtient

$$\begin{aligned}
 \|M(t) - N(t)\| &\leq g(t) + K e^{Kt} \int_0^t g(u) e^{-Ku} du \\
 &\leq \frac{\eta}{K+\eta} (e^{(K+\eta)t} - 1) + \frac{\eta K}{K+\eta} e^{Kt} \int_0^t (e^{\eta u} - e^{-Ku}) du \\
 &= \frac{\eta}{K+\eta} e^{(K+\eta)t} - \frac{\eta}{K+\eta} + \frac{\eta K}{K+\eta} e^{Kt} \left( \frac{e^{\eta t} - 1}{\eta} + \frac{e^{-Kt} - 1}{K} \right) \\
 &= \frac{\eta}{K+\eta} e^{(K+\eta)t} - \frac{\eta}{K+\eta} + \frac{K}{K+\eta} e^{(K+\eta)t} - \frac{K}{K+\eta} e^{Kt} + \frac{\eta}{K+\eta} - \frac{\eta}{K+\eta} e^{Kt} \\
 &= \frac{K+\eta}{K+\eta} e^{(K+\eta)t} - \frac{K+\eta}{K+\eta} e^{Kt} = e^{(K+\eta)t} - e^{Kt} = e^{Kt} (e^{\eta t} - 1)
 \end{aligned}$$

### Exercice 57

On suppose que  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  sinon  $\mathcal{P}$  est un singleton. Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée adaptée à  $\text{Im } p$ . La matrice de  $p$  dans cette base est donc  $J_r$ . Soit  $\mathcal{P}'$  l'ensemble des matrices dans la base  $e$  des projecteurs orthogonaux de rang  $r$ . Soient  $\alpha > 0$  et  $\Gamma : ]-\alpha, \alpha[ \rightarrow \mathcal{P}'$  dérivable en 0 et tel que  $\Gamma(0) = J_r$ . On a, pour  $t \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $\Gamma(t) = \Gamma(t)^T$  et  $\Gamma(t)^2 = \Gamma(t)$ . En dérivant en 0, on obtient

$$(1) \Gamma'(0)\Gamma(0) + \Gamma(0)\Gamma'(0) = \Gamma'(0) \quad \text{et} \quad (2) \quad \Gamma'(0)^T = \Gamma'(0).$$

D'après (2), la matrice  $\Gamma'(0)$  est symétrique; on écrit  $\Gamma'(0) = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{S}_{n-r}(\mathbb{R})$ . La relation (1) donne :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix},$$

donc  $A = 0$  et  $C = 0$ . L'espace tangent à  $\mathcal{P}'$  en  $J_r$  est donc inclus dans

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Soit maintenant  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{tA}$  est dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  d'inverse  $e^{-tA}$ . Le chemin

$$\Gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} J_r e^{-tA}$$

est tracé sur  $\mathcal{P}'$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On a  $\Gamma(0) = J_r$  et  $\Gamma'(0) = A J_r - J_r A$ . En écrivant  $A = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2^T \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$  avec  $A_1 \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ ,  $A_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ ,  $A_3 \in \mathcal{S}_{n-r}(\mathbb{R})$ , on obtient que

$$\Gamma'(0) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & -A_2^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace tangent à  $\mathcal{P}'$  en  $J_r$  est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Il s'ensuit que l'espace tangent à  $\mathcal{P}$  en  $p$  est l'ensemble des endomorphismes symétriques  $u \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)^\perp$ .

### Exercice 58

a) Comme les  $X_i$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , on a

$$\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_m = n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 + \dots + X_m = n - k) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 + \dots + X_m = n - k).$$

Or  $X_1$  est indépendante de  $X_2 + \dots + X_m$  (lemme des coalitions) donc

$$\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X_1 = k) \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_2 + \dots + X_m = n - k)$$

Comme  $(X_n)_{n \geq 1}$  est i.i.d,

$$\mathbf{P}(X_2 + \dots + X_m = n - k) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_{m-1} = n - k),$$

cette probabilité étant égale à 0 si  $n - k < 0$ , et à 1 si  $n = k$  et  $m = 1$ . Ainsi

$$\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X_1 = k) \mathbf{P}(n - k \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbf{P}(n - k \in E).$$

b) Comme  $\mathbf{P}(n \in E) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ , le rayon de convergence de la série entière définissant  $F$  est supérieur ou égal à 1. On a, par produit de Cauchy,

$$F(z)G(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{\max(n, N)} \mu(k) \mathbf{P}(n - k \in E) \right) z^n = F(z) - \mathbf{P}(0 \in E) = F(z) - 1.$$

Ceci montre l'égalité, pour  $z \in \mathbb{D}$ .

c) Soit

$$Q = 1 - \sum_{k=1}^N \mu(k) \cdot X^k$$

On a bien sûr  $Q(1) = 0$  et  $Q'(1) = -\sum_{k=1}^N k\mu(k) \neq 0$ , donc 1 est un pôle simple de  $F$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| \leq 1$ . Alors

$$1 \leq \sum_{k=1}^N \mu(k) |z|^k \leq \left( \sum_{k=1}^N \mu(k) \right) |z| = |z|.$$

Ainsi pour que  $z$  soit racine de  $Q$ , il faut que  $z$  soit de module 1 et, d'après la condition d'égalité dans l'inégalité triangulaire,  $\mu(1)z$  doit être positivement colinéaire à 1. Le seul zéro de  $Q$  de module inférieur ou égal à 1 est 1.

d) On a

$$F(z) = \frac{1}{Q'(1)} \frac{1}{z-1} + F_0(z)$$

où  $F_0$  est une fraction rationnelle dont les pôles sont de module strictement supérieur à 1. Le rayon de convergence du développement en série entière de  $F_0$  est strictement supérieur à 1. On a donc

$$F(z) = \frac{-1}{Q'(1)} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \quad \text{avec } b_n = o(1)$$

Ainsi

$$\mathbf{P}(n \in E) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{Q'(1)} + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)} + o(1).$$

### Exercice 59

On commence par remarquer que les séries sont absolument convergentes. Si  $x \in A_\rho$ , on a  $|x| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\rho^n} = \frac{1}{\rho-1}$ . L'ensemble est borné.

On a alors le choix entre directement montrer qu'il est compact ou seulement qu'il est fermé.

Soit  $x^{(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{n,p}}{\rho^n}$  une suite de termes de  $A_\rho$ . On doit en extraire une suite convergente dans l'ensemble.

- On note  $I_1^+ = \{p \in \mathbb{N}, \varepsilon_{1,p} = +1\}$  et  $I_1^- = \{p \in \mathbb{N}, \varepsilon_{1,p} = -1\}$ . L'un des deux ensembles au moins est infini. On le note  $I_1$  et on pose  $\alpha_1 = +1$  ou  $-1$  suivant qu'on a choisi  $I_1^+$  ou  $I_1^-$ . On définit  $\varphi(1) = \min I_1$ .
- On note  $I_2^+ = \{p \in I_1, \varepsilon_{2,p} = +1\}$  et  $I_2^- = \{p \in I_1, \varepsilon_{2,p} = -1\}$ . L'un des deux ensembles au moins est infini. On le note  $I_2$ , on pose  $\alpha_2 = \pm 1$  selon le choix et  $\varphi(2) = \min I_2 \setminus \{\varphi(1)\}$ .

- On continue ainsi en construisant des parties infinies de  $\mathbb{N}$  de sorte que  $I_n \subset I_{n-1} \subset I_2 \subset I_1$ , des entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  valant  $\pm 1$  et une séquence d'entiers strictement croissante  $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(n)$  (avec  $\varphi(k) \in I_k$ ) avec, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_{\varphi(k)} =$

$$\sum_{p=1}^n \frac{\alpha_p}{\rho^p} + y_k \quad \text{avec } |y_k| \leq \sum_{p=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\rho^p} = \frac{1}{(\rho-1)\rho^k}.$$

- On note  $y = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha_p}{\rho^p}$ . On a alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $|x_{\varphi(k)} - y| \leq \frac{2}{(\rho-1)\rho^k}$ . Ainsi  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{\varphi(k)} = y \in A_\rho$ .

on peut explorer plusieurs autres idées :

- On peut essayer de montrer que si une suite d'éléments de  $A_\rho$  converge alors elle converge dans l'ensemble. La difficulté est que l'écriture  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{\rho^k}$  n'est pas unique - en fait elle l'est si  $\rho > 2$  et ne l'est pas si  $\rho \in ]1, 2]$
- Puisque  $\left| \sum_{p=k+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_p}{\rho^p} \right| \leq \frac{1}{(\rho-1)\rho^k}$ , on peut considérer les ensembles

$$A_N = \bigcup_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^N} \bar{B} \left( \sum_{p=1}^N \frac{\varepsilon_p}{\rho^p}, \frac{1}{(\rho-1)\rho^k} \right)$$

cela représente la réunion des boules fermées centrées en les début des développements de rayon suffisamment grand pour contenir toutes les sommes commençant par ces  $N$  premiers termes. On a alors  $A_\rho \subset A_N$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , de plus  $A_{N+1} \subset A_N$  et ainsi  $A_\rho \subset \bigcap_{N \geq 1} A_N$ . En tant qu'intersection de fermés, c'est un fermé. Si on prouve l'inclusion réciproque, alors on aura que  $A_\rho$  est un fermé. On trouve alors deux situations (liées notamment à la non-unicité de la décomposition) :

- si  $\rho > 2$ , on peut montrer l'inclusion réciproque, notamment grâce à l'unicité de l'écriture (et le fait que les différentes boules fermées de  $A_N$  sont deux à deux disjointes.
- dans le cas où  $\rho \in ]1, 2]$ , il est plus simple de directement montrer que  $A_\rho = [-\frac{1}{\rho-1}, \frac{1}{\rho-1}] = K$ . On a déjà une inclusion évidente. Soit  $x \in K$ .

— si  $x \geq 0$ , on pose  $\varepsilon_1 = 1$  sinon  $\varepsilon_1 = -1$  et  $x_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho}$ . Si  $x \geq 0$ , on a  $0 \leq x \leq \frac{1}{\rho-1}$  et

$$-\frac{1}{\rho} \leq x - x_1 \frac{1}{\rho-1} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho(\rho-1)}.$$

Puisque  $\frac{1}{\rho-1} \geq 1$ , on a  $|x - x_1| \leq \frac{1}{\rho(\rho-1)}$ . On a la même chose si  $x < 0$ .

— on choisit pour  $\varepsilon_2$  le signe de  $x - x_1$  (+1 si  $x = x_1$ ) et  $x_2 = x_1 + \frac{\varepsilon_2}{\rho^2}$ . On montre comme au dessus que  $|x - x_2| \leq \frac{1}{\rho^2(\rho-1)}$ .

— On poursuit ainsi et on construit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$  et  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\rho^k}$  de sorte que  $|x - x_n| \leq \frac{1}{\rho^n(\rho-1)}$ . Si une telle suite est construite, on note  $\varepsilon_{n+1}$  le signe de  $x - x_n$  (toujours avec +1 si  $x = x_n$ ). Si  $x \geq x_n$ , alors

$$-\frac{1}{\rho^{n+1}} \leq x - x_{n+1} \frac{1}{\rho^n(\rho-1)} - \frac{1}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{\rho^{n+1}(\rho-1)}.$$

et c'est similaire si  $x < x_n$ . On construit alors par récurrence cette suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de sorte que  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\rho^k}$ .

### Exercice 60

- a) Soit  $(u_n)$  la suite croissante des éléments de  $A$  (qui est infini puisque  $F(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ). On a alors  $n = F(u_n) \sim du_n$ , donc  $u_n \sim \frac{n}{d}$ . Prenons  $x > 0$ , alors  $\frac{u_{\lfloor nx \rfloor}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ , tandis que  $\frac{u_0}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $Q$  est dense dans  $\mathbb{R}^+$ .
- b) On prend  $r = \frac{a}{b}$  où  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ , et on suppose par l'absurde que  $r \notin Q$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on a  $ka \notin A$  ou  $kb \notin A$ . Ainsi

$$\begin{aligned} F(na) + F(nb) &= \sum_{j=1}^{na} 1_{j \in A} + \sum_{j=1}^{nb} 1_{j \in A} \\ &\leq n(a-1) + \sum_{k=1}^n 1_{ka \in A} + n(b-1) + \sum_{k=1}^n 1_{kb \in A} \\ &\leq n(a+b-2) + \sum_{k=1}^n (1_{ka \in A} + 1_{kb \in A}) \\ &\leq n(a+b-1) \end{aligned}$$

Or, le terme de gauche est équivalent par hypothèse à  $(a+b)n$ , ce qui est contradictoire pour  $n$  assez grand.

- c) Considérons un nombre premier  $p$  suffisamment grand pour que  $\frac{1}{p} < \varepsilon$ , et soit  $A = \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ . Alors  $\frac{1}{p} \notin Q$ , car si on pourrait trouver dans  $A$  un dénominateur multiple de  $p$ . Or  $F(n) = n - |p\mathbb{N} \cap [1, n]| = n - \lfloor n/p \rfloor$  et  $\frac{F(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p} > 1 - \varepsilon$ .

## Exercice 61

Posons

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \in [0, +\infty] \quad \text{et} \quad S' = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n^2} \in [0, +\infty]$$

Notons que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{f^{-1}(n) - \lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

donc par addition  $S < +\infty \Leftrightarrow S' < +\infty$ . Par ailleurs, par sommation par paquets (cas positif) et croissance stricte de  $f$ ,

$$S' = \sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 : k \leq f^{-1}(n)} \frac{1}{n^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{n \in \mathbb{N}^* : n \geq f(k)} \frac{1}{n^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{n=\lceil f(k) \rceil}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Pour tout  $p \geq 2$ , on a par comparaison

$$\int_p^{p+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{p^2} \leq \int_{p-1}^p \frac{dt}{t^2}$$

donc en sommant, pour tout entier  $M \geq 2$ ,

$$\frac{1}{M} \leq \sum_{n=M}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{M-1}$$

Le théorème des gendarmes pour les équivalents assure donc que

$$\sum_{n=M}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{M \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{M}$$

Puisque  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , il vient

$$\sum_{n=\lceil f(k) \rceil}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\lceil f(k) \rceil} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{f(k)}$$

Par comparaison de séries à terme général positif, on conclut que

$$S < +\infty \Leftrightarrow S' < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{f(k)} < +\infty$$

## Exercice 62

a) Soit  $r \in ]0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ . La série de fonctions  $\sum_k a_k (r e^{it})^k e^{-int}$  est normalement convergente par rapport à  $t$  sur  $[0, \pi]$ , on peut donc intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-int} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} \frac{dt}{2\pi} = a_n r^n.$$

Ensuite on fait tendre  $r$  vers  $1^-$ . Par convergence dominée, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt = a_n$$

à l'aide de la domination :  $|f(r e^{it}) e^{-int}| \leq \|f\|_\infty$ .

b) Pour  $n = 0$ , l'égalité (1) ci-dessus s'écrit  $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) dt$ . Démontrons que l'on a une relation similaire pour un cercle  $C(z, r) \subset D_0$  quelconque :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{it}) dt$$

Pour un monôme  $z^n$ , on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + r e^{it})^n dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} r^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} \frac{dt}{2\pi} = z^n.$$

On en déduit le résultat pour une série entière  $f$  quelconque par interversion série-intégrale, grâce à la convergence normale de la série entière sur le cercle  $C(z, r)$  (compact inclus dans le disque ouvert de convergence).

Comme à la question précédente, on peut par convergence dominée étendre ce résultat au cas où  $C(z, r) \subset D$  (lorsque  $r = 1 - |z|$  et que  $C(z, r)$  est intérieurement tangent au cercle unité).

Soit maintenant  $z$  un point de  $D$  où  $|f|$  atteint son maximum. Si  $z \in \mathbb{U}$ , il n'y a rien à faire. Supposons donc  $|z| < 1$  et posons  $r = 1 - |z|$ . D'après ce qui précède, on a

$$\|f\|_\infty = |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + r e^{it})| dt \leq \|f\|_\infty.$$

Il y a donc égalité et par continuité de  $|f|$  sur  $C(z, r)$ , on a  $|f(z + r e^{it})| = \|f\|_\infty$  pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ . Le cercle  $C(z, r)$  rencontre  $\mathbb{U}$  en un point, on a donc prouvé que le maximum de  $|f|$  sur  $D$  est atteint en un point de  $\mathbb{U}$ .

c) On exploite l'égalité de la question a) :

$$\sum_{n=0}^N a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \left( \sum_{n=0}^N e^{-int} \right) dt.$$

Un calcul bien connu nous donne, pour tout  $t \in ]0, 2\pi[$ ,

$$\left| \sum_{n=0}^N e^{-int} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right|$$

d'où

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt.$$

L'intégrale est la même de 0 à  $\pi$  et de  $\pi$  à  $2\pi$ ; l'inégalité  $\sin(t/2) \geq t/\pi$  si  $t \in [0, \pi]$  et le changement de variable  $u = \frac{N+1}{2}t$  donnent :

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq \|f\|_\infty \int_0^\pi \left| \sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) \right| \frac{dt}{t} = \|f\|_\infty \int_0^{(N+1)\pi/2} |\sin u| \frac{du}{u}.$$

Pour finir, en écrivant, pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\int_0^x |\sin u| \frac{du}{u} \leq 1 + \int_1^x \frac{du}{u} = 1 + \ln x$$

on aboutit à la majoration

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq \|f\|_\infty \left( 1 + \ln\left((N+1)\frac{\pi}{2}\right) \right) = \|f\|_\infty \times O(\ln N)$$

ce qui prouve le résultat demandé.

### Exercice 63

a) Par définition,  $f$  est convexe si, et seulement si pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ .

Dans un premier temps, on suppose que pour chaque  $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\phi_{u,v} : t \mapsto f(u + tv)$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  et  $t \in [0, 1]$ .

En choisissant  $u = x$  et  $v = y - x$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$ , on a  $(1-t)x + ty = u + ((1-t)a + tb)v$ , et donc :

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &= f(u + ((1-t)a + tb)v) \\ &\leq (1-t)f(u + av) + tf(u + bv) = (1-t)f(x) + tf(y). \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est bien convexe.

On suppose maintenant  $f$  convexe. Soit  $(u, v)$  un couple d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $s \in [0, 1]$ . Comme  $u + ((1-t)a + tb)v = (1-t)(u + av) + t(u + bv)$  et  $f$  est convexe, on a :

$$\begin{aligned} \phi_{u,v}((1-t)a + tb) &= f(u + ((1-t)a + tb)v) \\ &\leq (1-t)f(u + av) + tf(u + bv) = (1-t)\phi_{u,v}(a) + t\phi_{u,v}(b). \end{aligned}$$

Donc la fonction  $\phi_{u,v} : t \mapsto f(u + tv)$  est bien convexe sur  $\mathbb{R}$ .

b) On note  $e = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes; on le munit donc de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Par hypothèse, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , l'application  $t \mapsto f(x + te_i)$  est dérivable en  $x$  et :

$$f(x + te_i) - f(x) - t\partial_i f(x) = t\epsilon_j(t), \quad \text{où} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \epsilon_j(t) = 0.$$

$$\text{On introduit } u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ h = (h_1, \dots, h_n) & \rightarrow f(x + h) - f(x) - \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i. \end{cases}$$

Comme  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^n$  et  $h \mapsto \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i$  est une forme linéaire, cette application  $u$  est convexe sur  $\mathbb{R}^n$ . On en déduit que pour tout  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$u(h) = u\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} h_i n e_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(h_i n e_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u(h_i n e_i)|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour chaque  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $\alpha_j > 0$  tel que pour tout  $|t| \leq \alpha_j$ ,  $|\epsilon_j(t)| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ , i.e.  $|u(te_j)| \leq |t| \frac{\varepsilon}{n}$ . On en déduit donc que, si  $|h_j| \leq \frac{\alpha_j}{n}$  pour tout  $j$ ,

$$u(h) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |h_i| \varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|h\| \varepsilon = \|h\| \varepsilon$$

Comme  $\| -h \| = \|h\| \leq \frac{\alpha}{n}$ , on a de même  $u(-h) \leq \|h\| \varepsilon$ .

Or par convexité,

$$0 = u(0) = u\left(\frac{-h}{2} + \frac{h}{2}\right) \leq \frac{u(-h) + u(h)}{2}.$$

Ainsi finalement :

$$-\|h\| \varepsilon \leq -u(-h) \leq u(h) \leq \|h\| \varepsilon,$$

et donc  $|u(h)| \leq \varepsilon \|h\|$ . On a ainsi montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\|h\| \leq \delta \Rightarrow |u(h)| = \left| f(x + h) - f(x) - \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i \right| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Donc  $f$  est différentiable en  $x$ , de différentielle  $h \mapsto \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i$ .

#### Exercice 64

a) On a  $\mathbf{P}(X_1 = 0) \geq \mathbf{P}(X_1 = 1)$  donc  $(1 - 2p) \geq p$  et  $p \leq 1/3$ .

On a  $\mathbf{P}(X_1 + 2X_2 = 0) \geq \mathbf{P}(X_1 + 2X_2 = 1)$  donc

$$\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) \geq \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = -1, X_2 = 1)$$

ce qui donne que  $(1 - 2p)^2 \geq p^2 + p(1 - 2p)$ , donc  $p \neq 1/3$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On a, avec un argument de parité,

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n 2^{i-1} X_i = 0\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = 0, \sum_{i=2}^n 2^{i-2} X_i = 0\right) = \mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = (1-2p)^n$$

Comme  $2^k - \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n 2^{i-1} X_i = 1\right) &\geq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X_1 = -1, \dots, X_{k-1} = -1, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0) \\ &\geq \sum_{k=1}^n p^k (1-2p)^{n-k} = (1-2p)^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{p}{1-2p}\right)^k \end{aligned}$$

On a donc, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$1 \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{p}{1-2p}\right)^k = \frac{p}{1-2p} \times \frac{1 - \left(\frac{p}{1-2p}\right)^n}{1 - \frac{p}{1-2p}} = \frac{p}{1-3p} \left(1 - \left(\frac{p}{1-2p}\right)^n\right)$$

On a forcément  $\frac{p}{1-2p} < 1$  et, par passage à la limite dans l'inégalité,  $1-3p \geq p$  donc  $p \leq 1/4$ .

b) On a  $\Phi_X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) e^{ik\theta}$ . Soit  $b \in \mathbb{Z}$ . Sous réserve de justification,

$$\int_0^{2\pi} \Phi_X(\theta) e^{ib\theta} d\theta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \int_0^{2\pi} e^{i(k-b)\theta} d\theta = 2\pi \mathbf{P}(X = b)$$

La justification vient de la convergence des deux séries :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |\mathbf{P}(X = k) e^{i(k-b)\theta}| d\theta \leq 2\pi \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |\mathbf{P}(X = -k) e^{i(-k-b)\theta}| d\theta \leq 2\pi$$

c) On suppose  $p \leq 1/4$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ . Soit  $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ . Par le lemme des coalitions et l'indépendance,

$$\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{it a_i X_i}) = \prod_{k=1}^n \underbrace{(2p \cos(a_k t) + (1-2p))}_{\geq 0} \in \mathbb{R}^+$$

Si  $b \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbf{P}(X = b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_X(\theta) e^{-ib\theta} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_X(\theta) e^{-ib\theta}| d\theta = \mathbf{P}(X = 0)$$

ce qui prouve la réciproque.

### Exercice 65

a) On vérifie que  $S^2 = -I_2$  et  $S^4 = I_2$ . On a également  $T^k = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  mais également pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $A$  une matrice de  $G$

avec  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Les deux matrices  $S$  et  $T$  sont presque des matrices d'opérations élémentaires :  $TA$  correspond à l'opération  $(L_1, L_2) \rightarrow L_1 \leftarrow (L_1 + L_2, L_2)$  et  $SA$  à  $(L_1, L_2) \rightarrow (-L_2, L_1)$ . On effectue de telles opérations afin de faire diminuer strictement  $|c|$  (le coefficient en position (2, 1) lorsque  $c \neq 0$ ).

• si  $|a| < |c|$  alors  $ST$  a comme coefficient (2, 1) l'entier  $a$  avec  $|a| < |c|$ ,

• si  $|a| \geq |c|$ , on écrit la division euclidienne par  $c$  (puisque  $c \neq 0$ ):  $a = cq + r$  avec  $|r| < |c|$  et  $q \in \mathbb{Z}$ . On a alors  $T^{-q}A = \begin{pmatrix} r & \times \\ c & \times \end{pmatrix}$

et  $ST^{-q}A = \begin{pmatrix} -c & \times \\ r & \times \end{pmatrix}$ . On a bien  $|r| < |c|$ .

On procède ainsi jusqu'à avoir  $c = 0$  (nombre fini d'étapes). On est ramené à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

En multipliant à gauche par  $S^2 = -I_2$ , on se ramène à la première forme qui est la matrice  $T^m$ . On a donc écrit  $QA = T^m$  avec  $Q$  produit de matrices  $T$  et  $S$  qui donne  $A = Q^{-1}T^m$  et  $Q^{-1}$  est un produit de matrices de la forme  $S$  et  $T$  ou de leur inverse. Toute matrice de  $G$  est dans le groupe engendré par  $S$  et  $T$ . La réciproque est immédiate.

- b) Si  $\varphi$  est un tel morphisme et si  $A \in G$  est d'ordre fini  $k$  alors  $\varphi(A^k) = \varphi(I_2) = 1 = \varphi(A)^k$ . On a notamment  $\varphi(S)^4 = 1$  et  $\varphi(S)$  est dans  $\mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_{12}$ . Si  $A = \prod_{i=1}^n B_i^{k_i}$  avec  $B_i = S$  ou  $T$  et  $k_i \in \mathbb{Z}$ , alors  $\varphi(A) = \prod_{i=1}^n \varphi(B_i)^{k_i}$ . Le problème est que  $T$  est d'ordre infini. Le but est donc de trouver un autre système de générateurs, si possible à deux éléments, d'ordre un diviseur de 12.  $S$  convient, on doit changer  $T$  (on peut chercher à l'aide des opérations sur les lignes). On trouve que  $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est d'ordre 6. Puisque  $T = S^3(ST)$  on en déduit facilement les inclusions  $\langle S, T \rangle \subset \langle S, ST \rangle$  et l'inclusion réciproque. Ces deux générateurs sont d'ordre 4 et 6 donc la puissance 12 est  $I_2$ . Ainsi, pour toute  $A$  matrice de  $G$ ,  $\varphi(A)^{12} = 1$ .

### Exercice 66

On identifie les points  $A_0, \dots, A_4$  de  $\mathbb{R}^2$ , sommets du pentagone réguliers, et leurs affixes, les points de  $\mathbb{C} : \omega^0, \dots, \omega^4$ , où  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

- a) On note  $r$  la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{5}$  (dont l'écriture complexe est  $z \rightarrow \omega z$ ) et  $s$  la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (dont l'écriture complexe est  $z \rightarrow \bar{z}$ ). On vérifie immédiatement que  $r$  et  $s$  sont des éléments de  $G$ .

Soit  $f$  un élément de  $G$ . Si  $f$  est une isométrie directe, il s'agit d'une rotation du plan. Comme  $f(A_0) \in \{A_k, 0 \leq k \leq 4\}$ ,  $f$  a un angle de la forme  $\frac{2k\pi}{5}$ , pour  $0 \leq k \leq 4$ , et  $f$  est donc la rotation  $r^k$ .

Si  $f$  est une isométrie indirecte,  $s \circ f$  est encore un élément de  $G$  et est une isométrie directe, donc  $s \circ f = r^k$  pour un certain  $0 \leq k \leq 4$  et  $f = sr^k$ .

Finalement,  $G = \{r^k, 0 \leq k \leq 4\} \sqcup \{sr^k, 0 \leq k \leq 4\}$  et cette union est disjointe (puisque les éléments du premier ensemble sont des isométries directes et ceux du second des isométries indirectes). On a montré que  $r$  et  $s$  engendrent  $G$  et  $|G| = 10$ .

On considère maintenant un autre système de générateurs  $\{r, s\}$  de  $G$ , avec  $r^5 = 1$  et  $s^2 = 1$ . Ainsi l'ordre de  $r$  divise 5 et celui de  $s$  divise 2. Comme  $G$  ne peut être engendré uniquement par  $r$  ou uniquement par  $s$  (il est de cardinal 10),  $r \neq Id$  et  $s \neq Id$ . Donc  $r$  est d'ordre 5 et  $s$  d'ordre 2.

Le sous-groupe engendré par  $r$  est donc  $\{r^k, 0 \leq k \leq 4\}$  et est de cardinal 5. Ainsi  $\{sr^k, 0 \leq k \leq 4\}$  est également constitué de 5 éléments distincts. De plus ces deux ensembles sont disjoints car s'il existait  $(k, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket^2$  tel que  $r^k = sr^j$ , alors  $s = r^{k-j}$  serait d'ordre 1 ou 5, ce qui est exclu.

Finalement,  $\{r^k, 0 \leq k \leq 4\} \cup \{sr^k, 0 \leq k \leq 4\}$  est une partie de  $G$  constituée de 10 éléments. Donc

$$G = \{r^k, 0 \leq k \leq 4\} \cup \{sr^k, 0 \leq k \leq 4\}$$

- b) On considère  $G$  un groupe non cyclique de cardinal 10. Il ne contient aucun élément d'ordre 10. Les éléments du groupe peuvent donc être d'ordre 1 pour le neutre, 2 ou 5 pour les autres.

Si tous les éléments de  $G \setminus \{e_G\}$  sont d'ordre 2, on vérifie alors que le groupe  $G$  est abélien :  $(\forall (x, y) \in G^2, xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx)$ . Et on peut alors montrer que  $G$  a un cardinal de la forme  $2^n$ , par exemple en montrant qu'il s'agit d'un  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -espace vectoriel. On pouvait sinon simplement expliquer que pour tous éléments distincts  $x$  et  $y$  de  $G \setminus \{e_G\}$ ,  $H = \{e_G, x, y, xy\}$  était un sous-groupe de cardinal 4 de  $G$  ce qui est exclu.

On dispose donc d'au moins un élément  $\rho$  d'ordre 5. Soit  $\sigma \in G \setminus \{\rho^k, 0 \leq k \leq 4\}$ . On suppose par l'absurde que son ordre est 5. Pour tout  $x \in \langle \rho \rangle \cap \langle \sigma \rangle$ , si  $x \neq e_G$ , son ordre est un diviseur de 5, donc 5. Et  $x$  engendre donc  $\langle \rho \rangle$  et  $\langle \sigma \rangle$ . Donc  $\langle \sigma \rangle = \langle \rho \rangle$ , ce qui est exclu. Donc  $\sigma$  est d'ordre 2.

Comme à la question précédente, comme  $\sigma$  est d'ordre 2 et les  $\rho^j$  tous d'ordre 1 ou 5, les ensembles  $\{\rho^k, 0 \leq k \leq 4\}$  et  $\{\sigma\rho^k, 0 \leq k \leq 4\}$  sont disjoints et constitués chacun de 5 éléments distincts. On a donc finalement,

$$G = \{\rho^k, 0 \leq k \leq 4\} \sqcup \{\sigma\rho^k, 0 \leq k \leq 4\}$$

On remarque que, pour tout  $0 \leq k \leq 4$ ,  $\sigma\rho^k \in G \setminus \{\rho^k, 0 \leq k \leq 4\}$ , et on a donc montré ci-dessus qu'il était nécessairement d'ordre 2. En particulier  $(\sigma\rho)^2 = e_G$  et donc  $\sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$ .

Or dans le groupe des isométries du pentagone de la question précédente, que l'on notera ici  $D$ , on a bien  $sr s^{-1} = r^{-1}$  (car  $sr$  est une isométrie indirecte, donc une réflexion et  $(sr)^2 = Id$ ). On vérifie alors que l'application de  $G$  dans  $D$ , qui à  $\sigma^i \rho^j$ , pour  $i \in \{0, 1\}$  et  $j \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ , associe  $s^i r^j$  est un isomorphisme de groupes. Donc, si  $G$  n'est pas cyclique, il est isomorphe à  $D$ .

Si  $G$  est cyclique, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ .

## Exercice 67

Posons  $M_1 = A$  et  $M_2 = B$ . Développons :

$$(A+B)^p = \sum_{f \in \{1,2\}^p} \underbrace{M_{f(1)} M_{f(2)} \cdots M_{f(p)}}_{C_f}.$$

Par linéarité de la trace, il vient

$$\text{tr}(A+B)^p = \sum_{f \in \{1,2\}^p} \text{tr}(C_f)$$

Notons  $G$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_p$  engendré par le  $p$ -cycle  $c = (12 \cdots p)$ . Ainsi,  $G$  est d'ordre  $p$ . Nous définissons une relation  $\sim$  sur  $\{1,2\}^p$  comme suit :  $f \sim g$  si et seulement s'il existe  $\sigma \in G$  tel que  $g = f \circ \sigma$ . On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Notons que pour tout  $f \in \{1,2\}^p$ , on a par propriété de la trace :

$$\text{tr}(C_{f \circ c}) = \text{tr}(M_{f(2)} M_{f(3)} \cdots M_{f(p)} M_{f(1)}) = \text{tr}(M_{f(1)} M_{f(2)} M_{f(3)} \cdots M_{f(p)}) = \text{tr}(C_f)$$

Par récurrence, il vient  $\text{tr}(C_f) = \text{tr}(C_g)$  dès que  $f$  et  $g$  représentent deux éléments équivalents de  $\{1,2\}^p$ . En notant  $X$  l'ensemble des classes d'équivalences pour  $\sim$  et en notant, pour une telle classe  $D$ ,  $T_D$  la valeur constante (nécessairement entière) de  $f \mapsto C_f$  sur  $D$ , il vient

$$\text{tr}(A+B)^p = \sum_{D \in X} |D| T_D.$$

Nous remarquons que la classe de  $f_1 : x \mapsto 1$  est  $\{f_1\}$  et que celle de  $f_2 : x \mapsto 2$  est  $\{f_2\}$ . Soit enfin  $f \in \{1,2\}^p$  non constante. La fonction  $\sigma \in G \mapsto f \circ \sigma$  est alors injective : supposons en effet le contraire et donnons-nous  $\sigma$  et  $\tau$  distincts dans  $G$  tels que  $f \circ \sigma = f \circ \tau$ . Alors  $f \circ (\sigma \circ \tau^{-1}) = f$ . Posons  $\sigma' := \sigma \circ \tau^{-1}$  et remarquons (récurrence évidente) que  $f \circ (\sigma')^k = f$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Or  $\sigma' := \sigma \circ \tau^{-1}$  est un élément différent de l'identité du groupe  $G$ ; comme  $p$  est premier le théorème de Lagrange montre que  $\sigma'$  engendre  $G$ , et en particulier  $c = (\sigma')^k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ . Il vient  $f \circ c = f$ , donc  $f$  est constante. C'est absurde, donc  $\sigma \in G \mapsto f \circ \sigma$  est injective, et ainsi la classe d'équivalence de  $f$  est de cardinal  $p$ . L'identité précédente donne alors

$$\text{tr}((A+B)^p) \equiv \text{tr}(A^p) + \text{tr}(B^p) [p].$$

## Exercice 68

Notons  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . La matrice  $P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  étant de rang  $r$ , il existe  $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \text{GL}_p(\mathbb{K})$  tel que  $P = AJ_r B$ . L'hypothèse  $MP = PN$  s'écrit alors  $CJ_r = J_r D$  où l'on a posé  $C = A^{-1} M A$  et  $D = B N B^{-1}$ . écrivons  $C$  et  $D$  par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

où  $C_1, D_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ . La relation  $CJ_r = J_r D$  entraîne  $C_1 = D_1, C_3 = 0, D_2 = 0$ . Il en résulte  $\chi_M = \chi_C = \chi_{C_1} \chi_{C_4}$  et  $\chi_N = \chi_D = \chi_{D_1} \chi_{D_4} = \chi_{C_1} \chi_{D_4}$ . Ainsi,  $\chi_{C_1}$ , qui est de degré  $r$ , divise  $\chi_M$  et  $\chi_N$ , ce qui prouve que  $\deg(\chi_M \wedge \chi_N) \geq r$ .

## Exercice 69

- a) on cherche un vecteur de la sphère unité telle que  $\|MX\|^2 = {}^t X^t M M X = 1$ . La matrice  $A = {}^t M M$  est symétrique définie positive. Elle est diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives qu'on note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . On a  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$ . Soit toutes les valeurs propres valent 1, dans ce cas  $M$  est orthogonale et tout vecteur de la sphère unité convient. Soit  $\lambda_1 < 1$  et  $\lambda_n > 1$ . On note respectivement  $X_1$  et  $X_n$  des vecteurs propres pour ces deux valeurs propres - ils sont orthogonaux. On note  $Y = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_n$ . On a  $\|Y\|^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  et  $\|MY\|^2 = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_n \sin^2 \theta$ . Cette quantité décrit le segment  $[\lambda_1, \lambda_n]$  lorsque  $\theta$  décrit  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et il existe  $\theta$  tel que  $\|MY\| = 1$ .

- b) Soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ . On note  $e_1$  et  $f_1$  deux vecteurs unitaires tels que  $f(e_1) = f_1$  (question précédente). On complète en deux bases orthonormées  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ . La matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et

$\mathcal{C}$  est sous la forme  $T = \begin{pmatrix} 1 & X & \dots & X \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  avec  $\det N = 1$ . On a donc deux matrices orthogonales  $U$  et  $V$  telles que  $UMV = T$ .

On effectue alors une récurrence sur la taille des matrices. On écrit  $N = P \tilde{T} Q$  avec  $P$  et  $Q$  dans  $O_{n-1}(\mathbb{R})$  et  $\tilde{T}$  triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On note enfin  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P \end{pmatrix}$  - de même pour  $\tilde{Q}$ . Les matrices  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  sont orthogonales et  $UMV = \tilde{P} \tilde{T} \tilde{Q}$ . Cela permet d'obtenir la décomposition souhaitée.

c) voir question a) (peut on faire mieux? ou en trouver un d'une autre façon?).

### Exercice 70

On peut écrire  $A = C^2$  avec  $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . On a alors

$$AB = C^2B = C(CBC)C^{-1}.$$

Il suffit de montrer que  $CBC$  est diagonalisable. Mais  $CBC$  est encore antisymétrique réelle. On a donc réduit le problème à montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable, matrice que l'on note toujours  $B$ .

La matrice  $B^2 = -B^T B$  est diagonalisable, donc admet un polynôme minimal  $\mu_{B^2}$  scindé à racines simples (dans  $\mathbb{R}$ ). On a  $\mu_{B^2}(B^2) = 0$ , donc  $\mu_{B^2}(T^2)$  annule  $B$ . Il en résulte que  $\mu_B$  divise  $\mu_{B^2}(T^2)$ . Si l'on écrit

$$\mu_{B^2}(T) = \prod_k (T - \lambda_k)$$

on voit donc que  $\mu_B$  divise

$$\prod \left( T - \sqrt{\lambda_k} \right) \left( T + \sqrt{\lambda_k} \right)$$

(où  $\sqrt{\lambda_k}$  désigne une racine carrée complexe de  $\lambda_k$ ). Les divers  $\sqrt{\lambda_k}$  non nuls sont distincts. Donc  $\mu_B$  est de la forme  $T^j P$ , où  $P$  est à racines simples non nulles. On suppose sans restriction que  $j \geq 1$ .

Enfin,  $\ker B = \ker B^2$ . En effet, si  $B^2 X = 0$ ,  $X^T B^2 X = -(BX)^T (BX) = 0$ , donc  $BX = 0$ . Il en résulte aisément que  $\ker B^j = \ker B$  pour  $j \geq 1$ . Mais  $\text{Im } P(B) \subset \ker B^j = \ker B$ . Donc  $BP(B) = 0$ , et  $B$  est annulé par un polynôme à racines simples.

### Exercice 71

a) D'abord  $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(OM)$  est continue car linéaire avec espace-source de dimension finie. L'ensemble non vide  $O_n(\mathbb{R})$  est compact car :

- il est fermé dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (image réciproque de  $\{I_n\}$  par la fonction  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M M$ , continue car polynomiale);
- il est borné (inclus dans la sphère de centre 0 et de rayon  $\sqrt{n}$  pour la norme euclidienne standard sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ );
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie.

Par suite,  $O \in O_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(OM)$  possède bien un maximum  $\varphi(M)$ .

b) Nous allons constater que  $\varphi$  est lipschitzienne pour la norme infinie standard sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ce qui donnera le résultat voulu. Soit  $M, N$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $O \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors

$$\text{tr}(OM) - \text{tr}(ON) = \text{tr}(O(M - N)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} O_{i,j} (M - N)_{j,i}$$

donc

$$|\text{tr}(OM) - \text{tr}(ON)| \leq n^2 \|M - N\|_\infty \cdot \|O\|_\infty \leq n^2 \|M - N\|_\infty.$$

En effet, tout coefficient de  $O$  est dans  $[-1, 1]$  car la somme des carrés des coefficients de  $O$  sur n'importe quelle colonne vaut 1. Prenons  $O$  réalisant le maximum de  $U \in O_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(UM)$ . Alors  $\text{tr}(ON) \geq \text{tr}(OM) - n^2 \|M - N\|_\infty = \varphi(M) - n^2 \|M - N\|_\infty$  donc

$$\varphi(N) - \varphi(M) \geq -n^2 \|M - N\|_\infty.$$

Puisque  $M$  et  $N$  jouent des rôles symétriques, on a aussi  $\varphi(M) - \varphi(N) \geq -n^2 \|N - M\|_\infty$  et finalement

$$|\varphi(M) - \varphi(N)| \leq n^2 \|M - N\|_\infty$$

c) Commençons par le cas où  $M$  est diagonale à coefficients positifs. Soit  $O \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors  $\text{tr}(OM) = \sum_{k=1}^n O_{i,i} M_{i,i} \leq \sum_{k=1}^n M_{i,i} = \text{tr}(M)$ .

Passons maintenant au cas général. Soit  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Le théorème spectral fournit  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D \in D_n(\mathbb{R})$  à coefficients positifs telle que  $M = UDU^{-1}$ . Pour tout  $O \in O_n(\mathbb{R})$ , on a donc

$$\text{tr}(OM) = \text{tr}(OUDU^{-1}) = \text{tr}(\underbrace{U^{-1}OU}_{\in O_n(\mathbb{R})} D) \leq \text{tr}(D) = \text{tr}(M) = \text{tr}(I_n M).$$

Ainsi,  $\varphi(M) = \text{tr}(M)$ .

d) Soit  $O \in O_n(\mathbb{R})$  réalisant le maximum de  $\psi : U \in O_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(UM)$ . Fixons une matrice antisymétrique  $A$ . D'abord  $(e^A)^T = e^{A^T} = e^{-A}$  par retour au sommes partielles et continuité de la transposition (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). Ainsi  $(e^A)^T = e^{-A} = (e^A)^{-1}$ , ce qui montre que  $e^A$  est orthogonale. Par suite, pour tout réel  $t$ , la matrice  $e^{tA}$  est aussi orthogonale. On en déduit que  $t \in \mathbb{R} \mapsto \text{tr}((e^{tA}O)M)$  atteint un maximum en 0. Or, cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (composition de la fonction dérivable  $t \mapsto e^{tA}$  par la fonction linéaire  $B \mapsto \text{tr}(BOM)$ ) et de dérivée  $t \mapsto \text{tr}(e^{tA}AOM)$ . Sa dérivée est alors nulle en 0, si bien que  $\text{tr}(AOM) = 0$ . En fixant  $(i, j)$  dans  $\{1, \dots, n\}^2$  et en appliquant cela à  $A = E_{i,j} - E_{j,i}$ , on trouve  $(OM)_{j,i} - (OM)_{i,j} = 0$ . Ainsi  $OM$  est symétrique.

Montrons enfin que  $OM$  est à valeurs propres positives. Supposons le contraire : par le théorème spectral, on trouve alors  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$  telles que  $OM = UDU^{-1}$  et  $a_1 < 0$ . Posons alors  $\Delta := \text{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$  de taille  $n$  (évidemment orthogonale) puis  $O' := U\Delta U^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ . Remarquons alors que  $\text{tr}(O'(OM)) = \text{tr}(\Delta D) = -a_1 + a_2 + \dots + a_n > a_1 + a_2 + \dots + a_n = \text{tr}(D) = \text{tr}(OM)$ , ce qui,  $O'O$  étant orthogonale, contredit notre hypothèse initiale sur  $O$ . Ainsi,  $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

### Exercice 72

a) On note  $\overline{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$  la matrice obtenue par réduction modulo  $p$  des coefficients de  $M$ . L'application  $M \mapsto \overline{M}$  est un morphisme surjectif d'anneaux de noyau  $p \cdot \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . De plus il est clair que le polynôme caractéristique de  $\overline{M}$  est obtenu par réduction modulo  $p$  des coefficients du polynôme caractéristique de  $M$ . Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ , étudions le polynôme caractéristique de  $A^p$ .

Dans  $\mathbb{F}_p[X]$ , on a  $\chi_{\overline{A}^p}(X^p) = \det(X^p I_n - \overline{A}^p)$  or, du fait que  $p$  divise les coefficients  $\binom{p}{k}$  pour  $1 \leq k \leq p-1$ , on a  $X^p I_n - \overline{A}^p = (X I_n - \overline{A})^p$  donc  $\chi_{\overline{A}^p}(X^p) = (\chi_{\overline{A}}(X))^p$ . Ainsi, si  $\chi_A = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ , avec le petit théorème de Fermat on obtient dans  $\mathbb{F}_p[X]$

$$\begin{aligned} \chi_{\overline{A}^p}(X^p) &= (X^n + \overline{a_1} X^{n-1} + \dots + \overline{a_n})^p \\ &= X^{np} + \overline{a_1} X^{p(n-1)} + \dots + \overline{a_n}^p \\ &= X^{np} + \overline{a_1} X^{p(n-1)} + \dots + \overline{a_n}. \end{aligned}$$

Comme  $\chi_{A^p}(X) = X^n - \text{tr}(A^p) X^{n-1} + \dots$  on en déduit que  $\text{tr}(A^p)$  est congru à  $-a_1 = \text{tr}(A)$  modulo  $p$  (et plus généralement on voit que les coefficients de  $\chi_{A^p}$  sont congrus modulo  $p$  aux coefficients de même degré de  $\chi_A$ ).

b) Soit  $P = X^4 - X - 1$  le polynôme associé à la relation de récurrence  $u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice-compagnon

de  $P$ . La suite de terme général  $v_n = \text{tr}(A^n)$  vérifie la même relation de récurrence que  $(u_n)$  car  $P$  est annulateur de  $A$  et un simple calcul assure que  $v_n = u_n$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$ , donc on a pour tout  $n$ ,  $u_n = \text{tr}(A^n)$ . La première question permet de conclure.

### Exercice 78

a) On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  d'une norme d'algèbre  $\|\cdot\|$  (par exemple la norme subordonnée à  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{C}^n$ ). Considérons, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Pour tout  $R > 0$  et toute  $M \in B(0, R)$  on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|a_k M^k\| \leq |a_k| \|M\|^k \leq |a_k| R^k$$

ce qui prouve que  $\sum f_k$  converge normalement sur  $B(0, R)$  pour tout  $R > 0$ . Ainsi sa somme  $f^*$  est définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  les coordonnées de  $f_n(M)$  sont polynomiales en les coordonnées de  $M$ , donc  $f_n$  est continue. Ainsi, par convergence normale donc uniforme sur  $B(0, R)$  pour tout  $R > 0$ ,  $f^*$  est continue sur  $B(0, R)$ . Ainsi  $f^*$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

c) Soit  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $M \in \mathcal{D}_n$ , on dispose donc de  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que :

$$M = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_D P^{-1}$$

Par hypothèse, on dispose de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $f(\alpha_i) = \lambda_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$f^* \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = D.$$

Soit alors  $\sigma : A \mapsto PAP^{-1}$ ,  $\sigma$  est linéaire en dimension finie donc continue et pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma(A^n) = \sigma(A)^n$ , donc  $f^*(\sigma(A)) = \sigma(f^*(A))$ .

Ainsi, avec  $A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1} \in \mathcal{D}_n$ , on a :

$$f^*(A) = \sigma \left( f^* \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \right) \right) = \sigma(D) = M.$$

Ainsi,  $f^*$  est bien surjective de  $\mathcal{D}_n$  dans lui-même.

d) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on traite d'abord le cas où  $M$  a une seule valeur propre  $\lambda$ , ainsi  $\chi_M = (X - \lambda)^n$  et  $M = \lambda I_n + N$  où  $N$  est nilpotente. On dispose par hypothèse de  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $f(z) = \lambda$  et  $f'(z) \neq 0$ . Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a avec  $J^0 = I_n$  :

$$(zI_n + J)^k = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{k}{l} z^{k-l} J^l.$$

Ainsi :

$$f^*(zI_n + J) = \sum_{l=0}^{n-1} J^l \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{l} z^{k-l} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l)}(z)}{l!} J^l = f(z)I_n + Q(J). \quad (*)$$

Avec  $Q(X) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l)}(z)}{l!} X^l$ . Ainsi  $Q(0) = 0$  et  $Q'(0) = f'(z) \neq 0$ . La fonction  $g : x \mapsto Q(x)$  est donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $g(0) = 0$ . De plus,  $g'$  ne s'annule pas sur un voisinage de 0. Ainsi,  $g^{-1}$  est définie sur un voisinage de 0 et  $C^\infty$  sur ce voisinage, elle admet donc un développement limité à l'ordre  $n-1$  en 0 :  $g^{-1}(x) = R(x) + o(x^{n-1})$ . Alors par unicité du développement limité,  $x = g(g^{-1}(x)) = Q(R(x)) + o(x^{n-1})$ , donc  $Q(R(X)) = X + X^n T(X)$  avec  $T \in \mathbb{C}[X]$ . Ainsi, puisque  $g^{-1}(0) = 0$ ,  $X \mid R$  donc  $X^n \mid R^n$  et  $R(N)^n = 0$ , donc  $R(N)$  est nilpotente et par (\*) on a :

$$f^*(zI_n + R(N)) = \lambda I_n + Q(R(N)) = \lambda I_n + N + N^n T(N) = M.$$

Toute matrice  $M$  n'ayant qu'une seule valeur propre est donc dans l'image de  $f^*$ . Dans le cas général, par la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on peut écrire avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  :

$$M = P \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_d \end{pmatrix} P^{-1}$$

où  $M_1, \dots, M_d$  sont des matrices carrées n'ayant qu'une seule valeur propre. Elles ont donc toutes un antécédent (de leur dimension) par  $f^*$ , on les nomme  $A_1, \dots, A_d$ , alors par opération sur les matrices par bloc :

$$f^* \left( \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f^*(A_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f^*(A_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_d \end{pmatrix}$$

Alors, par la remarque sur la conjugaison, avec  $A = P \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_d \end{pmatrix} P^{-1}$ , on a bien  $f^*(A) = M$ . Ainsi,  $f^*$  est surjective.

### Exercice 80

On note  $\rho(M)$  le rayon spectral d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de  $M$ . On commence par montrer le résultat général : pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\|M\|_{\text{op}} = \sqrt{\rho(M^\top M)} = \sqrt{\rho(MM^\top)}$$

Démonstration : pour toute  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on a

$$\|M\|_{\text{op}}^2 = \max_{X \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\langle MX, MX \rangle}{\langle X, X \rangle} = \max_{X \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\langle X, M^T M X \rangle}{\langle X, X \rangle}$$

Comme  $M^T M$  est symétrique (et positive), du théorème spectral on déduit

$$\max_{X \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\langle X, M^T M X \rangle}{\langle X, X \rangle} = \rho(M^T M)$$

Par ailleurs si  $u > 0$  est une valeur propre de  $M^T M$  et si  $V$  est un vecteur propre associé alors on a  $M^T M V = uV$  donc  $(M M^T) M V = u M V$  avec  $M V \neq 0$  et donc  $u$  est aussi valeur propre de  $M M^T$ . En échangeant les rôles de  $M$  et  $M^T$  on obtient  $\rho(M^T M) = \rho(M M^T)$ .

- a) Soit  $M$  une matrice symétrique définie positive. Notons  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  respectivement sa plus petite et sa plus grande valeur propre. Le rayon spectral de  $M^T M = M^2$  est alors  $\lambda_{\max}^2$  donc  $\|M\|_{\text{op}} = \lambda_{\max}$  (qui est positif). De même,  $M^{-1}$  étant aussi symétrique définie positive de plus grande valeur propre  $\frac{1}{\lambda_{\min}}$ , on a  $\|M^{-1}\|_{\text{op}} = \frac{1}{\lambda_{\min}}$  et par suite

$$\text{cond}(M) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$$

- b) L'égalité  $\text{cond}(M) = \text{cond}(M^T)$  est conséquence immédiate du lemme. Considérons la plus grande valeur propre  $a$  de  $A = M^T M$  et  $b$  sa plus petite valeur propre. Comme  $A$  est symétrique définie positive, on a  $\rho(A) = a \geq b > 0$  et  $\rho(A^{-1}) = \frac{1}{b}$ . Ainsi, d'après le lemme, il vient

$$\|M^{-1}\|_{\text{op}} = \sqrt{\rho((M^{-1})^T M^{-1})} = \sqrt{\rho(M^{-1} (M^{-1})^T)} = b^{-1/2}$$

et

$$\text{cond}(M) = \sqrt{\frac{a}{b}} \geq 1$$

- c) La question précédente montre que, si  $\text{cond}(M) = 1$ , alors  $a = b$ . Autrement dit  $M^T M$ , qui est symétrique positive donc diagonalisable, admet une seule valeur propre  $a$ . Elle est donc scalaire :  $M^T M = aI_n$ . Autrement dit  $a^{-1/2}M$  est orthogonale. Comme la réciproque est évidente on peut énoncer que  $\text{cond}(M) = 1$  si et seulement si  $M$  est proportionnelle à une matrice orthogonale.
- d) Notons  $\lambda_{\min}^A$  et  $\lambda_{\max}^A$  (resp.  $\lambda_{\min}^B$  et  $\lambda_{\max}^B$ ) la plus grande et la plus petite valeur propre de  $A$  (resp. de  $B$ ). Soit  $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Notons que  $A + B$  est symétrique et vérifie que pour tout  $X$  non nul,  $\langle X, (A + B)X \rangle = \langle X, AX \rangle + \langle X, BX \rangle > 0$ . Ainsi  $A + B$  est définie positive, et si on note  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  sa plus petite et sa plus grande valeur propre, d'après la **a**), on a

$$\text{cond}(A + B) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Si  $X \in \mathbb{S}^{n-1}$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_{\max}$ ,

$$\lambda_{\max} = \langle X, (A + B)X \rangle = \langle X, AX \rangle + \langle X, BX \rangle \leq \lambda_{\max}^A + \lambda_{\max}^B,$$

tandis que considérer  $X \in \mathbb{S}^{n-1}$  un vecteur propre associé à  $\lambda_{\min}$  implique

$$\lambda_{\min} = \langle X, (A + B)X \rangle = \langle X, AX \rangle + \langle X, BX \rangle \geq \lambda_{\min}^A + \lambda_{\min}^B.$$

On déduit que

$$\text{cond}(A + B) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq \frac{\lambda_{\max}^A + \lambda_{\max}^B}{\lambda_{\min}^A + \lambda_{\min}^B}.$$

Quitte à renommer  $A$  et  $B$ , on suppose maintenant que  $\text{cond}(A) \geq \text{cond}(B)$ , c'est-à-dire  $\frac{\lambda_{\max}^A}{\lambda_{\min}^A} \geq \frac{\lambda_{\max}^B}{\lambda_{\min}^B}$ , ou encore  $\lambda_{\max}^A \lambda_{\min}^B - \lambda_{\min}^A \lambda_{\max}^B \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\max}^A}{\lambda_{\min}^A} - \frac{\lambda_{\max}^A + \lambda_{\max}^B}{\lambda_{\min}^A + \lambda_{\min}^B} &= \frac{\lambda_{\max}^A (\lambda_{\min}^A + \lambda_{\min}^B) - \lambda_{\min}^A (\lambda_{\max}^A + \lambda_{\max}^B)}{\lambda_{\min}^A (\lambda_{\min}^A + \lambda_{\min}^B)} \\ &= \frac{\lambda_{\max}^A \lambda_{\min}^B - \lambda_{\min}^A \lambda_{\max}^B}{\lambda_{\min}^A (\lambda_{\min}^A + \lambda_{\min}^B)} \geq 0 \end{aligned}$$

On a bien  $\text{cond}(A + B) \leq \text{cond}(A)$  avec égalité si et seulement si  $\text{cond}(A) = \text{cond}(B)$ .

## Exercice 82

- a) • La série  $\sum \frac{\sin(n)}{n}$  converge. Il s'agit d'un type classique de série dont le terme général est de la forme  $a_n b_n$  avec  $\sum a_n$  une série dont les sommes partielles sont bornées et  $(b_n)$  une suite positive décroissante qui tend vers 0. Vérifions que nous sommes bien dans cette situation avec  $a_n = \sin(n)$  et  $b_n = \frac{1}{n}$  puis montrons le résultat de convergence annoncé.

Examinons les sommes  $\sum_{k=1}^n a_k$  :

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(k) \right| = \left| \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n e^{ik} \right) \right| = \left| \operatorname{Im} \left( \frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right) \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

Donc les sommes partielles  $\sum_{k=1}^n a_k$  sont bornées. L'hypothèse de positivité, décroissance et limite nulle de  $(b_n)$  est évidente.

Montrons maintenant la convergence de la série  $\sum a_n b_n$ . On pose  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  (avec la convention  $S_0 = 0$ ). Une sommation d'Abel permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) b_k = S_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n S_k (b_k - b_{k+1}).$$

La suite  $(S_n b_{n+1})$  tend vers 0. Ensuite, la série  $\sum S_n (b_n - b_{n+1})$  s'avère absolument convergente :

$$\sum_{k=1}^n |S_k| |b_k - b_{k+1}| \leq \left( \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_k| \right) \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} \leq \left( \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_k| \right) b_1.$$

- La série  $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$  diverge. En effet, une formule de trigonométrie classique permet d'écrire :

$$\frac{\sin^2(n)}{n} = \frac{1 - \cos(2n)}{2n}.$$

Une argumentation similaire à celle employée ci-dessus montre que la série  $\sum \frac{\cos(2n)}{n}$  converge. Comme la série  $\sum \frac{1}{2n}$  diverge, on déduit par sommation, que la série  $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$  diverge.

- La série  $\sum \frac{|\sin(n)|}{n}$ . On peut minorer :  $\frac{\sin^2(n)}{n} \leq \frac{|\sin(n)|}{n}$ . Par comparaison, on déduit que la série  $\sum \frac{|\sin(n)|}{n}$  diverge.
- b) Le résultat s'appelle le théorème d'approximation de Dirichlet et est un résultat fondamental dans la théorie de l'approximation diophantienne. Notons  $\{ \cdot \}$  la fonction partie décimale définie sur  $\mathbb{R}$ . Les  $Q + 1$  nombres

$$0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Qx\}$$

appartiennent à  $[0, 1]$  et se trouvent chacun dans l'un des  $Q$  intervalles  $\left[ \frac{k}{Q}, \frac{k+1}{Q} \right[$  avec  $k \in \{0, \dots, Q-1\}$ . Il y en a donc deux distincts qui appartiennent au même intervalle. Notons  $k$  et  $k'$  les indices associés. On a donc

$$|\{kx\} - \{k'x\}| \leq \frac{1}{Q}$$

Notons  $p = [kx] - [k'x]$ . On a donc

$$|(k - k')x - p| \leq \frac{1}{Q}$$

Comme  $0 < |k - k'| < Q$ , cela répond à la question avec  $q = |k - k'|$ . On a ainsi

$$|qx - p| \leq \frac{1}{Q}$$

Pour finir, on note que  $q \leq Q$ . Donc on a obtenu l'inégalité

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Expliquons maintenant pourquoi cette construction donne une infinité de couples  $(p, q)$ . Pour cela, il faut exploiter l'irrationalité de  $x$ . Considérons l'ensemble  $E$  des couples  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels qu'il existe  $Q \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $|qx - p| \leq \frac{1}{Q}$  et  $q \leq Q$ . On a vu que tout couple  $(p, q) \in E$  donne lieu à l'inégalité voulue  $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ . Il suffit de prouver donc que  $E$  est infini. Dans le cas contraire, l'application  $(p, q) \in E \mapsto |qx - p|$  prend un nombre fini de valeurs qui sont en outre strictement positives car  $x$  est irrationnel. Il existe donc une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall (p, q) \in E \quad |qx - p| \geq c.$$

Cela est en contradiction avec la construction précédente car, pour tout  $Q \in \mathbb{N}^*$ , il existe un couple  $(p, q) \in E$  avec  $|qx - p| \leq \frac{1}{Q}$  et  $q \leq Q$ .

c) Vu la question précédente, on ne peut qu'espérer montrer la divergence car on a seulement une information sur une infinité d'entiers. Travaillons avec l'irrationalité de  $\frac{1}{\pi}$  : il existe une infinité de couples  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que

$$\left| \frac{q}{\pi} - p \right| \leq \frac{1}{q}$$

Notons au passage qu'il y a forcément une infinité de  $q$  car, dans le cas contraire, les  $q$  limites  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \left| \frac{q}{\pi} - p \right| = +\infty$  montreraient que  $\left| \frac{q}{\pi} - p \right|$  serait minoré par une constante strictement positive indépendante de  $(p, q)$ . Cela serait contradictoire. Comme la fonction sin est 1-lipschitzienne, on a aussi

$$|\sin(q)| = |\sin(q) - \sin(p\pi)| \leq \frac{\pi}{q}$$

Il s'ensuit que  $\frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{q|\sin(q)|}$  pour une infinité de nombres entiers  $q$ . Le terme général de la série considérée ne tend pas vers 0.

#### Exercice 84

On utilisera les trois inégalités classiques sur le sinus :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$  (pertinente pour les grandes valeurs de  $x$ ),  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$  (pertinente pour les petites valeurs de  $x$ ) et  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin u \geq \frac{2u}{\pi}$ , qui découle de la concavité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$f_n : x \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} \left( a_k \frac{|\sin(kx)|}{x} \right).$$

Le maximum de deux fonctions continues est continue - par exemple, grâce à la formule  $\max(g, h) = \frac{g+h+|g-h|}{2}$  - donc, par récurrence, le maximum de  $n$  fonctions continues est continue, et en particulier  $f_n$  est continue.

On procède ensuite par encadrement. Réalisons d'abord une minoration, en observant que  $f_n$  est positive :

$$\int_0^\pi f_n \geq \int_0^\pi \frac{\pi}{2(n+1)} f_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{2k}{2(k+1)} f_n \geq \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{2k}{2(k+1)} \frac{a_k |\sin(kx)|}{x} dx.$$

Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Alors par la troisième inégalité citée plus haut,

$$\forall x \in \left[ \frac{\pi}{2(k+1)}, \frac{\pi}{2k} \right], \quad \frac{a_k |\sin(kx)|}{x} \geq \frac{2ka_k}{\pi}$$

donc

$$\int_0^\pi f_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{2ka_k}{\pi} \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1}.$$

Par ailleurs, la décroissance de  $(a_k)$  permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} + \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{\geq 0} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} + a_1 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} + a_1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^\pi f_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} - a_1$$

Passons ensuite à la majoration, en fixant à nouveau un  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'abord, nous donnons deux majorations grossières de  $f_n$ . Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on trouve  $a_k \frac{|\sin(kx)|}{x} \leq \frac{a_k}{x} \leq \frac{a_1}{x}$ , et par la seconde inégalité citée,  $a_k \frac{|\sin(kx)|}{x} \leq k a_k \leq n a_n$ . Ainsi  $f_n(x) \leq \frac{a_1}{x}$  et  $f_n(x) \leq n a_n$ . On en déduit les majorations

$$\int_1^\pi f_n \leq a_1(\pi - 1) \quad \text{et} \quad \int_0^{1/(n+1)} f_n \leq \frac{n a_n}{n+1} \leq a_n \leq a_1.$$

On découpe enfin

$$\int_0^1 f_n = \int_0^{1/(n+1)} f_n + \sum_{k=1}^n \int_{1/(k+1)}^{1/k} f_n + \int_1^\pi f_n \leq \pi a_1 + \sum_{k=1}^n \int_{1/(k+1)}^{1/k} f_n$$

Fixons enfin  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , et majorons  $f_n$  sur  $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ . Soit  $x \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ . Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

- Si  $i \leq k$  alors  $\frac{a_i |\sin(ix)|}{x} \leq i a_i \leq k a_k$ .
- Si  $i > k$  alors  $\frac{a_i |\sin(ix)|}{x} \leq \frac{a_i}{x} \leq (k+1) a_k$ .

Ainsi  $f_n(x) \leq (k+1) a_k$  dans tous les cas, et on en déduit  $\int_{1/(k+1)}^{1/k} f_n \leq \frac{a_k}{k}$ . En sommant, on conclut que

$$\int_0^1 f_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} + \pi a_1.$$

Cela donne le résultat voulu, et plus précisément la différence  $\int_0^1 f_n - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$  est comprise entre  $-a_1$  et  $\pi a_1$ .

### Exercice 85

a) La réponse est oui. On note  $y(t) = P^{-1}x(t)$ , alors  $y'(t) = D(t)y(t)$ . Posons  $D(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ , où les  $\lambda_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]-\infty, -1]$  sont des fonctions continues. On obtient

$$y_i(t) = y_i(0) \exp\left(\int_0^t \lambda_i(s) ds\right)$$

d'où

$$|y_i(t)| \leq |y_i(0)| e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Par suite  $x(t) = P y(t) \rightarrow 0$  par continuité du produit matriciel.

b) La réponse est non. Voici un contre-exemple :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{3t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P(t)^{-1} \quad \text{avec} \quad P(t) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{3t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel  $x' = Ax$  s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + e^{3t} x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_2(t) \end{cases}$$

Prenons  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  par exemple, alors  $x_2(t) = e^{-2t}$  et  $x_1(t) = \text{ch}(t)$ .

### Exercice 86

a) Pour  $\mu = 0$ , l'ensemble des solutions est  $\text{Vect}(\cos, \sin)$ .

b) Notons  $y_\mu(t) = x(\omega(\mu)t, \mu) = x_0(\omega(\mu)t) + \mu x_1(\omega(\mu)t) + \varepsilon(\omega(\mu)t, \mu)$ . Or,  $y_\mu$  est solution de  $(E_\mu)$  sur  $\mathbb{R}^+$  (pour  $\mu$  au voisinage de 0). Un calcul donne

$$\begin{aligned} y'_\mu(t) &= \omega(\mu)x'_0(\omega(\mu)t) + \mu\omega(\mu)x'_1(\omega(\mu)t) + \omega(\mu)\partial_1\varepsilon(\omega(\mu)t, \mu) \\ y''_\mu(t) &= (\omega(\mu))^2 x''_0(\omega(\mu)t) + \mu(\omega(\mu))^2 x''_1(\omega(\mu)t) + (\omega(\mu))^2 \partial_1^2\varepsilon(\omega(\mu)t, \mu) \end{aligned}$$

On fixe  $t \geq 0$ . On effectue un développement limité de  $y_\mu$  et de ses dérivées (en utilisant, pour  $x_i, x'_i, x''_i$ , la formule de Taylor-Young). De plus, comme, pour  $\mu$  proche de 0,  $\omega(\mu) \in [1/2, 2]$ , on a

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad |\partial_1^k \varepsilon(\omega(\mu)t, \mu)| \leq C(\omega(\mu)t)\mu^2 \leq C(2t)\mu^2 =_{\mu \rightarrow 0} O(\mu^2)$$

Ainsi, en utilisant l'équation vérifiée par  $y_\mu$ , on obtient

$$\begin{aligned} [x''_0(t) + \mu(2\omega_1 x''_0(t) + \omega_1 t x'''_0(t) + x''_1(t))] - \mu(1 - x_0(t)^2)x'_0(t) \\ + [x_0(t) + \mu(\omega_1 t x'_0(t) + x_1(t))] = 0 + O(\mu^2) \end{aligned}$$

On analyse chaque terme du développement limité.

- Le terme constant est  $x''_0(t) + x_0(t)$ . Par unicité du développement limité, ce terme est nul, et ceci est valable pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi, pour certains réels  $\lambda$  et  $\theta$ , on a  $\forall t \in \mathbb{R}, x_0(t) = \lambda \cos(t) + \theta \sin(t)$ .
- Le coefficient devant  $\mu$  est

$$2\omega_1 x''_0(t) + \omega_1 t x'''_0(t) + x''_1(t) - (1 - x_0(t)^2)x'_0(t) + x'_0(t)\omega_1 t + x_1(t)$$

ce qui vaut  $2\omega_1 x''_0(t) + x''_1(t) - (1 - x_0(t)^2)x'_0(t) + x_1(t)$  car  $x'''_0 + x'_0 = 0$ . Ceci est nul pour tout  $t \geq 0$ , donc

$$\forall t \geq 0, x''_1(t) + x_1(t) = g(t) \text{ où } g(t) = -2\omega_1 x''_0(t) + (1 - x_0(t)^2)x'_0(t).$$

On remarque notamment que  $g$  est  $2\pi$ -périodique.

On résout ensuite l'équation par variation de constantes, ce qui donne après calculs, pour certaines constantes  $\gamma$  et  $\zeta$  :

$$\forall t \geq 0, x_1(t) = \gamma \cos(t) + \zeta \sin(t) + \underbrace{\sin(t) \int_0^t g(x) \cos(x) dx - \cos(t) \int_0^t g(x) \sin(x) dx}_{=z(t)}$$

Or, puisque  $x_1$  est bornée  $z$  l'est aussi. Mais, si  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $z(2k\pi) = -k \int_0^{2\pi} g(x) \sin(x) dx$  donc  $\int_0^{2\pi} g(x) \sin(x) dx = 0$ .

De même,  $z(\pi/2 + 2k\pi) = \text{cste} + k \int_0^{2\pi} g(x) \cos(x) dx$ , donc  $\int_0^{2\pi} g(x) \cos(x) dx = 0$ .

On obtient alors, en exploitant l'expression de  $x_0$  et celle de  $g$  en fonction de  $\lambda, \theta$  et  $\omega_1$ , l'une des deux conclusions suivantes :

- ou bien  $\lambda = \theta = 0$ , i.e.  $x_0 = 0$  et donc  $g = 0$ ; on ne trouve alors aucune condition particulière sur  $\omega_1$ ;
- ou bien  $\omega_1 = 0$  et  $\lambda^2 + \theta^2 = 4$ .

### Exercice 87

- on détermine  $c$  :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = 1 + \frac{2}{e-1} = \frac{e+1}{e-1}$$

Le seul  $c$  tel que la formule définisse une distribution de probabilité est  $c = \frac{e-1}{e+1}$ .

- Concernant le rayon, la suite  $(X_n)$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , elle ne tend vers 0 que si l'événement  $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{\forall n \geq N, X_n = 0\}$  est vérifié. Or, à  $N$  fixé, la probabilité de cet événement est égale, par continuité décroissante, à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{n-N} = 0$ . Donc chaque événement est négligeable; la réunion l'est aussi. Ainsi  $\mathbb{P}(X_n \rightarrow 0) = 0$  et, presque sûrement, le rayon est inférieur ou égal à 1.

Pour montrer que presque sûrement le rayon vaut 1, on va utiliser le lemme de Borel-Cantelli (si  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge alors la probabilité qu'une infinité de ces événements se réalisent simultanément est nulle). On a

$$\mathbb{P}(|X_n| > n) = 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k} = \mathcal{O}(e^{-n})$$

donc  $\sum \mathbb{P}(|X_n| > n)$  converge. Ainsi, presque sûrement, il existe  $N(\omega)$  tel que pour  $n \geq N(\omega)$  on a  $|X_n(\omega)| \leq n$ . Par comparaison, le rayon de la série aléatoire est presque sûrement égal à 1.

## Exercice 88

Fixons  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $S$  une partie non vide de  $\mathbb{U}_n$ . On considère  $p$  variables aléatoires indépendantes  $z_1, \dots, z_p$  uniformément distribuées dans  $\mathbb{U}_n$ . Pour tout  $w \in \mathbb{U}_n$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $A_k(w)$  l'évènement :  $w \in z_k S$ . L'évènement  $A_k(w)$  est satisfait si et seulement si  $z_k \in wS^{-1}$ , où  $S^{-1}$  est l'ensemble des inverses d'éléments de  $S$ . Ainsi, pour tout  $w \in \mathbb{U}_n$ , les évènements  $A_1(w), \dots, A_p(w)$  sont indépendants et de même probabilité  $\frac{|wS^{-1}|}{n} = \frac{|S|}{n}$ . On en déduit que, pour tout  $w \in \mathbb{U}_n$ , l'évènement  $A(w) = \bigcup_{k=1}^p A_k(w)$  a probabilité  $1 - \left(1 - \frac{|S|}{n}\right)^p$ . Notons  $N$  le cardinal de  $\bigcup_{k=1}^p z_k S$ . Comme  $N = \sum_{w \in \mathbb{U}_n} \mathbf{1}_{A(w)}$ , on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{w \in \mathbb{U}_n} \mathbb{P}(A(w)) = n - n \left(1 - \frac{|S|}{n}\right)^p.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(N) \geq \frac{n}{2} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{|S|}{n}\right)^p \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow p \geq \frac{\ln 2}{-\ln\left(1 - \frac{|S|}{n}\right)}.$$

En particulier, si  $p$  vérifie cette inégalité, on peut trouver  $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{U}_n$  tels que  $\left|\bigcup_{k=1}^p z_k S\right| \geq \frac{n}{2}$ .

Or, par inégalité de convexité,  $-\ln\left(1 - \frac{|S|}{n}\right) \geq \frac{|S|}{n}$  et donc  $\frac{\ln 2}{-\ln\left(1 - \frac{|S|}{n}\right)} \leq \frac{n \ln 2}{|S|}$ . On pose finalement  $c = \ln 2 + 1$ . Alors,  $\frac{cn}{|S|} \geq \frac{n \ln 2}{|S|} + 1$

et donc  $\left\lfloor \frac{cn}{|S|} \right\rfloor \geq \frac{n \ln 2}{|S|}$ . Pour cette valeur de  $c$ , l'entier  $p = \left\lfloor \frac{cn}{|S|} \right\rfloor$  vérifie donc à la fois  $p \leq \frac{cn}{|S|}$  et  $p \geq \frac{\ln 2}{-\ln\left(1 - \frac{|S|}{n}\right)}$ . Cette valeur de  $c$

convient donc.

## Exercice 90

a) L'appartenance d'une matrice  $A$  à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  signifie qu'il existe une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  telle que  $(A - \lambda I_n)A = 0$ , i.e.  $A^2 = \lambda A$ . Cette condition est évidemment invariante par similitude.

b) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  tel que  $A^2 = \lambda A$ .

- si  $\lambda = 0$ , la matrice  $A$  est nilpotente, d'indice  $\leq 2$ . Dans ce cas on a  $\text{tr}(A) = 0$ .
- si  $\lambda \neq 0$ ,  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$  ou  $\{\lambda, 0\}$ ; dans ce cas  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $r = \text{rg}(A) > 0$  (car  $\lambda$  doit être une valeur propre de  $A$ ). On a dans ce cas  $\text{tr}(A) = \lambda \text{rg}(A) \neq 0$ .

Soit maintenant  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  de même rang et de même trace.

Si leur trace est non nulle, alors elles sont toutes deux diagonalisables, avec une unique valeur propre non nulle  $\lambda$  qui est la même pour  $A$  et  $B$ , à savoir

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A)}{\text{rg}(A)} = \frac{\text{tr}(B)}{\text{rg}(B)};$$

comme elles ont le même rang,  $A$  et  $B$  sont semblables à la même matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda I_r, 0)$ . Si  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$ , alors on a  $A^2 = B^2 = 0$ . Soit  $r = \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ , alors  $A$  et  $B$  sont semblables à  $N_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . C'est une propriété classique

des matrices nilpotentes d'indice  $\leq 2$ . On se donne une base  $(e_1, \dots, e_r)$  d'un supplémentaire  $F$  de  $\ker A$ , alors  $(Ae_1, \dots, Ae_r)$  est une base de  $\text{Im } A$ ; comme  $\text{Im } A \subset \ker A$ , on peut compléter en une base  $(Ae_1, \dots, Ae_r, f_1, \dots, f_p)$  de  $\text{Ker } A$ , alors la famille  $(Ae_1, \dots, Ae_r, f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus F$  et la matrice dans cette base de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est bien  $N_r$ . Dans tous les cas, les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables. La réciproque est évidente.

c) L'ensemble  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est étoilé par rapport à 0, donc connexe par arcs.

Montrons que  $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs. Cet ensemble contient les matrices  $I_n$  et  $E_{11} = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ . Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$  tel que  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma(1) = E_{11}$ . Considérons

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \text{ est une homothétie}\}.$$

L'ensemble des homothéties est fermé dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donc  $\gamma(t_0)$  est une homothétie  $\lambda_0 I_n$ . On a  $t_0 < 1$  car  $E_{11}$  n'est pas une homothétie, et  $\lambda_0 \neq 0$  car la matrice nulle n'est pas dans  $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$ . On a alors  $\det(\gamma(t_0)) \neq 0$ , et par continuité de  $\det \circ \gamma$ ,  $\gamma(t)$  est inversible pour tout  $t$  proche de  $t_0$ . Or  $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des homothéties non nulles, donc il existe  $t > t_0$  tel que  $\gamma(t)$  soit une homothétie. Ceci contredit la définition de  $t_0$ . d) D'après les raisonnements effectués à la question **b**), toute matrice de  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est semblable à l'une des matrices suivantes de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

$$0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda I_2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Ces matrices appartiennent bien à  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ , donc les classes de similitudes incluses dans  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  sont précisément les classes de ces matrices.

### Exercice 91

On note  $S_n = a_1 z_1^n + \dots + a_m z_m^n$ . Alors on a la relation

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad S_{n+i} = a_1 z_1^{n+i} + \dots + a_m z_m^{n+i}.$$

Ceci se réécrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} S_n \\ S_{n+1} \\ \vdots \\ S_{n+m-1} \end{pmatrix} = V_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

où

$$V_n = \left( z_j^{n+i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq m} = V(z_1, \dots, z_m) \text{diag}(z_1^n, \dots, z_m^n)$$

avec  $V(z_1, \dots, z_m) = \left( z_j^{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ , la matrice de Vandermonde. Comme les  $z_i$  sont distincts,  $V(z_1, \dots, z_m)$  est inversible et donc on en déduit que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \underbrace{\text{diag}(z_1^{-n}, \dots, z_m^{-n}) V(z_1, \dots, z_m)^{-1}}_{\text{borné car } |z_i|=1} \begin{pmatrix} S_n \\ \vdots \\ S_{n+m-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car on a  $S_{n+i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi, on a bien  $a_1 = \dots = a_m = 0$ .

### Exercice 92

a) On pose

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; x \geq 2, y \geq 1, x^y \leq n\}$$

On a, d'une part,

$$|A| = \sum_{x=2}^n |\{y \geq 1, x^y \leq n\}| = \sum_{x=2}^n \lfloor \log_x(n) \rfloor$$

d'autre part,

$$|A| = \sum_{y=1}^n |\{x \geq 2, x^y \leq n\}| = \sum_{y=2}^n (\lfloor \sqrt[y]{n} \rfloor - 1) = \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor - n + \sum_{y=2}^n \lfloor \sqrt[y]{n} \rfloor$$

d'où l'égalité :

$$\sum_{x=2}^n \lfloor \log_x(n) \rfloor = \sum_{y=2}^n \lfloor \sqrt[y]{n} \rfloor$$

b) Soit  $n \geq 2$ . On a

$$S_n = \sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor = \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \rfloor} \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor + \sum_{\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \rfloor + 1}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor.$$

Pour  $j > \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ ,  $1 \leq \sqrt[j]{n} = \exp\left(\frac{\ln n}{j}\right) < e^2 = 2$ , donc

$$S_n = \sum_{j=2}^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \right\rfloor} \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor + \left( n - \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \right\rfloor \right)$$

De plus

$$\sum_{j=2}^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \right\rfloor} \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor \leq \left( \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \right\rfloor - 1 \right) \sqrt{n} = O(\sqrt{n} \ln n)$$

Finalement

$$S_n = n + O(\sqrt{n} \ln(n)) \quad \text{et} \quad S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

#### Exercice 94

On remarque que le terme  $\left\lfloor \frac{\ln k}{\ln 2} \right\rfloor$  est constant égal à  $n$  sur l'intervalle  $k \in [2^n, 2^{n+1} - 1]$ ; cela nous invite à écrire la somme suivante

$$S_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln 2} \right\rfloor = n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}$$

Introduisons les sommes harmoniques  $H_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}$  et posons

$$v_n = H_{2^{n-1}} - H_{2^{n-1}-1} = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k}$$

On obtient l'expression suivante pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} S_n &= n \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = n \left( \frac{1}{2} v_n - \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2k} \right) \\ &= n(v_n - v_{n+1}) \end{aligned}$$

On sait que  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ . Or on va avoir besoin d'un développement plus précis. On pose  $w_n = H_n - \ln n$ , on a

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

On en déduit la convergence de la série  $\sum (w_{n+1} - w_n)$ , autrement dit de la suite  $(w_n)$  vers une limite notée  $\gamma \in \mathbb{R}$ , puis une estimation des restes :

$$\gamma - w_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On aboutit au développement asymptotique

$$H_n = \ln n + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut maintenant sommer les  $S_n$  :

$$\sum_{n=1}^N S_n = \sum_{n=1}^N n(v_n - v_{n+1}) = \sum_{n=1}^N n v_n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)v_n = \sum_{n=1}^N v_n - N v_{N+1}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^N S_n = (H_{2^N-1} - H_0) - N v_{N+1} = (N+1)H_{2^N-1} - N H_{2^{N+1}-1}$$

Or

$$H_{2^N-1} = H_{2^N} + O\left(\frac{1}{2^N}\right) = N \ln 2 + \gamma + O\left(\frac{1}{2^N}\right)$$

Il vient

$$\sum_{n=1}^N S_n = \gamma + o(1)$$

On en déduit la convergence et la somme de la série initiale. Soit  $M$  un entier  $\geq 2$ . Il existe un unique entier  $N$  tel que  $2^N \leq M < 2^{N+1}$  (à savoir  $M = \lfloor \ln M / \ln 2 \rfloor$ ) et on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln 2} \right\rfloor &= \sum_{p=1}^{N-1} S_p + \sum_{k=2^N}^M \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln 2} \right\rfloor \\ &= \left( \gamma + o(1) + N \sum_{k=2^N}^M \frac{(-1)^k}{k} \right) \end{aligned}$$

Par le critère des séries alternées, on sait que

$$N \left| \sum_{k=2^N}^M \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{N}{2^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve finalement la convergence de la série et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln 2} \right\rfloor = \gamma$$

### Exercice 95

D'après le critère spécial des séries alternées, la série définissant  $g(x)$  converge pour tout  $x > 0$ . On a

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (f(2kx) - f((2k+1)x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t) dt$$

Intuitivement, quand  $x \rightarrow 0^+$ , on a

$$\int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t) dt \approx \frac{1}{2} \int_{2kx}^{(2k+2)x} f'(t) dt$$

(car on intègre sur la moitié de l'intervalle et  $f'$  est sensiblement constante sur celui-ci). Ceci suggère que

$$g(x) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t) dt = \frac{1}{2} f(0)$$

Justifions tout cela :

$$\begin{aligned} g(x) - \frac{1}{2} f(0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t) dt - \frac{1}{2} \int_{2kx}^{(2k+2)x} f'(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t) dt - \int_{(2k+1)x}^{(2k+2)x} f'(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \int_{2kx}^{(2k+1)x} (f'(t) - f'(t+x)) dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| g(x) - \frac{1}{2} f(0) \right| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \int_{2kx}^{(2k+1)x} |f'(t+x) - f'(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \int_{2kx}^{(2k+2)x} |f'(t+x) - f'(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |f'(t+x) - f'(t)| dt \end{aligned}$$

Démontrer que ce majorant tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow 0$  revient à prouver la continuité des translations dans  $L^1$ . Donnons un argument dans ce cadre. Soit  $\varepsilon > 0$ . On fixe  $A > 0$  assez grand pour que

$$\int_A^{+\infty} |f'(t)| dt = \int_A^{+\infty} (-f'(t)) dt = f(A) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit  $x > 0$ . On en déduit que

$$\int_A^{+\infty} |f'(t+x) - f'(t)| dt \leq \int_{A+x}^{+\infty} |f'(t)| dt + \int_A^{+\infty} |f'(t)| dt \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

Comme  $f'$  est continue sur le segment  $[0, A+1]$ , elle y est uniformément continue. Il existe donc  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que

$$\forall (x, t) \in [0, A] \times ]0, \alpha], \quad |f'(t+x) - f'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3A}$$

d'où, si  $0 < x \leq \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \left| g(x) - \frac{1}{2}f(0) \right| &= \int_0^A |f'(t+x) - f'(t)| dt + \int_A^{+\infty} |f'(t+x) - f'(t)| dt \\ &\leq \int_0^A \frac{\varepsilon}{3A} dt + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

### Exercice 96

a) On a  $\alpha_k(t) = \langle A_k(t)u_k(t), u_k(t) \rangle$  donc

$$\begin{aligned} \alpha_k'(t) &= \langle A_k'(t)u_k(t) + A_k(t)u_k'(t), u_k(t) \rangle + \langle A_k(t)u_k(t), u_k'(t) \rangle \\ &= \langle A_k'(t)u_k(t), u_k(t) \rangle \end{aligned}$$

puisque  $\langle A_k(t)u_k'(t), u_k(t) \rangle = \langle u_k'(t), A_k(t)u_k(t) \rangle = \langle u_k'(t), \lambda_k(t)u_k(t) \rangle = 0$  on obtient bien sûr  $\langle u_k'(t), u_k(t) \rangle = 0$  en dérivant  $\|u_k(t)\|^2 = 1$ . En dérivant une seconde fois, et en notant que  $A'(t)$  est aussi symétrique :

$$\begin{aligned} \alpha_k''(t) &= \langle A_k''(t)u_k(t) + A_k'(t)u_k'(t), u_k(t) \rangle + \langle A_k'(t)u_k(t), u_k'(t) \rangle \\ &= \langle A_k''(t)u_k(t) + 2A_k'(t)u_k'(t), u_k(t) \rangle. \end{aligned}$$

b) L'ensemble  $\mathcal{P}$  des polynômes  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  admettant  $n$  racines réelles est un ouvert de  $\mathbb{R}_n[X]$  car si  $P \in \mathcal{P}$  admet les racines  $x_1 < \dots < x_n$ , alors en choisissant  $y_0, \dots, y_n$  tels que  $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n$ , tout  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  suffisamment proche de  $P$  vérifie  $Q(y_i)Q(y_{i+1}) < 0$  donc appartient à  $\mathcal{P}$ . En outre, l'application  $\chi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ , qui à une matrice associe son polynôme caractéristique, est continue. Donc  $\mathcal{D} = \chi^{-1}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

c) Puisque  $\mathcal{D}$  est ouvert, on a  $A + tH \in \mathcal{D}$  pour  $t$  assez petit. En posant  $B(t) = A + tH$  (on s'évite un risque d'erreur en évitant de noter  $A(t)$  cette application...) et  $\beta_k(t) = \lambda_k(B(t))$  comme ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \beta_k''(t) &= \langle B_k''(t)u_k(t) + 2B_k'(t)u_k'(t), u_k(t) \rangle \\ &= 2 \langle H u_k'(t), u_k(t) \rangle \end{aligned}$$

### Exercice 97

On pose  $Y = (y_1 \ \dots \ y_n)^T$ . Alors  $Y$  est solution du système  $(*) : X' = AX$ . L'espace des solutions de  $(*)$  est  $\{t \mapsto e^{tA}X_0, X_0 \in \mathbb{R}^n\}$ . Soit  $F$  l'ensemble des  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  tels que  $e^{tA}X_0 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ . Alors  $F$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  stable par  $X \mapsto e^{tA}X$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Il contient donc  $(y_1(t) \ \dots \ y_n(t))^T$  pour tout réel  $t \geq 0$ .

On observe facilement en trigonalisant  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  que  $\det(e^{tA}) = \exp(\operatorname{tr}(A)t)$ . Ainsi  $\det(e^{tA}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  ne peuvent être tous dans  $F$ , donc  $F$  est un sous-espace strict, inclus dans un hyperplan d'équation  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ . On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_1y_1(t) + \dots + a_ny_n(t) = 0$$

et la famille  $(y_1, \dots, y_n)$  est liée.

### Exercice 98

- a) Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . On considère la fonction d'une variable réelle  $\varphi : t \mapsto f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$ . Elle est convexe (comme composée d'une fonction convexe et d'une fonction affine) et dérivable car  $f$  est différentiable. On a donc  $\varphi'$  croissante. Or,  $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle$ . En écrivant  $\varphi'(1) \geq \varphi'(0)$ , on obtient  $\langle \nabla f(y), y-x \rangle \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle$ , ce qui donne bien  $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$ .
- b) On conserve les mêmes notations qu'à la question précédente. Comme  $\nabla f$  est lipschitzienne, donc continue,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ; ainsi  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'hypothèse :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(x), y-x \rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y-x \rangle dt \\ &\leq \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \int_0^1 \|\nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x)\| \|y-x\| dt \\ &\leq \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \int_0^1 Lt \|y-x\|^2 dt \\ &= \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{L}{2} \|y-x\|^2 \end{aligned}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé. On considère  $g : y \mapsto f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle$ . Comme  $\phi$  est convexe,  $\phi(1) \geq \phi(0) + (1-0)\phi'(0)$ , ce qui se traduit par  $g(y) \geq 0 = g(x)$ . Par ailleurs,  $g$  est encore  $\mathcal{C}^1$  et convexe, en tant que somme de  $f$  et d'une fonction affine. Pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla g(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ . En appliquant l'inégalité obtenue ci-dessus (avec  $g$  qui vérifie les mêmes hypothèses) : pour tout  $(y, y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

$$0 = g(x) \leq g(y') \leq g(y) + \langle \nabla g(y), y' - y \rangle + \frac{L}{2} \|y' - y\|^2$$

En particulier pour  $y' = y - \frac{1}{L} \nabla g(y)$ ,

$$0 \leq g(y) - \frac{1}{2L} \|\nabla g(y)\|^2$$

Cela se traduit par :

$$\frac{1}{2L} \|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2 \leq f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle$$

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$  on obtient :

$$\frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x-y \rangle$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient l'inégalité souhaitée.

### Exercice 99

- a) On considère  $M$  un idéal maximal et  $a \notin M$ . Comme  $A$  est commutatif,  $M + aA$  est un idéal qui contient strictement  $M$ ; on en déduit que  $M + aA = A$ . On dispose donc de  $x \in M$  et  $u \in A$  tels que  $1 = x + au$ . Réciproquement, on suppose que, pour tout  $a \notin M$ , il existe  $x \in M$  et  $u \in A$  tels que  $1 = x + u \times a$ . Soit  $I$  un idéal de  $A$  contenant strictement  $M$ . On prend  $a \in I \setminus M$  et on introduit  $x \in M$  et  $u \in A$  tel que  $1 = x + ua$ . On en déduit que  $1 \in I$  et donc  $I = A$ .
- b) On suppose que  $f(M) \neq B$ . On considère un  $b \in B \setminus f(M)$ . Par surjectivité, on peut introduire  $a \in A$  tel que  $b = f(a)$  et par hypothèse,  $a \notin M$ . Par maximalité de  $M$  et la question précédente, on dispose de  $x \in M$  et  $u \in A$  tels que  $1 = x + ua$ . Ainsi, par propriété de morphismes,

$$f(1) = 1 = f(x) + f(u)f(a) = f(x) + f(u)b$$

avec  $f(x) \in f(M)$ . Ceci étant vrai pour tout  $b \in B \setminus f(M)$ , d'après la première question,  $f(M)$  est un idéal maximal de  $B$ .

- c) Comme  $\mathbb{K}$  est un corps,  $\mathbb{K}[X]$  est principal. Tout idéal de  $\mathbb{K}[X]$  est donc de la forme  $(P) = P\mathbb{K}[X]$ . On vérifie que les idéaux maximaux de  $\mathbb{K}[X]$  sont de la forme  $(P)$  où  $P$  est irréductible. On suppose dans un premier temps  $P$  irréductible. Comme  $P$  est irréductible, pour tout  $A \in \mathbb{K}[X] \setminus (P)$ ,  $A$  et  $P$  sont premiers entre eux; on dispose donc de  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que  $PU + AV = 1$ , avec  $PU \in (P)$ . La première question permet de conclure que l'idéal  $(P)$  est maximal. Réciproquement, si  $P$  est réductible, on écrit  $P = QR$  avec  $1 \leq \deg(Q) < \deg(P)$ . Ainsi l'idéal  $(P) \subsetneq (Q) \subsetneq \mathbb{K}[X]$ . L'idéal  $(P)$  n'est donc pas maximal.

- d) Soit  $M$  un idéal maximal de  $\mathbb{Z}[X]$  tel que  $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$ . On rappelle que  $\mathbb{Z}[X]$  n'est pas principal. En effet  $(2, X)$  n'est pas mono-gène : si  $P$  était un générateur, alors on pourrait écrire  $2 = PQ$ , donc  $P \in \mathbb{Z}$ , de même on aurait  $X = PR$  et donc  $P = \pm 1$ , donc  $1 \in (2, X)$ . Ce qui donnerait  $1 = 2A + BX$ , ce qui n'est pas possible dans  $\mathbb{Z}[X]$  (en évaluant par exemple en 0).
- i) On vérifie directement que  $M \cap \mathbb{Z}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc de la forme  $n\mathbb{Z}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n$  n'est pas premier, on écrit  $n = ab$ , avec  $b$  et  $a$  des entiers strictement inférieurs à  $n$ , donc n'appartenant pas à  $M \cap \mathbb{Z}$ . Par maximalité de  $M$ , on dispose de  $P \in M$  et  $Q \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $1 = P + aQ$ . Donc  $b = bP + nQ \in M$  (puisque  $P$  et  $n$  sont dans  $M$ ), contradiction.
- ii) Ainsi,  $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$  pour un certain nombre premier. On considère la projection usuelle  $\pi : \mathbb{Z}[X] \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ ; il s'agit d'un morphisme d'anneaux surjectif et  $M' = \pi(M)$  est un idéal maximal. En effet, si on avait  $M' = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ , alors  $\bar{1} \in M'$ , et il existerait donc un polynôme  $P$  tel que  $1 + pP \in M$ . Comme  $p \in M$ , alors  $1 \in M$  et  $M = \mathbb{Z}[X]$  ce qui est exclu. Comme  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps, on en déduit que  $M'$  est engendré par un polynôme irréductible  $\bar{Q} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ , avec  $Q \in \mathbb{Z}[X]$ . On en déduit finalement que  $\overline{M} = (p) + (Q)$ , avec  $p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X]$ , premier dans  $\mathbb{Z}$ , donc irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$ , et  $Q$  irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$  (puisque  $\bar{Q}$  est irréductible dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$  : si  $Q = AB$  alors  $\bar{Q} = \overline{AB}$ ).

**Exercice 100**

- a) Factorisons  $P = c \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ . Notons que l'inégalité voulue est triviale si  $x$  est l'une des racines  $x_k$ . Dans le cas contraire, on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} \quad \text{et} \quad \frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = \left( \frac{P'}{P} \right)'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{(x - x_k)^2}$$

L'inégalité demandée équivaut à  $P'(x)^2 \leq n(P'(x)^2 - P(x)P''(x))$  ou encore, après division par  $P(x)^2$ , à

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - x_k)^2}$$

C'est évidemment l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On pouvait également rédiger ce qui précède en faisant intervenir les multiplicités des racines  $x_k$  de  $P$  dans la décomposition de  $\frac{P'}{P}$  en éléments simples.

- b) Vu l'énoncé précédent, on va tester un polynôme qui n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ . Le plus simple est évidemment  $P = X^2 + 1$ . On a alors l'équivalence

$$2(x^2 + 1) \times 2 \leq (2x)^2 \iff 4 \leq 0$$

L'inégalité n'est vérifiée pour aucun  $x$ .

Montrons maintenant, pour  $n > 2$ , que le polynôme  $P = X^n - 1$  non scindé vérifie l'inégalité voulue. On doit étudier

$$n(x^n - 1)n(n-1)x^{n-2} \leq (n-1)n^2x^{2(n-1)}$$

qui équivaut à  $(x^n - 1)x^{n-2} \leq x^{2n-2}$  ou encore à  $0 \leq x^{n-2}$ . Cette inégalité est vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  si l'on suppose que  $n$  est pair.

**Exercice 101**

On va montrer que les automorphismes d'algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont les applications de la forme

$$\gamma(P) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \rightarrow P^{-1}MP \end{cases}$$

où  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

- Il est clair que, pour chaque  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $\gamma(P)$  est un automorphisme d'algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Soit réciproquement  $\varphi$  un automorphisme d'algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Dans la suite, on confondra chaque élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui a pour matrice  $M$  dans la base canonique  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{K}^n$ .  $\triangleright$  Remarquons que, comme  $\varphi$  est un automorphisme d'algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \varphi(E_{i,j})\varphi(E_{k,l}) = \varphi(E_{i,j}E_{k,l}) = \varphi(\delta_{j,k}E_{i,l}) = \delta_{j,k}\varphi(E_{i,l}).$$

En particulier :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\varphi(E_{i,i}))^2 = \varphi(E_{i,i}^2) = \varphi(E_{i,i}).$$

Ainsi, les  $\varphi(E_{i,i}), i \in [1, n]$ , sont des projecteurs. Comme  $\sum_{k=1}^n \varphi(E_{k,k}) = \varphi(I_n) = I_n$ , il existe  $p \in [1, n]$  tel que  $\varphi(E_{p,p}) \neq 0$ .

▷ Choisissons un vecteur  $e_p$  non nul dans  $\text{Im}(\varphi(E_{p,p}))$ . Comme  $\varphi(E_{p,p})$  est un projecteur,  $\varphi(E_{p,p})e_p = e_p$ . On pose :

$\forall i \in [1, n], e_i = \varphi(E_{i,p})e_p$ . Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ . Alors

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,p}\right)e_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(E_{i,p})e_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0.$$

Pour chaque  $j \in [1, n]$ , multipliant à gauche par  $\varphi(E_{p,j})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(E_{p,j})\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,p}\right)e_p = \varphi\left(E_{p,j}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,p}\right)\right)e_p = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i E_{p,j}E_{i,p}\right)e_p \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} E_{p,p}\right)e_p = \varphi(\lambda_j E_{p,p})e_p = \lambda_j \varphi(E_{p,p})e_p = \lambda_j e_p \end{aligned}$$

donc  $\lambda_j = 0$ . Ainsi,  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, et par conséquent une base de  $\mathbb{K}^n$ . De plus, elle vérifie :

$$\forall (i, j, k) \in [1, n]^3, \quad \varphi(E_{i,j})e_k = \delta_{j,k}e_i$$

En effet,  $\varphi(E_{i,j})e_k = \varphi(E_{i,j})\varphi(E_{k,p})e_p = \varphi(E_{i,j}E_{k,p})e_p = \varphi(\delta_{j,k}E_{i,p})e_p = \delta_{j,k}\varphi(E_{i,p})e_p = \delta_{j,k}e_i$ . ▷ Soit  $u$  l'unique élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  tel que  $(u(\varepsilon_1), \dots, u(\varepsilon_n)) = (e_1, \dots, e_n)$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ ,  $U = \text{Mat}(u; \varepsilon) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . En outre, pour  $(i, j, k) \in [1, n]^3$ ,

$$\varphi(E_{i,j})U\varepsilon_k = \varphi(E_{i,j})(u(\varepsilon_k)) = \varphi(E_{i,j})e_k = \delta_{j,k}e_i = \delta_{j,k}u(\varepsilon_i) = \delta_{j,k}U\varepsilon_i$$

soit  $U^{-1}\varphi(E_{i,j})U\varepsilon_k = \delta_{j,k}\varepsilon_i$ . Par conséquent :  $\forall (i, j) \in [1, n]^2, U^{-1}\varphi(E_{i,j})U = E_{i,j}$  ou encore  $\forall (i, j) \in [1, n]^2, \varphi(E_{i,j}) = UE_{i,j}U^{-1}$ .

D'où immédiatement, par linéarité de  $\varphi$  :  $\varphi = \gamma(U^{-1})$ . Ainsi il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\varphi = \gamma(P)$ .

### Exercice 103

Montrons que le plus petit entier recherché est  $r$ . D'abord, on sait que  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est isomorphe au groupe  $\cup_N$  pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , donc le groupe produit  $G := \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $H := \cup_{d_1} \times \dots \times \cup_{d_r}$ . L'application  $\varphi : (z_1, \dots, z_r) \in H \mapsto \text{Diag}(z_1, \dots, z_r)$  est évidemment un morphisme de groupes injectif de  $H$  dans  $\text{GL}_r(\mathbb{C})$ . Son image est donc un sous-groupe de  $\text{GL}_r(\mathbb{C})$  isomorphe à  $H$  donc à  $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ .

Réciproquement, soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  possède un sous-groupe isomorphe à  $G$ , donc à  $H$ . Posons  $s := d_1$ . Observons que  $H$  inclut le sous-groupe  $(\cup_s)^r$ , donc  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  inclut un sous-groupe  $H'$  isomorphe à  $(\cup_s)^r$ . Pour tout  $M \in H'$ , on a  $M^s = I_n$  par isomorphisme (car  $x^s = 1$  pour tout  $x \in (\cup_s)^r$ ), donc  $M$  est annulé par le polynôme simplement scindé  $X^s - 1$ , et ainsi  $M$  est diagonalisable à spectre inclus dans  $\cup_s$ . Or les éléments de  $H'$  commutent deux à deux (puisque  $(\cup_s)^r$  est commutatif). Le théorème de diagonalisation simultanée (hors programme mais classique) permet donc de justifier l'existence d'une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tel que  $PMP^{-1}$  soit diagonale, et à liste de coefficients diagonaux dans  $(\cup_s)^n$ , pour tout  $M \in H'$ . La fonction  $f$  qui à  $M \in H'$  associe la liste des coefficients diagonaux de  $PMP^{-1}$  est alors injective (composée de deux injections). Il vient donc  $|H'| \leq |(\cup_s)^n|$  soit  $s^r \leq s^n$ . Ainsi  $r \leq n$  car  $s > 1$ .

### Exercice 104

On va démontrer que les matrices qui conviennent sont les matrices d'homothétie non nulles. Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  une matrice qui commute avec tous les éléments de sa classe de conjugaison. On sait que  $A$  possède une valeur propre (non nulle)  $\lambda$  et il existe  $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que

$$AX = \lambda X$$

Observons que si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , alors  $PX$  est vecteur propre pour  $\lambda$  de  $PAP^{-1}$ . Plus précisément, en notant  $E_\lambda(A)$  l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a :

$$E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A)$$

Comme  $A$  et  $PAP^{-1}$  commutent, on en déduit que  $A$  stabilise  $PE_\lambda(A)$ . Ceci est vrai pour tout  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Si  $k := \dim E_\lambda(A)$ , alors on vient de démontrer que  $A$  stabilise tout sous-espace de dimension  $k$  de  $\mathbb{C}^n$ . En effet, ceci découle du fait que lorsque  $P$  parcourt  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $PE_\lambda(A)$  parcourt tous les sous-espaces de dimension  $k$  de  $\mathbb{C}^n$ . On conclut alors en utilisant le résultat classique suivant :

**Lemme 1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  laissant stables tous les sous-espaces de dimension  $k$  de  $E$ . Alors  $u$  est une homothétie.

On se rappelle qu'un endomorphisme stabilisant toute droite est une homothétie. Montrons que c'est aussi le cas de tout endomorphisme stabilisant tout espace de dimension  $k \geq 2$ . On montre que  $u$  stabilise tout sous-espace de dimension  $k-1$  ce qui

permet de conclure par récurrence. Prenons  $H$  un sous-espace de dimension  $k - 1$  de  $E$ . Le sous-espace  $H$  est de codimension au moins 2 donc on peut trouver deux vecteurs non nuls et non colinéaires  $x, y$  tels que  $x \notin H, y \notin H$ . Alors  $u$  stabilise  $H \oplus \mathbb{K}x$  et  $H \oplus \mathbb{K}y$  donc stabilise l'intersection, c'est-à-dire  $H$ . Si donc  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$  on obtient que  $A$  est une matrice d'homothétie en appliquant le lemme. Sinon  $k = n$  et on obtient directement que  $A = \lambda I_n$ .

**Exercice 105**

A priori les questions sont indépendantes.

- a) On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Notons  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$  les valeurs propres de  $A$ . On commence par montrer que : si  $x \in \mathbb{R}^n$  est non nul,  $\langle Ax, x \rangle \leq \lambda_p \|x\|^2$  avec égalité si et seulement si  $x \in E_{\lambda_p}(A)$ . Par le théorème spectral, la somme orthogonale des espaces propres de  $A$  est  $\mathbb{R}^n$ . On écrit  $x = x_1 + \dots + x_p$  avec  $x_i \in E_{\lambda_i}(A)$  :

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \|x_i\|^2 \leq \lambda_p \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 = \lambda_p \|x\|^2.$$

S'il y a égalité, toutes les inégalités sommées sont des égalités, donc  $\lambda_i \|x_i\|^2 = \lambda_p \|x_i\|^2$ , d'où  $x_i = 0$  si  $i < p$ . Si  $x \in E_{\lambda_p}(A)$ , il y a bien égalité. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  un vecteur propre associé à  $\lambda_p$ . Soit  $x' = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T$ . Alors  $\|x'\| = \|x\|$  et

$$\lambda_p \|x\|^2 = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j \leq \sum_{i,j} a_{i,j} |x_i x_j| = \langle Ax', x' \rangle \leq \lambda_p \|x'\|^2 = \lambda_p \|x\|^2.$$

Toutes les inégalités sont des égalités, donc  $\langle Ax', x' \rangle = \lambda_p \|x'\|^2$ , et  $x'$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_p$ . Il reste à voir que, pour tout  $i, x_i \neq 0$ . On a  $Ax' = \lambda_p x'$ , donc pour tout  $i, \lambda_p |x_i| = \sum_j a_{i,j} |x_j|$ . Comme les  $a_{i,j}$  sont  $> 0$ , et les  $x_j$  non tous nuls,

$\sum_j a_{i,j} |x_j|$  est  $> 0$ , et donc  $x_i \neq 0$ .

- b) Notons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a  $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ . Le discriminant du polynôme caractéristique de  $A$  est  $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$ , et les valeurs propres de  $A$  sont

$$\lambda = \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

De plus,

$$\lambda > a \iff d - a > -\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$$

ce qui est vrai car  $bc > 0$  et  $\sqrt{(a-d)^2 + 4bc} > |a-d|$ . Soit  $X = (x, y)^T$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Alors  $(a-\lambda)x + by = 0$ . Or  $a < \lambda, b > 0$  et  $(x, y) \neq (0, 0)$ , donc  $x$  et  $y$  sont non nuls de même signe, donc  $X$  ou  $-X$  conviennent.

- c) On traite facilement le cas  $n = 1$ . Supposons  $n \geq 2$ .

Alors  $\det(C) = \prod_i \det(M_i) = (-1)^n$ , et  $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ , donc  $\chi_C = X^2 - mX + (-1)^n$  où  $m = \text{tr}(C) \in \mathbb{N}$ . On montre immédiatement par récurrence que le coefficient de  $C$  en position  $(1, 1)$  est  $\geq 2$ , et celui en position  $(2, 2)$  est  $\geq 1$ , donc  $m \geq 3$ , et le discriminant de  $\chi_C, m^2 \pm 4$  est  $> 0$ , donc les valeurs propres de  $C$  sont réelles. Soit  $r$  une valeur propre rationnelle qu'on écrit sous forme irréductible  $\frac{p}{q}$ . On a  $p^2 - mpq + (-1)^n q^2 = 0$ , donc  $q$  divise  $p^2$ , donc  $q = 1$  car  $q$  est premier à  $p$  donc à  $p^2$ . Ainsi  $p^2 - mp + (-1)^n = 0$ , donc  $p$  divise 1, donc  $p = \pm 1$ . Donc  $(m-1) = \pm 1$ , ce qui est impossible car  $m \geq 3$ .

**Exercice 106**

Il s'agit d'appliquer, et même de généraliser, la représentation de Cayley des matrices orthogonales qui s'énonce

**Lemme 1 :** pour toute matrice orthogonale  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  dont  $-1$  n'est pas valeur propre, il existe une unique matrice antisymétrique  $H$  telle que  $A = (I_n - H)(I_n + H)^{-1}$ .

*Démonstration :*

*Analyse.* Si  $A = (I_n - H)(I_n + H)^{-1}$  alors  $A + AH = I_n - H$  donc  $(A + I_n)H = I_n - A$ . On déduit l'unicité de  $H$  qui est nécessairement égale à  $(A + I_n)^{-1}(I_n - A)$ .

*Synthèse.* On constate que  $H = (A + I_n)^{-1}(I_n - A)$  est antisymétrique :

$$H^T = (I_n - A^T)(I_n + A^T)^{-1} = (I_n - A^{-1})A(A + I_n)^{-1} = -H$$

puisque les polynômes en  $A$  commutent.

Appliquons ce lemme à  $A$  et  $B$ . Il existe donc  $H$  et  $K$  antisymétriques telles que  $A = (I_n - H)(I_n + H)^{-1}$  et  $B = (I_n - K)(I_n + K)^{-1}$ . On a alors

$$A - I_n = -2H(I_n + H)^{-1}; B - I_n = -2K(I_n + K)^{-1}$$

$$BA - I_n = (I_n + K)^{-1}(I_n - K)(I_n - H)(I_n + H)^{-1} - I_n = -2(I_n + K)^{-1}(H + K)(I_n + H)^{-1} \text{ et donc}$$

$$(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n) = -2H(H + K)^{-1}K = -2K + 2K(H + K)^{-1}K$$

où cette dernière matrice est clairement antisymétrique.

### Exercice 107

a) Comme  $A$  est dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on dispose d'une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ , associée aux valeurs propres  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ . De même, on considère  $(f_1, \dots, f_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $B$ , associée aux valeurs propres  $\lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B)$ .

Soient  $i, j$  tels que  $i + j < n + 2$ . On considère  $F = \text{vect}(e_i, \dots, e_n)$  et  $G = \text{Vect}(f_j, \dots, f_n)$ . Pour tout  $x \in F$ ,  $x = \sum_{k=i}^n x_k e_k$  et

$$x^T A x = \sum_{k=i}^n \lambda_k(A) x_k^2 \geq \lambda_i(A) \|x\|^2.$$

De même, pour tout  $x \in G$ ,  $x^T B x \geq \lambda_j(B) \|x\|^2$ . Or,

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) \\ &\geq \dim(F) + \dim(G) - n = n + 2 - (i + j) > 0 \end{aligned}$$

On dispose donc de  $x \in F \cap G$  tel que  $\|x\| = 1$ . Comme  $A + B \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ ,

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq x^T A x + x^T B x = x^T (A + B) x < 0$$

b) Soient  $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A_1 + \dots + A_d \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ . Soient  $i_1, \dots, i_d$  tels que  $i_1 + \dots + i_d < n + d$ . On souhaite montrer que  $\sum_{k=1}^d \lambda_{i_k}(A_k) < 0$ .

Pour  $1 \leq k \leq d$ , on introduit une base orthonormée  $(e_{1,k}, \dots, e_{n,k})$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A_k$ , et associée à la suite de valeurs propres  $\lambda_1(A_k) \leq \dots \leq \lambda_n(A_k)$ . Et on pose  $F_k = \text{vect}(e_{i_k, k}, \dots, e_{n,k})$ .

Comme ci-dessus, on a besoin de montrer que  $\dim(F_1 \cap \dots \cap F_d) \geq 1$ . Or, par récurrence rapide, sur  $d$ , on montre à partir de la formule de Grassmann utilisée ci-dessus que

$$\dim(F_1 \cap \dots \cap F_d) \geq \left( \sum_{k=1}^d \dim(F_k) \right) - (d-1)n$$

Ainsi,

$$\dim(F_1 \cap \dots \cap F_d) \geq \sum_{k=1}^d (n - i_k + 1) - (d-1)n = \sum_{k=1}^d i_k + d - n > 0$$

par hypothèse. On peut donc considérer  $x \in (F_1 \cap \dots \cap F_d)$  unitaire. Et comme ci-dessus,

$$0 > x^T (A_1 + \dots + A_d) x = \sum_{k=1}^d x^T A_k x \geq \sum_{k=1}^d \lambda_{i_k}(A_k)$$

### Exercice 108

a) Nous commençons par observer que  $\|e^{iS}\| = 1$  pour tout  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Soit en effet  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Par le théorème spectral  $S = O^{-1} D O$  où  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$  est diagonale à coefficients réels. Ainsi  $e^{iS} = O^{-1} e^{iD} O$ . Remarquons que chaque matrice  $O, O^{-1}$  et  $e^{iD}$  conserve la norme  $\| \cdot \|$  (au sens où l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé la préserve). En effet

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, \|OX\|^2 = \overline{X}^T \overline{O}^T O X = \overline{X}^T O^T O X = \overline{X}^T X = \|X\|^2$$

et de même pour  $O^{-1}$ . Enfin, pour tout  $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$  dans  $\mathbb{C}^n$ , on observe que  $e^{iD} = \text{Diag}(e^{id_1}, \dots, e^{id_n})$  donc

$$\|e^{iD}X\|^2 = \sum_{k=1}^n |e^{id_k} x_k|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|X\|^2$$

Ainsi, par multiplication  $e^{iS}$  conserve la norme, et donc  $\|e^{iS}\| = 1$ .

Nous allons ensuite montrer que  $\|e^{iA}e^{-iB} - I_n\| \leq \|A - B\|$ . La fonction

$$\varphi : t \mapsto e^{itA}e^{-itB} - I_n$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et de dérivée  $t \mapsto (e^{itA}iA)e^{-itB} + e^{itA}(-iBe^{-itB}) = ie^{itA}(A - B)e^{-itB}$ . Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\varphi'(t)\| \leq \|e^{itA}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|e^{-itB}\| = \|A - B\|$$

Comme  $\varphi(0) = 0$ , l'inégalité des accroissements finis assure que

$$\|e^{iA}e^{-iB} - I_n\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \|A - B\|$$

Enfin,

$$\|e^{iA} - e^{iB}\| = \|(e^{iA}e^{-iB} - I_n)e^{iB}\| \leq \|e^{iA}e^{-iB} - I_n\| \cdot \|e^{iB}\| \leq \|A - B\|$$

- b) Compte tenu du cheminement précédent, le même résultat est obtenu à condition de montrer que  $\|e^{iH}\| = 1$  pour toute matrice  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\overline{H}^T = H$ . Pour cela, nous ne pouvons pas utiliser le théorème spectral, et allons procéder de manière encore plus simple. Notons  $A^* := \overline{A}^T$  pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Observons que  $A \mapsto A^*$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire et vérifie  $(AB)^* = (BA)^*$  pour toutes  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , ainsi que  $(I_n)^* = I_n$ , donc par récurrence  $(A^k)^* = (A^*)^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Soit alors  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $H^* = H$ . Comme  $M \mapsto M^*$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire (et continue),

$$(e^{iH})^* = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} ((iH)^k)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i)^k}{k!} (H^*)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i)^k}{k!} H^k = e^{-iH} = (e^{iH})^{-1}$$

Pour tout  $X \in \mathbb{C}^n$  on trouve donc  $\|e^{iH}X\|^2 = \overline{X}^T (e^{iH})^* e^{iH} X = \overline{X}^T X = \|X\|^2$ , donc  $\|e^{iH}\| = 1$ . À partir de là, le reste de la démonstration est identique au cas des matrices symétriques réelles.

### Exercice 111

Pour tout entier  $k$  entre 1 et  $r$ , on note  $e_k = (\delta_{k,i})_{1 \leq i \leq r}$ . Alors, tout morphisme  $\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  est caractérisé par la donnée du  $r$ -uplet  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r))$ . On en déduit que

$$\text{Card}\{\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \varphi \text{ est un morphisme de groupe}\} = m^r.$$

On note alors  $A$  l'événement «  $\varphi$  est un morphisme de groupe surjectif ». On a l'équivalence :

$$\varphi \text{ est surjectif} \iff 1 \in \text{Im}(\varphi) \iff \exists (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r; a_1\varphi(e_1) + \dots + a_r\varphi(e_r) \equiv 1[m].$$

Ainsi,  $\varphi$  est non surjectif si et seulement s'il existe un diviseur  $d$  de  $m$  tel que  $d$  divise tous les  $\varphi(e_k)$ . Ou encore s'il existe un nombre premier  $p$  tel que  $p \mid m$  et  $p \mid \varphi(e_k)$  pour tout  $k$ . Notons que l'assertion  $p \mid \varphi(e_k)$  n'est pas ambiguë car  $p$  est un diviseur de  $m$ .

Or si  $p$  est un diviseur premier de  $m$ ,  $\{dp; dp \leq m\}$  est de cardinal  $\frac{m}{p}$  donc, en notant  $B_p$  l'événement «  $\varphi$  est tel que pour tout  $k, p \mid \varphi(e_k)$  » on obtient que

$$\mathbf{P}(B_p) = \frac{(m/p)^r}{m^r} = \frac{1}{p^r} \text{ (car } \varphi \text{ est pris sous loi uniforme).}$$

De plus, si  $p$  et  $q$  sont deux diviseurs premiers de  $m$  distincts,  $pq \mid \varphi(e_k)$  si et seulement si  $p \mid \varphi(e_k)$  et  $q \mid \varphi(e_k)$  donc  $\mathbf{P}(B_{pq}) = \frac{1}{p^r q^r} = \mathbf{P}(B_p)\mathbf{P}(B_q)$ . On généralise au produit d'un nombre quelconque de diviseurs premiers de  $m$  pour obtenir que les événements  $(B_p; p \mid m)$  sont mutuellement indépendants. Il en est donc de même pour la famille des événements contraires que l'on note  $A_p$ .

Finalement, comme  $A = \bigcap_{p \mid m} A_p$  on obtient que

$$\mathbf{P}(A) = \prod_{p \mid m} \mathbf{P}(A_p) = \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p^r}\right)$$

où les indices  $p$  sont premiers.

## Exercice 112

Avant toute chose, on a  $\mathbf{E}(Y_n) = m$  et

$$\text{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2} \left( nf(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)f(k) \right)$$

- a) Il suffit de montrer que  $\text{Var}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev permettra de prouver la convergence en probabilité, i.e.  $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Posons  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$  (avec  $S_0 = 0$ ) et opérons une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)f(k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)S_k - \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)S_k \\ &= S_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} S_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \end{aligned}$$

Or, par hypothèse,  $S_n = o(n)$ , donc par le théorème de sommation des relations de comparaison  $\sum_{k=1}^{n-1} S_k = o(n^2)$  d'où l'on tire que  $\text{Var}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

- b) Nous avons  $n \text{Var}(Y_n) = f(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) f(k)$ . Posons

$$g_k(n) = \begin{cases} \left(1 - \frac{k}{n}\right) f(k) & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $n \text{Var}(Y_n) = f(0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(n)$ . Pour tout  $k, g_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(k)$  et  $\|g_k\|_\infty \leq |f(k)|$ , et par hypothèse  $\sum |f(k)| < \infty$ . Donc par le théorème d'interversion de limites sous convergence normale,

$$n \text{Var}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$$

## Exercice 113

- a) La question propose une modélisation d'une marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ . Pour retourner à l'origine, il faut effectuer le même nombre de pas à droite que de pas à gauche. On retourne donc à l'origine uniquement après un nombre pair de pas. La variable aléatoire  $Z_n$  qui compte le nombre de pas à droite dans une série de  $2n$  pas obéit à une loi binomiale de paramètres  $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ . Ainsi  $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \mathbf{P}(Z_n = n)$ , donc

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \mathbf{P}(Z_n = n) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

Appliquons la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \text{ d'où} \\ \mathbf{P}(S_{2n} = 0)_{n \rightarrow +\infty} &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Notons  $Y_n = \mathbf{1}_{(S_n=0)}$  la fonction indicatrice de l'événement  $(S_n = 0)$ . Si  $n$  est impair, on a  $Y_n = 0$ ; si  $n$  est pair,  $Y_n$  est une variable de Bernoulli de paramètre  $p = \mathbf{P}(Y_n = 1) = \mathbf{P}(S_n = 0)$ . La variable aléatoire  $N$  comptant le nombre de retours à l'origine, on a donc :  $N = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_{2n}$ . Alors par linéarité de l'espérance (les variables  $Y_{2n}$  ne prenant que des valeurs positives) :

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_{2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

Or,  $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ . La série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$  étant une série de Riemann divergente, il en résulte que la série de terme général  $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$  diverge, donc  $\mathbf{E}(N) = +\infty$ .

b) Soit  $q$  la probabilité de retour à l'origine. Montrons que  $q = 1$ . Si  $q < 1$ ;  $\mathbf{P}(N = k) = q^k(1 - q)$  : il faut effectuer  $k$  retours à l'origine, puis entamer une marche sans retour. Alors

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k q^k (1 - q) = \frac{q}{1 - q} < +\infty$$

ce qui contredit le résultat obtenu en a). Ainsi  $q = 1$  et il en résulte que  $N$  est presque sûrement égale à  $+\infty$ .