

## Corrections

## Exercice 1

On vérifie que  $\psi_O$  est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel  $S_n(\mathbb{R})$ . On constate également que  $\psi_O \circ \psi_{O^T} = \psi_{OO^T} = \text{Id}$ . On a  $\psi_{O^T} = \psi_{O^{-1}} = (\psi_O)^{-1}$  mais cela ne suffit pas pour conclure... On montre que  $\psi_{O^T}$  est l'adjoint de  $\psi_O$  (pour le produit scalaire canonique induit sur  $S_n(\mathbb{R})$  - les matrices étant symétriques, on peut retirer la transposition dans le produit scalaire)

$$\forall M, N \in (S_n(\mathbb{R}))^2, \langle \psi_O(A), B, \rangle = \text{tr}(O^T M O N) = \text{tr}(M O N O^T) = \langle M, \psi_{O^T}(N) \rangle$$

Cela donne bien  $(\psi_O)^* = \psi_{O^T}$ . Puisque les déterminants sont identiques, on a finalement  $\det(\psi_O \circ \psi_{O^T}) = 1 = (\det \psi_O)^2$ . Cela donne  $|\det \psi_O| = 1$ .

compléments :

- on commence par le faire lorsque  $O$  est une matrice diagonale - on obtient alors  $|\det \psi_O| = |\det O|^{n+1}$  en écrivant la matrice de  $\psi_O$  dans une base de  $S_n(\mathbb{R})$ .
- on généralise à une matrice symétrique en diagonalisant  $S = P^{-1}DP$  et  $\psi_S = \psi_{P^{-1}} \circ \psi_D \circ \psi_P$  qui donne  $\det \psi_S = \det \psi_D$
- pour une matrice inversible  $M$ , on justifie qu'on peut l'écrire  $M = OS$  avec  $O \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\psi_M = \psi_O \circ \psi_S$ .

Finalement, on obtient  $|\det \psi_A| = |\det A|^{n+1}$ .

## Exercice 2

On note  $f : t \rightarrow |\sin t|^\alpha t^\beta$ . Cette fonction est continue sur  $]0, +\infty[$  si  $\alpha \geq 0$ . On se place donc dans ce cas et même dans le cas  $\alpha > 0$  puisque  $t \rightarrow t^\beta$  n'est pas intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

- étude en 0 :  $f(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{\alpha+\beta}$  et  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $\alpha + \beta > -1$ .
- étude en  $+\infty$  : par habitude, je prends  $\gamma = -\beta$  afin d'écrire  $f(t) = \frac{|\sin t|^\alpha}{t^\gamma}$ . On a  $|f(t)| \leq \frac{1}{t^\gamma}$ . Si  $\gamma > 1$ , alors  $|f|$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . On suppose  $\gamma \leq 1$ . Pour tout  $t \geq 1$ , on a  $f(t) \geq \frac{|\sin t|^\alpha}{t}$ . On va montrer que cette dernière fonction n'est pas intégrable sur  $[\pi, +\infty[$  et ainsi  $f$  ne le sera pas non plus si  $\gamma \leq 1$ .

On note  $g(t) = \frac{|\sin t|^\alpha}{t}$ . Cette fonction est positive donc elle est intégrable sur  $[\pi, +\infty[$  si et seulement si  $\int_\pi^{n\pi} g(t) dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ , ce qui revient, en découpant, à la convergence de la série  $\sum u_k$  où  $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t) dt$ . On a

$$u_k = \int_0^\pi \frac{(\sin t)^\alpha}{t + k\pi} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi (\sin t)^\alpha dt = \frac{C}{k+1}$$

où  $C$  est une constante. On en déduit la divergence de  $\sum u_k$  et la conclusion.

**Bilan** : avec  $\gamma = -\beta$ , l'intégrale est convergente si et seulement si  $\gamma > 1$  et  $\alpha > \gamma - 1$  (ce qui inclut  $\alpha > 0$ ).

## Exercice 3

- a) On remarque que puisque  $\cup$  est commutatif alors  $\varphi(\cup)$  également. Les endomorphismes  $\varphi(g)$  commutent deux à deux. On vérifie alors qu'ils admettent un vecteur propre commun. Pour cela on note  $F = \text{Vect}(\varphi(\cup))$  et on choisit une base  $\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_k)$  de  $F$ . Chaque élément de  $\varphi(\cup)$  est combinaison linéaire de  $\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_k)$  et si  $x$  est un vecteur propre commun à chacun des  $\varphi(g_i)$  alors il sera vecteur propre pour tous les  $\varphi(g)$ .

On montre alors le résultat habituel par récurrence : si  $f_1, \dots, f_n$  sont des endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel qui commutent deux à deux alors ils admettent un vecteur propre commun.

Le résultat est immédiat pour  $n = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  pour lequel il est vrai. On considère  $n + 1$  endomorphismes vérifiant les hypothèses. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f_{n+1}$  et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé. Ce sous-espace est stable par chacun des  $f_1, \dots, f_n$  et les endomorphismes induits commutent encore deux à deux. Ils admettent donc un vecteur propre commun dans  $E_\lambda$  et ce vecteur est automatiquement propre pour  $f_{n+1}$  et évidemment pour chacun des  $f_i$ .

Pour terminer : si  $x$  est un vecteur propre commun à  $\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_k)$ , alors la droite  $D = \text{Vect}(x)$  est stable par chacun des  $\varphi(g_i)$  et pour tous les éléments  $\varphi(g)$ . L'hypothèse nous dit que cette droite ne peut être que  $\{0\}$  ou  $V \dots$  c'est donc  $V$ .

- b) On a  $f(0) = \varphi(1) = \text{Id}_V$  puisque  $\varphi$  est une morphisme de groupes. Puisque  $V$  est de dimension 1 alors  $\text{GL}(V)$  également et  $\text{GL}(V) = \text{VectId}_V$ . On a donc l'existence d'une fonction  $g$  à valeurs complexes telle que  $\varphi(e^{i\theta}) = g(\theta)\text{Id}_V$  et  $g$  est de période  $2\pi$ . Par propriété de morphisme,  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2)$  ce qui donne la même relation pour  $g$ . On a donc  $g$  fonction dérivable en 0 (comme  $f$ ) telle que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $g(x+y) = g(x)g(y)$  (comme  $g$  est à valeurs complexes, on ne peut pas prendre le logarithme). On cherche une équation différentielle vérifiée par  $g$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ , on a

$$\forall h \in \mathbb{R}, g(x_0 + h) - g(x_0) = g(x_0)g(h) - g(x_0) = g(x_0)(g(h) - 1)$$

en divisant par  $h$ , on obtient lorsque  $h$  tend vers 0,  $g'(x_0) = g'(0)g(x_0)$ . Si on note  $\alpha = g'(0)$ ,  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' = \alpha y$  avec  $y(0) = 1$ . On a donc  $g(x) = \exp(\alpha x)$ . Il faut également que  $g$  sont de période  $2\pi$ , c'est-à-dire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(\alpha x + 2\pi\alpha) = \exp(\alpha x)$  ce qui équivaut à  $\exp(2\pi\alpha) = 1$  donc il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\alpha = ip$ . Finalement  $g(x) = \exp(ipx)$  et  $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^p$  (soit  $f(z) = z^p$ ). Réciproquement ces applications conviennent.

#### Exercice 4

On note  $A$  la matrice de  $u$  dans la base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ . Cette matrice est symétrique (et la diagonale est  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ).

On commence par montrer le résultat suivant : si  $u$  est autoadjoint et  $\lambda_n$  la plus grande valeur propre de  $E$  alors  $E_{\lambda_n}(u) = \ker(u - \lambda_n \text{Id}_E) = \{x \in E, \langle u(x), x \rangle = \lambda_n \|x\|^2\}$ .

En effet si on prend une base orthonormée  $(e'_1, \dots, e'_n)$  de vecteurs propres pour  $u$  associée à une suite croissante de valeurs propres comme dans l'énoncé et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ , alors

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

et si on a égalité alors

$$\lambda_n \|x\|^2 - \langle u(x), x \rangle = 0 = \sum_{i=1}^n (\lambda_n - \lambda_i) x_i^2$$

donc  $(\lambda_n - \lambda_i)x_i^2$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $x_i = 0$  lorsque  $\lambda_i \neq \lambda_n$ . Cela donne  $x$  dans l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ . Réciproquement ces vecteurs conviennent.

On en déduit que  $e_n$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ . On a  $u(e_n) = \lambda_n e_n$ . La dernière colonne de  $M$  est donc

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  et par symétrie, la dernière ligne est sous la même forme.

On en déduit que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$  est stable par  $u$ . On note  $v = u|_F$ . Cela reste un endomorphisme autoadjoint, son polynôme caractéristique vérifie  $\chi_u = (X - \lambda_n)\chi_v$  donc les valeurs propres de  $v$  sont  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$  et  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base orthonormée de  $F$  avec  $\langle v(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$ .

On a tout ce qu'il faut pour terminer la démonstration par récurrence sur  $n$  (le cas  $n = 1$  étant immédiat).

#### Exercice 5

- Puisque  $\|M_k\| \rightarrow +\infty$ , à partir d'un certain rang  $\|M_k\| \neq 0$ . Quitte à décaler les indices, on peut supposer que cela est toujours vrai. On pose alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N_k := \frac{M_k}{\|M_k\|}$ . La suite  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée (et on est en dimension finie) donc il existe une extractrice  $\varphi$  telle que  $(N_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $N$ .
- Il reste à montrer que  $N$  est nilpotente.
  - première option : on va montrer que, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(N^j) = 0$ . Les matrices  $M_k$  sont toutes semblables donc, à  $j$  fixé, les matrices  $(M_k)^j$  sont toutes semblables. Elles ont donc la même trace que l'on note  $t_j$ . Alors, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$

$$\text{tr} \left[ \left( \frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \right)^j \right] = \frac{t_j}{\|M_{\varphi(k)}\|^j} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Or la trace est continue donc  $\text{tr} \left[ \left( \frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \right)^j \right] \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(N^j)$ , et, par unicité de la limite,  $\text{tr}(N^j) = 0$ . On peut en déduire que  $N$  est nilpotente (voir autre exercice).

- deuxième option : avec le polynôme caractéristique. On note  $A$  une matrice semblable à toutes les matrices  $M_k$  (on peut prendre  $A = M_0$ ). On a alors

$$\chi_{N_k} = \det \left( XI_n - \frac{M_k}{\|M_k\|} \right) = \det \left( XI_n - \frac{A}{\|M_k\|} \right) = \chi_{A/\|M_k\|}$$

Par continuité de l'application polynôme caractéristique, on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{N_{\varphi(k)}} = \chi_N$  et également  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{N_k} = \chi_0 = X^n$ . On en déduit que  $\chi_N = X^n$  et  $N$  est nilpotente (puisque  $\chi_n(N) = N^n = 0$ ).

#### Exercice 6