Corrections

Exercice 1

On vérifie que ψ_O est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$. On constate également que $\psi_O \circ \psi_{O^T} = \psi_{OO^T} = \mathrm{Id}$. On a $\psi_{O^T} = \psi_{O^{-1}} = (\psi_O)^{-1}$ mais cela ne suffit pas pour conclure... On montre que ψ_{O^T} est l'adjoint de ψ_O (pour le produit scalaire canonique induit sur $S_n(\mathbb{R})$ - les matrices étant symétriques, on peut retirer la transposition dans le produit scalaire)

$$\forall M, N \in (S_n(\mathbb{R}))^2, \langle \psi_O(A), B, =\rangle \operatorname{tr}(O^T MON) = \operatorname{tr}(MONO^T) = \langle M, \psi_{O^T}(N)\rangle$$

Cela donne bien $(\psi_O)^* = \psi_{O^T}$. Puisque les déterminants sont identiques, on a finalement $\det(\psi_O \circ \psi_{O^T}) = 1 = (\det \psi_O)^2$. Cela donne $|\det \psi_O| = 1$.

compléments :

- on commence par le faire lorsque O est une matrice diagonale - on obtient alors $|\det \psi_O| = |\det O|^{n+1}$ en écrivant la matrice de ψ_O dans une base de $S_n(\mathbb{R})$.
- on généralise à une matrice symétrique en diagonalisant $S = P^{-1}DP$ et $\psi_S = \psi_{P^{-1}} \circ \psi_D \circ \psi_P$ qui donne $\det \psi_S = \det \psi_D$
- pour une matrice inversible M, on justifie qu'on peut l'écrire $M = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $\psi_M = \psi_O \circ \psi_S$.

Finalement, on obtient $|\det \psi_A| = |\det A|^{n+1}$.

Exercice 2

On note $f : t \mapsto |\sin t|^\alpha t^\beta$. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \geqslant 0$. On se place donc dans ce cas et même dans le cas $\alpha > 0$ puisque $t \mapsto t^\beta$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

- *étude en* 0 *:* $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{\alpha+\beta}$ et f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha + \beta > -1$.
- *étude en* $+\infty$ *:* par habitude, je prends $\gamma = -\beta$ afin d'écrire $f(t) = \dfrac{|\sin t|^\alpha}{t^\gamma}$. On a $|f(t)| \leqslant \frac{1}{t^\gamma}$. Si $\gamma > 1$, alors $|f|$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On suppose $\gamma \leqslant 1$. Pour tout $t \geqslant 1$, on a $f(t) \geqslant \dfrac{|\sin t^\alpha|}{t}$. On va montrer que cette dernière fonction n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$ et ainsi f ne le sera pas non plus si $\gamma \leqslant 1$.
  On note $g(t) = \dfrac{|\sin t^\alpha|}{t}$. Cette fonction est positive donc elle est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ si et seulement si $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} g(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui revient, en découpant, à la convergence de la série $\sum u_k$ où $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)\mathrm{d}t$. On a
  $$u_k = \int_0^\pi \frac{(\sin t)^\alpha}{t + k\pi}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi (\sin t)^\alpha \mathrm{d}t = \frac{C}{k+1}$$
  où C est une constante. On en déduit la divergence de $\sum u_k$ et la conclusion.

Bilan : avec $\gamma = -\beta$, l'intégrale est convergente si et seulement si $\gamma > 1$ et $\alpha > \gamma - 1$ (ce qui inclut $\alpha > 0$).

Exercice 3

a) On remarque que puisque $\mathbb{U}$ est commutatif alors $\varphi(\mathbb{U})$ également. Les endomorphismes $\varphi(g)$ commutent deux à deux. On vérifie alors qu'ils admettent un vecteur propre commun. Pour cela on note $F = \mathrm{Vect}(\varphi(\mathbb{U})$ et on choisit une base $\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_k)$ de F. Chaque élément de $\varphi(\mathbb{U})$ est combinaison linéaire de $\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_k)$ et si x est un vecteur propre commun à chacun des $\varphi(g_i)$ alors il sera vecteur propre pour tous les $\varphi(g)$.

   On montre alors le résultat habituel par récurrence : si $f_1, \ldots, f_n$ sont des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui commutent deux à deux alors ils admettent un vecteur propre commun.

   Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il est vrai. On considère $n+1$ endomorphismes vérifiant les hypothèses. Soit λ une valeur propre de f_{n+1} et E_λ le sous-espace propre associé. Ce sous-espace est stable par chacun des $f_1, \ldots, f_n$ et les endomorphismes induits commutent encore deux à deux. Ils admettent donc un vecteur propre commun dans E_λ et ce vecteur est automatiquement propres pour f_{n+1} et évidemment pour chacun des f_i.

   Pour terminer : si x est un vecteur propre commun à $\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_k)$, alors la droite $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par chacun des $\varphi(g_i)$ et pour tous les éléments $\varphi(g)$. L'hypothèse nous dit que cette droite ne peut être que $\{0\}$ ou V... c'est donc V.

b) On a $f(0) = \varphi(1) = \mathrm{Id}_V$ puisque φ est une morphisme de groupes. Puisque V est de dimension 1 alors $\mathrm{GL}(V)$ également et $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Vect}\mathrm{Id}_V$. On a donc l'existence d'une fonction g à valeurs complexes telle que $\varphi(e^{i\theta}) = g(\theta)\mathrm{Id}_V$ et g est de période 2π. Par propriété de morphisme, $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2)$ ce qui donne la même relation pour g. On a donc g fonction dérivable en 0 (comme f) telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x+y) = g(x)g(y)$ (comme g est à valeurs complexes, on ne peut pas prendre le logarithme). On cherche une équation différentielle vérifiée par g. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall h \in \mathbb{R}, g(x_0 + h) - g(x_0) = g(x_0)g(h) - g(x_0) = g(x_0)(g(h) - 1)$$

en divisant par h, on obtient lorsque h tend vers 0, $g'(x_0) = g'(0)g(x_0)$. Si on note $\alpha = g'(0)$, g est solution de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ avec $y(0) = 1$. On a donc $g(x) = \exp(\alpha x)$. Il faut également que g sont de période 2π, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(\alpha x + 2\pi\alpha) = \exp(\alpha x)$ ce qui équivaut à $\exp(2\pi\alpha) = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = ip$). Finalement $g(x) = \exp(ipx)$ et $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^p$ (soit $f(z) = z^p$). Réciproquement ces applications conviennent.

Exercice 4

On note A la matrice de u dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Cette matrice est symétrique (et la diagonale est $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

On commence par montrer le résultat suivant : si u est autoadjoint et λ_n la plus grande valeur propre de E alors $E_{\lambda_n}(u) = \ker(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E) = \{x \in E, \langle u(x), x\rangle = \lambda_n \|x\|^2\}$.

En effet si on prend un base orthonormée $(e'_1, \dots, e'_n)$ de vecteurs propres pour u associée à une suite croissante de valeurs propres comme dans l'énoncé et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e' i$, alors

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

et si on a égalité alors

$$\lambda_n \|x\|^2 - \langle u(x), x\rangle = 0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_i) x_i^2$$

donc $(\lambda_n - \lambda_i)x_i^2$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $x_i = 0$ lorsque $\lambda_i \neq \lambda_n$. Cela donne x dans l'espace propre associé à la valeur propre λ_n. Réciproquement ces vecteurs conviennent.

On en déduit que e_n est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n. On a $u(e_n) = \lambda_n e_n$. La dernière colonne de M est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et par symétrie, la dernière ligne est sous la même forme.

On en déduit que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est stable par u. On note $v = u_F$. Cela reste un endomorphisme autoadjoint, son polynôme caractéristique vérifie $\chi_u = (X - \lambda_n)\chi_v$ donc les valeurs propres de v sont $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{n-1}$ et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base orthonormée de F avec $\langle v(e_i), e_i\rangle = \lambda_i$.

On a tout ce qu'il faut pour terminer la démonstration par récurrence sur n (le cas $n = 1$ étant immédiat).

Exercice 5

- Puisque $\|M_k\| \to +\infty$, à partir d'un certain rang $\|M_k\| \neq 0$. Quitte à décaler les indices, on peut supposer que cela est toujours vrai. On pose alors, pour tout $k \in \mathbb{N}, N_k := \dfrac{M_k}{\|M_k\|}$. La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (et on est en dimension finie) donc il existe une extractrice φ telle que $\left(N_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice N.
- Il reste à montrer que N est nilpotente.
  - première option : on va montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}\left(N^j\right) = 0$. Les matrices M_k sont toutes semblables donc, à j fixé, les matrices $(M_k)^j$ sont toutes semblables. Elles ont donc la même trace que l'on note t_j. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

    $$\mathrm{tr}\left[\left(\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|}\right)^j\right] = \frac{t_j}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|^j} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

    Or la trace est continue donc $\mathrm{tr}\left[\left(\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|}\right)^j\right] \underset{k\to+\infty}{\to} \mathrm{tr}\left(N^j\right)$, et, par unicité de la limite, $\mathrm{tr}\left(N^j\right) = 0$. On peut en déduire que N est nilpotente (voir autre exercice).
  - deuxième option : avec le polynôme caractéristique. On note A une matrice semblable à toutes les matrices M_k (on peut prendre $A = M_0$). On a alors

    $$\chi_{N_k} = \det\left(XI_n - \frac{M_k}{\|M_k\|}\right) = \det\left(XI_n - \frac{A}{\|M_k\|}\right) = \chi_{A/\|M_k\|}$$

    Par continuité de l'application polynôme caractéristique, on a $\lim_{k\to+\infty} \chi_{N_{\varphi(k)}} = \chi_N$ et également $\lim_{k\to+\infty} \chi_{N_k} = \chi_0 = X^n$. On en déduit que $\chi_N = X^n$ et N est nilpotente (puisque $\chi_n(N) = N^n = 0$).

Exercice 6

a) On note $\mathscr{A} = \{x^2, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$. Soient x et y dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, non nuls. Alors $x^2 = y^2$ si et seulement si $(x-y)(x+y) = 0$ donc $x = y$ ou $x = -y$ (on est dans un corps). Puisque x et $-x$ sont distincts (sinon $2x = 0$ donc $x = 0$) chaque éléments de $\mathscr{A}$ a exactement deux antécédents par l'application carrée. On a donc card $\mathscr{A} = \dfrac{p-1}{2}$.

b) On considère le polynôme $P = X^{(p-1)/2} - 1$. Ce polynôme a au plus $\dfrac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{Z}/pZ$. Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré non nul, il existe $b \in \mathbb{Z}/pZ$ non nul tel que $x = b^2$ et alors $P(x) = b^{p-1} - 1 = 0$ (puisque $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$). Chacun des $\dfrac{p-1}{2}$ carré est racine de P donc les racines de P sont exactement les carrés non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p] \iff a$ est un carré non nul modulo p.

c) On essaie de trouver un lien avec les questions précédentes... peu concluant... comme d'habitude, si on ne voit pas de façon générale, on regarde sur des exemples. Pour $p = 17$ (premier cas), on a $p = 4 \times 4 + 1$ et $\dfrac{p-1}{2} = 8$. On a

$$a = 2.4.6.8.10.12.14.16 \equiv 2.4.6.8.(-7)(-5)(-3)(-1) = (-1)^4 8! = (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

Pour $p = 11$ (second cas), on a $p = 4 \times 2 + 3$ et $\dfrac{p-1}{2} = 5$ et $\dfrac{p+1}{4} = 3$. On a

$$a = 2.4.6.8.10 \equiv 2.4.(-5)(-3)(-1) = (-1)^3 5! = (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

- si $p = 4m+1$, $\dfrac{p-1}{2} = 2m$ et $m = \dfrac{p-1}{4}$. On décompose a en deux (on travaille modulo p) :

$$a = \prod_{k=1}^{m}(2k).\prod_{k=m+1}^{2m}(2k) \equiv \prod_{k=1}^{m}(2k).\prod_{k=m+1}^{2m}(2k-p) \equiv (-1)^m \prod_{k=1}^{m}(2k)\prod_{k=m+1}^{2m}(p-2k)$$

  et $p - 2k = 4m+1-2k$ donc $\displaystyle\prod_{k=m+1}^{2m}(p-2k) = \prod_{k=0}^{m-1}(2k+1)$ les produits dans a font donc intervenir les entiers pairs de 2 à $2m$ et les impairs de 1 à $2m-1$. On a donc $(2m)!$ avec $2m = \dfrac{p-1}{2}$. Finalement

$$a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \,[p]$$

- si $p = 4m+3$, $\dfrac{p-1}{2} = 2m+1$ et $\dfrac{p+1}{4} = m+1$. On refait le même chose et on aura m termes pairs $2, 4, \dots, 2m$ et les $m+1$ termes suivants donneront $(-1)^{m+1}$ ainsi que les entiers impairs $1, 3, \dots, 2m+1$. On obtient le second résultat.

Exercice 7

a) lorsque p tend vers $+\infty$, c'est la valeur maximale de f qui prend le dessus. On note $M = f(x_0) = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(t)$ et $I_p = \left(\displaystyle\int_0^1 f(x)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

On a directement

$$0 \leqslant I_p \leqslant \left(\int_0^1 M^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = M.$$

Soit $\varepsilon \in]0, M/2]$. Par continuité de f en x_0, il existe un segment $[a,b] \subset [0,1]$ contenant x_0 et non réduit à un point tel que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \geqslant M - \varepsilon$. Par positivité de f, on a

$$I_p \geqslant \left(\int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \geqslant (M-\varepsilon).(b-a)^{1/p}$$

Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty}(M-\varepsilon).(b-a)^{1/p} = M - \varepsilon$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, $I_p \geqslant M - 2\varepsilon$ et ainsi $M - 2\varepsilon \leqslant I_p \leqslant M$. On en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 f(x)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = M$$

b) On se retrouve avec une forme indéterminée « 1^∞ ». On suppose dans la suite que $p \in]0,1]$. On regarde plutôt $J_p = \ln I_p = \dfrac{1}{p}\ln\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)^p \mathrm{d}x\right)$. On a $0 \leqslant f(x)^p \leqslant M^p \leqslant \max(1, M)$ si $p \in]0,1]$ et $x \in [0,1]$. Par théorème de convergence dominée (version continue), on a

$$\lim_{p\to 0}\int_0^1 f(x)^p \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \mathrm{d}t = 1$$

la convergence simple vers la fonction constante égale à 1 ayant lieu sur $]0,1[$. Cela permet d'en déduire que

$$\ln\left(\int_0^1 f(x)^p\mathrm{d}x\right)\underset{p\to 0}{\sim}\int_0^1 f(x)^p\mathrm{d}x-1=\int_0^1 (f(x)^p-1)\,\mathrm{d}x$$

et $J_p \underset{p\to 0^+}{\sim}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)^p-1}{p}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\exp(p\ln f(x))-1}{p}\mathrm{d}x$.

On propose deux versions pour le passage à la limite : on suppose dorénavant que $x\mapsto \ln f(x)$ est intégrable sur $]0,1[$.

- on cherche donc à appliquer le théorème de convergence dominée continu pour pouvoir obtenir $\displaystyle\lim_{p\to 0^+} J_p=\int_0^1 \ln(f(x))\mathrm{d}x$ si cette intégrale existe. On a bien
  → pour tout $x\in]0,1[$, $\displaystyle\lim_{p\to 0^+}\frac{\exp(p\ln f(x))-1}{p}=\ln f(x)$ et $x\mapsto \ln f(x)$ est définie et continue sur $]0,1[$.
  → On doit dominer indépendamment de $p\in]0,1]$. On a $p\ln f(x)\leqslant \ln M\leqslant C=\max(0,\ln M)$. Pour tout $u\leqslant C$, il existe $\theta\leqslant C$ tel que $\dfrac{e^u-1}{u}=e^\theta$ et ainsi $\left|\dfrac{e^u-1}{u}\right|\leqslant e^C$. On en déduit que $\left|\dfrac{e^{p\ln f(x)}-1}{p}\right|\leqslant e^C|\ln f(x)|$, ce qui donne l'hypothèse de domination.
- On note $G(p)=\displaystyle\int_0^1 f(x)^p\mathrm{d}x$ pour $p\in[0,1]$ et $h(x,p)=f(x)^p$ pour $x\in]0,1[$ et $p\in]0,1]$ - ce qui est possible puisque f est strictement positive sur $]0,1[$. On cherche $\displaystyle\lim_{p\to 0}\frac{G(p)-G(0)}{p}$ si elle existe, c'est-à-dire $G'(0)$ (sous réserve d'existence). On applique le théorème de dérivation.
  — pour tout $p\in[0,1]$, $x\mapsto f(x)^p$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $]0,1[$
  — pour tout $x\in]0,1[$, $p\mapsto f(x)^p=\exp(p\ln f(x))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et de dérivée $p\mapsto \ln f(x).f(x)^p$ (avec la continuité en tant que fonction de x sur $]0,1[$).
  — On a f positive et majorée par M, donc $f(x)^p\leqslant M^p\leqslant \max(1,M)=K$. On suppose alors que $\ln\circ f$ est intégrable sur $]0,1[$, ce qui permet de majorer $\left|\dfrac{\partial h}{\partial p}\right|$ par $K|\ln f(x)|$

  On peut appliquer le théorème de dérivation et obtenir $G'(0)=\displaystyle\int_0^1 \ln(f(x))\mathrm{d}x$.

Finalement $\displaystyle\lim_{p\to 0}\left(\int_0^1 f(x)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x\right)$.

Remarque : on peut alors retirer l'hypothèse d'intégrabilité de $\ln\circ f$. Le problème survient en 0 et/ou en 1 avec dans ce cas une limite nulle pour f et une limite $-\infty$ pour $\ln(f(x))$. On aurait « $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x=-\infty$ », et certainement une limite nulle pour la limite cherchée par l'énoncé... à voir

Exercice 8

- *(Remarque : cette question n'est pas posée)* On note X la variable aléatoire qui désigne le rang du tirage qui donne la première paire. Les valeurs de X vont de 2 à $n+1$. On dispose de n « couleurs » de chaussettes. Il y a $N=\dfrac{(2n)!}{2^n}$ organisations possibles ($(2n)!$ permutations mais chaque couple de couleur est compté deux fois). On dénombre les situations où $X=k$:
  — choix de la couleur de la paire : n
  — position de la première chaussette dans les $k-1$ tirages précédents : $k-1$
  — choix des $k-2$ couleurs distinctes avant : $\binom{n-1}{k-2}$ avec $(k-2)!$ organisations possibles
  — placement entre les positions $k+1$ et $2n$: on a $k-2$ chaussettes seules et $n-(k-1)$ paires restantes. Cela donne $\dfrac{(2n-k)!}{2^{n-k+1}}$ organisations possibles

  Le nombre de listes correspondantes est donc $n(k-1)\binom{n-1}{k-2}(k-2)!\dfrac{(2n-k)!}{2^{n-k+1}}$ et finalement

$$\mathbf{P}(X=k)=\frac{2^{k-1}}{(2n)!}n(k-1)\frac{(n-1)!(2n-k)!}{(n-k+1)!}=2^{k-1}\frac{n!}{(2n)!}(k-1)\frac{(2n-k)!}{(n-k+1)!}$$

- Le calcul de l'espérance sous cette forme semble peu concluant. On utilise

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X>k)$$

Pour déterminer $\mathbf{P}(X>k)$: on doit choisir k couleurs distinctes sur les k premières positions, les arranger et arranger les $(2n-k)$ chaussettes restantes avec k chaussettes seules et $(n-k)$ paires. Cela donne, pour $k\in[\![0;n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X>k)=\frac{2^n}{(2n)!}\binom{n}{k}k!\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}=2^k\frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!}$$

On en déduit
$$\mathbf{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}2^k\frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!}\underset{k\leftarrow 2n-k}{=}\sum_{k=n}^{2n}2^{2n-k}\frac{n!}{(2n)!}\frac{k!}{(n-k)!}=4^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}2^{-k}$$
En utilisant le résultat donné, on obtient $\mathbf{E}(X)=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}=\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ (ce terme est équivalent à $\sqrt{n\pi}$).

- il reste à montrer l'indication. On effectue une suite de lancer d'une pièce équilibrée et on note Z la variable aléatoire qui désigne le rang du $n+1$-ème succès (par exemple « obtenir pile »). La variable aléatoire Z est à valeurs entières supérieures ou égales à $n+1$ (il y a éventuellement une valeur infinie, mais de probabilité nulle). On a alors
$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\mathbf{P}(Z=k)+\mathbf{P}(Z>2n+1)=1$$
avec $\mathbf{P}(Z=k+1)=\binom{k}{n}\frac{1}{2^{k+1}}$ (le $k+1$-ème tirage est fixé, on place les n autres succès dans les k tirages précédents). On obtient
$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^{k+1}}+\mathbf{P}(Z>2n+1)=1$$
L'événement $Z>2n+1$ signifie qu'on n'a pas obtenue les $n+1$ succès lors des $2n+1$ tirages donc qu'on a eu au moins $n+1$ échecs lors de ces tirages et en inversant les rôles succès/échecs, on obtient $\mathbf{P}(Z>2n+1)=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\mathbf{P}(Z=k)$. Ainsi
$$2\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^{k+1}}=1=\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}$$

Exercice 9

- on note $U(x,t)=f(u(x,t))$ pour une fonction f à choisir. On a
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t).f'(u(x,t))\text{ et }\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2.f''(u(x,t))+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).f'(u(x,t))$$
on a un résultat similaire pour $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$. On a alors
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t)=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2\right).f''(u(x,y))-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right).f'(u(x,t))$$
On choisit une fonction f telle que $f''=f'$ et qui ne s'annule pas - on prend $f(y)=\exp(y)$. On a alors équivalence entre l'équation de départ et
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t)=0$$
Pour résoudre cette équation, on utilise le changement linéaire $(a=x+t, b=x-t)$ pour se ramener à l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial a\partial b}=0$ (ou « $V(a,b)=U(x,t)$ ») et finalement obtenir U sous la forme
$$U(x,t)=g(x+t)+h(x-t)$$
où g et h sont deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On doit aussi avoir U qui reste strictement positive. On aura alors $u(x,t)=\ln(g(x+t)+h(x-t))$.
- on ajout les conditions supplémentaires : $u(x,0)=u_0(x)=\ln(g(x)+h(x))$, ce qui donne $g(x)+h(x)=e^{u_0(x)}$. On a ensuite
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{g'(x)-h'(x)}{g(x)+h(x)}=u_1(x)$$
Cela donne $g'(x)-h'(x)=u_1(x)e^{u_0(x)}$ - on en déduit $g-h$ à une constante près puis on en déduit g et h avec $g=\frac{g-h+g+h}{2}$ et $h=\frac{g+h-(g-h)}{2}$

Exercice 10

a) Dans le cas $C = 0$, on a, pour tout $x, y \in E$, $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$. On note $u = T - T(0)$, ainsi, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$ et $\|T(x) - u(x)\| = \|T(0)\|$ donc on aura le résultat si on montrer que u est linéaire. Par formule de polarisation, on montre que, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right) = \langle x, y\rangle$$

On prend alors x, y dans E et $\lambda \in R$ et on développe

$$\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 = \|u(x+\lambda y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \|u(y)\|^2 - 2\langle u(x+\lambda y), u(x)\rangle - 2\lambda \langle u(x+\lambda y), u(y)\rangle - 2\lambda \langle u(x), u(y)\rangle$$

on peut alors « supprimer » tous les u et en regroupant dans l'autre sens, il reste $\|(x+\lambda y) - x - \lambda y\|^2 = 0$.

b) si u et v conviennent alors $\|u(x) - v(x)\| \leqslant 2h$ pour tout $x \in E$ ce qui est impossible si $u - v$ n'est pas nul (par homogénéité). Ainsi u est unique.

c) On remplace T par $T - T(0)$ ce qui ne change pas le problème. On a alors $|\|T(x)\| - \|x\|| \leqslant C$
- existence de $u_0(x)$: le seul moyen est de montrer la convergence absolue de la série télescopique associée. On note $v_n = \dfrac{T(2^n x)}{2^n}$. On a

$$v_n - v_{n-1} = \frac{T(2^n x) - 2T(2^{n-1}x)}{2^n}$$

  et on se rend compte qu'on doit majorer efficacement $\|T(2x) - 2T(x)\|$. On le fait avec un carré (pour passer par des produits scalaires) :

$$\begin{aligned}\|T(2x) - 2T(x)\|^2 &= \|T(2x)\|^2 + 4\|T(x)\|^2 - 4\langle T(2x), T(x)\rangle \\ &= \|T(2x)\|^2 + 4\|T(x)\|^2 - 2\left(\|T(2x)\|^2 + \|T(x)\|^2 - \|T(2x) - T(x)\|^2\right) \\ &= 2\|T(2x) - T(x)\|^2 + 2\|T(x)\|^2 - \|T(2x)\|^2\end{aligned}$$

  On exploite le fait que $\|T(y)\|$ est proche de $\|y\|$. On a de plus, pour tout $y \in E$,

$$\left|\|T(y)\|^2 - \|y\|^2\right| = \left(\|T(y)\| + \|y\|\right)\left|\|T(y)\| - \|y\|\right| \leqslant C\left(\|y\| + C + \|y\|\right) = C(C + 2\|y\|)$$

  et plus généralement

$$\begin{aligned}\left|\|T(x) - T(y)\|^2 - \|x - y\|^2\right| &\leqslant C\left(\|T(x) + T(y)\| + \|x - y\|\right) \\ &\leqslant C\left(\|T(x)\| + \|T(y)\| + \|x - y\|\right) \\ &\leqslant C\left(\|x\| + \|y\| + 2C + \|x - y\|\right)\end{aligned}$$

  on peut également majorer $\|x - y\|$ par $\|x\| + \|y\|$ si l'on veut mais on en aura pas besoin. On a alors

$$\begin{aligned}\|T(2x) - 2T(x)\|^2 &= 2(\|T(2x) - T(x)\|^2 - \|x\|^2) + 2(\|T(x)\|^2 - \|x\|^2) - (\|T(2x)\|^2 - 4\|x\|^2) \\ &= 2(\|T(2x) - T(x)\|^2 - \|2x - x\|^2) + 2(\|T(x)\|^2 - \|x\|^2) - (\|T(2x)\|^2 - \|2x\|^2) \\ &\leqslant 2C(2C + 6\|x\|) + 2C(C + \|x\|) + C(C + 4\|x\|) \leqslant C(6C + 18\|x\|)\end{aligned}$$

  Remarque : je ne suis pas certain des constantes mais leurs valeurs n'ont pas d'importance pour la suite du raisonnement... je continue avec ça.

  On peut alors l'appliquer en remplaçant x par $2^{n-1}x$, ce qui donne

$$\|v_n - v_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2^n}\sqrt{C(6C + 18.2^{n-1}\|x\|)} = \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{2^n}}{2^n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)$$

  Cela garantit enfin la converge de $\sum v_n - v_{n-1}$ et donc de la suite v_n.
- Soit $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\|T(2^n x)\| - \|2^n x\|| \leqslant C$. En divisant pas 2^n et en passant à la limite (avec la continuité de la norme), on obtient $\left|\|u_0(x)\| - \|x\|\right| \leqslant 0$. On est ramené à la première question et u_0 est un automorphisme orthogonal.

d) pas d'idée

Exercice 11

Comme souvent dans ce genre de question, on cherche une équation différentielle vérifiée par deux expressions différentes. Comme on ne sait pas ce qu'il faut chercher, ce n'est pas immédiat. On se doute qu'il va y avoir $\exp(tA)$, $\exp(tB)$ et une exponentielle avec $[A,B]=AB-BA$. On peut avoir une idée en regardant le début du développement limité de $\exp(tA)\exp(tB)$:

$$\begin{aligned}
\exp(tA)\exp(tB) &= \left(I_n+tA+\frac{t^2}{2}A^2+\mathrm{o}(t^2)\right)\left(I_n+tB+\frac{t^2}{2}B^2+\mathrm{o}(t^2)\right)\\
&= =I_n+t(A+B)+\frac{t^2}{2}\left(A^2+B^2+2AB\right)+\mathrm{o}(t^2)\\
&= I_n+t(A+B)+\frac{t^2}{2}\left(A^2+B^2+AB+BA+AB-BA\right)+\mathrm{o}(t^2)\\
&= I_n+t(A+B)+\frac{t^2}{2}\left((A+B)^2+[A,B]\right)+\mathrm{o}(t^2)
\end{aligned}$$

ce qui correspond au début du DL de $\exp(t(A+B)).\exp(\frac{t^2}{2}[A,B])$. On note alors $f(t)=\exp(tA)\exp(tB)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[A,B]\right)$ et on regarde sa dérivée :

$$f'(t)=Af(t)+\exp(tA)B\exp(tB)\exp(-\frac{t^2}{2}[A,B])+\exp(tA)\exp(tB)(-t[A,B])\exp\left(-\frac{t^2}{2}[A,B]\right)$$

(on peut/doit justifier la troisième dérivée en revenant à la somme de la série) La matrice $[A,B]$ commute avec A et B et on en déduit qu'elle commute avec $\exp(tA)$ et $\exp(tB)$. On s'intéresse au terme $\exp(tA)B$:

On a $AB=AB-BA+BA=BA+[A,B]$, puis

$$A^2B=A(AB)=A\left(BA+[A,B]\right)=ABA+A[A,B]=(BA+[A,B])A+A[A,B]=BA^2+2A[A,B]$$

Par récurrence (à faire), on a $A^kB=BA^k+kA^{k-1}[A,B]$ si $k\geqslant 1$. On a alors, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}\right)B=B\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}\right)+\left(\sum_{k=1}^{N}k\frac{t^kA^{k-1}}{k!}\right)[A,B]=B\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}\right)+(t[A,B])\left(\sum_{k=0}^{N-1}k\frac{t^kA^k}{k!}\right)$$

En limite (avec la continuité de la multiplication par une matrice constante), cela donne $\exp(tA)B=B\exp(tA)+\exp(tA).(t[A,B])$. Il vient alors

$$\forall t\in\mathbb{R}, f'(t)=Af(t)+(B+t[A,B])f(t)-t[A,B]f(t)=(A+B)f(t)$$

Puisque $f(0)=I_n$, on en déduit que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\exp(t(A+B))$, c'est-à-dire

$$\forall t\in\mathbb{R}, \exp(tA)\exp(tB)\exp(-\frac{t^2}{2}[A,B])=\exp(t(A+B))$$

Finalement, en $t=1$,

$$e^{A+B}=e^Ae^Be^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Exercice 12

a) On note $\Gamma=\{(x,f(x)),x\in[0,1]\}\subset\mathbb{R}^2$ le graphe de f. On suppose que f est continue sur $[0,1]$. Soit (x_n,y_n) une suite de Γ qui converge vers $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\beta$. Puisque $x_n\in[0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\alpha\in[0,1]$. On a également $y_n=f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par continuité de f en α, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\alpha)$. Par unicité de la limite $\beta=f(\alpha)$ et ainsi $(\alpha,\beta)\in\Gamma$ et Γ est fermé.

Comme contre-exemple on peut choisir la fonction $x\mapsto 1/x$ sur $]0,1]$ avec $f(0)=0$. Le graphe est la réunion de $\{(0,0)\}$ (fermé) et de $H=\{(x,1/x),x\in]0,1]\}$. On vérifie que ce dernier ensemble est fermé : si on a une suite $(x_n,y_n)\in H$ qui converge vers (α,β), on a $\alpha\in[0,1]$ mais comme $x_ny_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\alpha\beta=1$ et ainsi $\alpha>0$ et $\beta=1/\alpha$. La limite reste dans H et H est fermé. En tant que réunion de deux fermés, Γ est fermé

b) On suppose que Γ est compact donc entre autre borné. On en déduit (on prend par exemple la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$) que f est bornée. Soit $\alpha\in[0,1]$ et x_n une suite quelconque de $[0,1]$ qui converge vers α. On note $y_n=f(x_n)$. Cette suite est bornée. Soit ℓ une valeur d'adhérence de cette suite et φ une extractrice telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}y_{\varphi(n)}=\ell$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})=(\alpha,\ell)$. Or Γ est fermé car compact donc $(alpha,\ell)\in\Gamma$ ce qui donne $\ell=f(\alpha)$. Ainsi la seule valeur d'adhérence de (y_n) est $f(\alpha)$. Puisque la suite est bornée, elle converge vers son unique valeur d'adhérence. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\alpha)$ pour toute suite x de limite α. La fonction f est bien continue en tout $\alpha\in[0,1]$.

Exercice 13

Notons $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui trigonalise A, P la matrice de $(e_1,\dots,e_n)$ dans la base canonique et $B=P^{-1}AP$. La matrice $B=\left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire supérieure. Fixons $t>0$. L'astuce est d'examiner une norme usuelle mais considérée sur la base $\left(e_1,te_2,\dots,t^{n-1}e_n\right)$. Posons par exemple pour tout $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$ la norme

$$\|x\|_t=\max_{1\leqslant j\leqslant n}t^{-(j-1)}\left|x_j\right|$$

Étudions la norme d'opérateur de A dans cette base. On a

$$Ae_j=\sum_{i=1}^{j}b_{i,j}e_i \quad\Rightarrow\quad Ax=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}b_{i,j}x_je_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}b_{i,j}x_j\right)e_i$$

Et donc

$$\|Ax\|_t\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}t^{-(i-1)}\left|\sum_{j=i}^{n}b_{i,j}x_j\right|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}t^{-(i-1)}\left(\left|b_{i,i}x_i\right|+\left|\sum_{i<j\leqslant n}b_{i,j}x_j\right|\right)$$

En utilisant l'inégalité $\left|x_j\right|\leqslant t^{j-1}\|x\|_t$, on trouve

$$\|Ax\|_t\leqslant\|x\|_t\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|b_{i,i}\right|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}t^{-(i-1)}\left|\sum_{i<j\leqslant n}b_{i,j}t^{j-1}\right|\right)$$

$$\|A\|_t\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|b_{i,i}\right|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{i<j\leqslant n}\left|b_{i,j}\right|t^{j-i}$$

Le majorant est de la forme $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|b_{i,i}\right|+\mathrm{O}(t)$ pour $t\to0$. Comme les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire sont les valeurs propres, on déduit que si t est suffisamment proche de 0^+ alors $\|A\|_t<1$.

Exercice 14

a) Si P est constant non nul, le résultat est évident (l'intégrale est nulle). Sinon on peut écrire $P(X)=\alpha\prod_{j=1}^{n}\left(X-\lambda_j\right)$, où $n\in\mathbb{N}^\star$, $\alpha\in\mathbb{C}^\star$, et les λ_j sont les racines de P comptées avec multiplicité $\left(\left|\lambda_j\right|\neq1\right.$ par hypothèse$\left.\right)$. Ainsi,

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_i}$$

Il suffit donc de vérifier que, pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$,

$$I(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\mathrm{d}t=\begin{cases}1 & \text{si } |z|<1\\ 0 & \text{si } |z|>1\end{cases}$$

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Pour tout $t\in[-\pi,\pi]$

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-z}=\frac{1}{1-ze^{-it}}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^ne^{-int}$$

Par un argument de convergence normale donc uniforme sur $[-\pi,\pi]$ ou par théorème d'intégration terme à terme (dans les deux cas, les hypothèses se vérifient aisément),

$$I(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}z^ne^{-int}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\delta_{n,0}=1$$

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. Cette fois-ci, on écrit que, pour tout $t\in[-\pi,\pi]$,

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-z}=-\frac{e^{it}}{z}\frac{1}{1-\dfrac{e^{it}}{z}}=-\sum_{n=1}^{+\infty}z^{-n}e^{int}$$

Par les mêmes arguments, on peut échanger somme et intégrale et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} z^{-n}\delta_{n,0} = 0$$

Finalement,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}P'\left(e^{it}\right)}{P\left(e^{it}\right)}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} I\left(\lambda_k\right) = \left|\left\{k \in [\![1,n]\!], |\lambda_k| < 1\right\}\right|$$

On notera N_P cette quantité.

b) On pose, pour $s \in [0,1], P_s = sP + (1-s)Q = s(P-Q) + Q$. Pour tout $s \in [0,1]$, ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$: si $P_s(z) = 0$ avec $z \in \mathbb{U}$ alors $|s(P-Q)(z)| = |Q(z)|$ alors que $|s(P-Q)(z)| \leqslant |(P-Q)(z)| < |Q(z)|$. Ainsi, par la première question, pour tout $s \in [0,1]$,

$$N_{P_s} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}P_s'\left(e^{it}\right)}{P_s\left(e^{it}\right)}\mathrm{d}t = f(s)$$

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on vérifie que f est continue sur $[0,1]$: on a bien la continuité de

$$h(s,t) = \frac{e^{it}P_s'\left(e^{it}\right)}{P_s\left(e^{it}\right)}$$

par rapport à t et s. Et comme h est continue sur le compact $[0,1] \times [-\pi,\pi]$, elle est bornée par une constante M qui est bien intégrable sur $[-\pi,\pi]$.

Comme f est continue et à valeurs dans $\mathbb{N}$ par la première question, elle est constante. Ainsi $N_P = N_{P_1} = N_{P_0} = N_Q$.

Exercice 15

a) On utilise le fait que $c^2 = (\operatorname{tr} c)c$ pour un endomorphisme de rang 1 (à savoir refaire). Donc $c^2 = 0$. On a notamment Im $c \subset \ker c$. Il existe un vecteur e_n qui n'est pas dans $\ker c$. On note $e_{n-1} = u(e_n)$, ce vecteur est dans Im c donc dans $\ker c$. On peut compléter la famille $\{e_{n-1}\}$ en une base de $\ker c$ (qui est de dimension $n-1$) notée $\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$. La famille $(e_1,\ldots,e_{n-1},e_n)$ est une base de E (e_n est un vecteur d'un supplémentaire de $\ker c$) et dans cette base, la matrice de c et $E_{n-1,n}$.

b) on a rg $(u^k \circ c) \leqslant$ rg $c \leqslant 1$. Si $u^k \circ c = 0$ alors on a le résultat. Sinon

$$\operatorname{tr}(u^k \circ c) = \operatorname{tr}(u^{k+1}v - u^k vu) = \operatorname{tr}(u^{k+1}v) - \operatorname{tr}(u^k vu) = \operatorname{tr}(u^{k+1}v) - \operatorname{tr}(uu^k v) = 0$$

De nouveau Im $(u^k c) \subset \ker(u^k c)$. On a $\ker c \subset \ker(u^k c)$ et les deux espaces sont de dimension 1 donc ils sont égaux. On a donc Im $(u^k c) \subset \ker c$.

c) Il existe $x \in E$ tel que Im c = Vect$x$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) \in \ker c$. On peut considérer le sous-espace vectoriel F = Vect$(u^k(x), k \in \mathbb{N})$. C'est un sous-espace vectoriel stable par u, de dimension au plus $n-1$ et au moins 1. On a donc $\chi_{u_F} | \chi_u$ et χ_{u_F} est de degré $\dim F \in [\![1;n-1]\!]$. On a donc χ_u non irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

d)
- le sens direct se fait de la même façon que la question précédente avec χ_{u_F} qui divise χ_u.
- Réciproquement, on suppose que χ_u n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ et qu'il existe deux polynômes P et Q non constants tels que $\chi_u = PQ$. On a $\chi_u(u) = 0 = P(u) \circ Q(u)$. L'un des endomorphismes $P(u)$ ou $Q(u)$ n'est pas injectif. - on suppose que c'est $P(u)$. Il existe donc $x \in \ker P(u)$ non nul. On a $P(u)(x) = 0$; on note $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ (avec $d \in [\![1;n-1]\!]$) et ainsi $u^m(x) \in$ Vect$(x, u(x), \ldots, u^{m-1}(x))$, ce qui permet de montrer que F = Vect$(x, u(x), \ldots, u^{m-1}(x))$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par u et de dimension au moins 1 et au plus $m < n$. On a bien un sous-espace vectoriel F non trivial stable par u (on peut ajouter que $\dim F = p$ où p est le degré du polynôme minimal de u en x, c'est-à-dire le générateur unitaire de l'idéal $\{Q \in K[X], Q(u)(x) = 0\}$).

Exercice 16

a) On note B la boule fermée unité. L'application norme N est 1-lipschitzienne et $B = N^{-1}([0,1])$ est donc fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue (on peut évidemment le faire de plein d'autres façons). Elle est bornée... Elle contient la boule ouverte $B(0,1/2)$ donc 0 est un point intérieur. Si $x, y \in B$ et $\lambda \in [0,1]$ alors $N(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda N(x) + (1-\lambda)N(y) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$. La boule est convexe. Puisque $N(-x) = N(x)$, elle est symétrique par rapport à 0.

b) On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $E = \mathbb{R}^d$. On considère un ensemble B avec toutes ces propriétés. On veut définir une norme. L'idée est de se dire que si $x \neq 0$, on peut le ramener juste à la frontière de B (ce seront les éléments de norme 1) en divisant par une certaine constante. On considère alors
$$N(x) = \inf\{\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in B\}$$
On vérifie que N est une norme et que B en est la boule unité. Pour la suite, si $x \in E$, on note $I_x = \{\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in B\}$.

- Si y est un point intérieur à B (pour $\|\cdot\|$), alors $-y$ également par symétrie. On a $r > 0$ tel que $B(y, r)$ et $B(-y, r)$ dans B. Par convexité, on vérifie que $B(0, r) \subset B$ (à écrire). On a donc $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset B$.
- si $x = 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $x/\lambda = 0 \in B$ donc $N(x) = 0$.
- Soit $x \neq 0$. On a $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset B$. Ainsi $2\|x\|/r \in I_x$ et I_x est non vide et $N(x)$ existe et est positive ou nulle.
- On remarque (pas obligatoire mais c'est bien plus pratique) que I_x est un intervalle infinie à droite. En effet, si $x/\lambda \in B$, alors par convexité entre ce vecteur et 0, tout le segment $[0, x/\lambda]$ est dans B et pour tout $\mu \geqslant \lambda$, $x/\mu \in B$. Il est soit $]N(x), +\infty]$, soit $[N(x), +\infty[$. On vérifie que $N(x) \in I_x$: on a $x_n = \frac{x}{N(x) + 1/n} \in B$ car $N(x) + \frac{1}{n} \in I_x$. On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{x}{N(x)}$ et cette limite est dans B car B est fermé. On en déduit que pour tout $x \neq 0$, $I_x = [N(x), +\infty[$.
- Supposons que $N(x) = 0$. Pour tout $\lambda > 0$, $x/\lambda \in B$. Soit un majorant des normes des éléments de B. On a $\|x\|/\lambda \leqslant M$ donc $N(x) \leqslant M\lambda$ pour tout $\lambda > 0$. Ainsi $x = 0$.
- homogénéité : soit $y = \mu x$ avec $\mu > 0$ pour l'instant. On a $y/\lambda \in B$ si et seulement si $\frac{\mu}{\lambda}x \in B$, ce qui revient à dire que $\lambda \in I_y$ si et seulement si $\lambda/\mu \in I_x$ ou $\lambda \in \mu.I_x$. On a donc $I_y = \mu I_x$ et $N(y) = N(\mu x) = \mu N(x)$ (borne inférieur de I_y). Par symétrie, $N(-y) = N(y)$ et on obtient l'homogénéité.
- inégalité triangulaire : soient x, y non nuls (si l'un est nul, c'est immédiat). On a
$$\frac{x+y}{N(x)+N(y)} = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)}$$
Les vecteurs $x/N(x)$ et $y/N(y)$ sont dans B et par convexité $\frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in B$. On a donc $N(x)+N(y) \in I_{x+y}$ et $N(x+y) \leqslant N(x)+N(y)$.

On a montré que N est une norme. On montre ensuite que B est la boule unité fermée :

- Si $x \in B$, alors $1 \in I_x$ donc $N(x) \leqslant 1$,
- si $N(x) \leqslant 1$ (et $x \neq 0$), alors $x = N(x)\frac{x}{N(x)} = N(x)\frac{x}{N(x)} + (1 - N(x)).0_E$. Par convexité, $x \in B$.

On a bien montré que $x \in B$ si et seulement si $N(x) = 1$.

Exercice 17

On note, lorsque cela existe, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - (1 - e^{-n})^x\right)$ et $f_n(x) = 1 - (1 - e^{-n})^x$. Par développement limité (ou équivalent usuel de $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$), on obtient un équivalent du terme général de la série en xe^{-n}, ce qui garantit la converge de la série si $x > 0$.

On effectue une comparaison série intégrale. Soit $x > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, $1 - e^{-t} \in [0, 1]$ et $t \mapsto (1 - e^{-t})^x$ est croissante et $t \mapsto 1 - (1 - e^{-t})^x$ est décroissante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(1 - (1 - e^{-(n+1)}))^x \leqslant \int_n^{n+1} (1 - (1 - e^{-t}))^x \mathrm{d}t \leqslant (1 - (1 - e^{-n}))^x$$
On a donc, en sommant pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient
$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \int_0^{+\infty} 1 - (1 - e^{-t})^x \mathrm{d}t \leqslant f(x).$$
Il suffit donc de trouver un équivalent de l'intégrale pour avoir celui de $f(x)$ (enfin si 1 est négligeable devant cet équivalent... ce qui va être le cas).

On note $g(x) = \int_0^{+\infty} 1 - (1 - e^{-t})^x \mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable « $u = 1 - e^{-t}$ » ($\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$), ce qui donne, avec $\mathrm{d}u = e^{-t}\mathrm{d}t$ ou $\mathrm{d}t = \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u$,
$$g(x) = \int_0^1 \frac{1 - u^x}{1 - u}\mathrm{d}u$$
On a, pour $m \in \mathbb{N}^*$,
$$g(m) = \int_0^1 \frac{1 - u^m}{1 - u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \sum_{k=0}^{m-1} u^k \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} = H_m$$

où $H_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$. On a $H_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \ln m$. La fonction g est directement croissante. On note $m = \lfloor x \rfloor$, on a $g(m) \leqslant g(x) \leqslant g(m+1)$. On a également $\ln m \leqslant \ln x \leqslant \ln(m+1)$ et finalement

$$\frac{H_m}{\ln(m+1)} \leqslant \frac{g(x)}{\ln x} \leqslant \frac{H_{m+1}}{\ln m}$$

avec $m = \lfloor x \rfloor$. Par encadrement, on obtient $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\ln x} = 1$. Cela donne l'équivalent recherché.

Exercice 18

a) Partitionnons le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ selon l'ordre de ses éléments. Les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont d'ordre d sont les générateurs de l'unique sous-groupe cyclique à d éléments. Il y en a donc $\varphi(d)$. Par cardinalité on obtient

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

b) Décomposons n en produit de facteurs premiers : $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Comme μ n'est non nulle qu'en les entiers sans facteur carré, on aura pour valeur de la somme la somme des $\mu(d)$ lorsque d est de la forme $p_{i_1} \dots p_{i_k}$, auquel cas $\mu(d) = (-1)^k$. Comme cette valeur ne dépend que du choix de k entiers p_i parmi les r diviseurs premiers de n, on a finalement

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k = (1-1)^r = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \text{ car alors } r = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

c) Soit $x \geqslant 1$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\#\{p/q \in]0,1] : q \leqslant x\} &= \sum_{q\leqslant x} \sum_{\substack{p\leqslant q \\ \mathrm{pgcd}(p,q)=1}} 1 = \sum_{q\leqslant x} \sum_{p\leqslant q} \sum_{d|\mathrm{pgcd}(p,q)} \mu(d) \\
&= \sum_{q\leqslant x} \sum_{d|q} \frac{q}{d} \mu(d) \text{ car le nombre de multiples de } d \text{ inférieurs à } q \text{ est } \frac{q}{d} \\
&= \sum_{d\leqslant x} \sum_{k\leqslant x/d} k\mu(d) = \sum_{d\leqslant x} \frac{\mu(d)}{2} \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \right)
\end{aligned}$$

En utilisant $\lfloor y \rfloor = y + \varepsilon(y)$ avec $|\varepsilon(y)| < 1$ pour tout y, on obtient

$$\#\{p/q \in]0,1] : q \leqslant x\} = \frac{x^2}{2} \sum_{d\leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x \sum_{d\leqslant x} \frac{1}{d} \right)$$

Or

$$\sum_{d\leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^2} \quad \text{avec} \quad \left| \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leqslant \sum_{d>x} \frac{1}{d^2} \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$$

Par ailleurs, il est bien connu (on peut à nouveau comparer à une intégrale) que

$$\sum_{d\leqslant x} \frac{1}{d} \sim \ln x \text{ quand } x \to +\infty$$

Ainsi, on a montré que

$$\#\{p/q \in]0,1] : q \leqslant x\} = \frac{x^2}{2} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x \ln x)$$

Si $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est une fonction arithmétique, on note D_f sa série de Dirichlet associée, à savoir, pour les valeurs de s qui rendent convergente la série,

$$D_f : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Grâce au théorème de sommation par paquets appliqué à la famille double $\left(\frac{\mu(k)}{k^2 l^2} \right)_{k,l\geqslant 1}$,

$$D_\mu(2)\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d) = 1$$

de sorte que

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

On a bien obtenu l'estimation demandée, à savoir

$$\#\{p/q \in]0,1] : q \leqslant x\} = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$$

Exercice 19

a) On vérifie assez facilement que $(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}],+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$. On a

$$(a+ib\sqrt{2})(c+id\sqrt{2}) = (ac-2bd) + i\sqrt{2}(ad+bc) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$$

et qu'ainsi $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

b) On s'inspire de la conjugaison complexe (et du module). On essaie de prendre $N(a+ib\sqrt{2}) = a^2+2b^2 \in \mathbb{N}$. Si $z = a+i\sqrt{2}$ alors $N(z) = z\overline{z}$ (c'est simplement le carré du module usuel). Trouver un tel couple revient à obtenir

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

avec $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et $N(r/b) < 1$. On note $z = \frac{a}{b}$. C'est un complexe. S'il est dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, on prend $q = z$ et $r = 0$. Sinon, on pose $\alpha = \lfloor \mathrm{Re}(z) \rfloor$ et $\beta = \lfloor \mathrm{Im}(z)/\sqrt{2} \rfloor$. On cherche parmi les quatre complexes $\alpha + i\beta\sqrt{2}$, $(\alpha+1)+i\beta\sqrt{2}$, $\alpha + i(\beta+1)\sqrt{2}$ et $(\alpha+1)+i(\beta+1)\sqrt{2}$ si l'un d'eux est à une distance strictement à 1 de z (le mieux est de faire un dessin : on représente les points de $Z[i\sqrt{2}]$ dans le plan complexe, on a z dans le rectangle délimité par ces 4 points de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$). Le point z' au centre du rectangle vérifie $N(z'-(\alpha+i\beta\sqrt{2})) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$. Si z est dans ce rectangle et $\tilde{z}$ le plus proche des 4 sommets, on a $N(z-\tilde{z}) < 1$. On choisit ce point $q = \tilde{z}$ (il n'est pas forcément unique). On a alors $\frac{a}{b} - q = y$ avec $N(y) < 1$ et $a = bq + r$ avec $r = yb$ et $N(r) < N(b)$. De plus a, b et q étant dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $r = a - bq$ l'est aussi. On a donc bien cette division euclidienne (sans unicité).

c) On prouve alors l'existence d'une décomposition en facteurs irréductible, par récurrence sur $N(a)$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des éléments de $Z[i\sqrt{2}]$ qui sont irréductibles : ceux qui sont divisibles uniquement par ± 1 et $\pm$ lui-même (on vérifie que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont ± 1, par exemple avec N : si $zz' = 1$ alors $N(z)N(z') = 1$ donc $N(z) = 1$ et $z = \pm 1$)
   - si $N(z) = 1$ alors $z = \pm 1$.
   - si tout élément z avec $N(z) \leqslant n$ se décompose en produits d'irréductibles. Soit z tel que $N(z) = n+1$ (il n'y en a pas forcément). Si z est irréductible, c'est fini. Sinon il admet un facteur z_1 et $z = z_1 z_2$ avec $N(z_1) \geqslant 2$. On a alors $N(z_2) = \frac{n+1}{2} \leqslant n$ car $n \geqslant 1$. L'élément z_2 se décompose en produits d'irréductibles et z aussi.

   Pour l'unicité, c'est le même principe que dans $\mathbb{N}$: on doit démontrer que si un irréductible divise un produit, alors il divise l'un des facteurs. Par récurrence, il suffit de le faire pour 2 : si $p|(ab)$ alors $p|a$ ou $p|b$. On note $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
   - $\mathcal{A}$ est un anneau principal (grâce à la division euclidienne - comme avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{K}[X]$)
   - soit $a \in \mathcal{A}$ et p un irréductible de $\mathcal{A}$. Le plus petit idéal contenant a et p est principal donc il existe q tel que $(a,p) = (q)$. Notamment $q|p$ donc $q = \pm 1$ ou $q|\pm p$. Soit $q = \pm 1$ dans ce cas a et p sont premiers entre eux (s'ils ont un diviseur commun, ce diviseur divise q), soit $p|a$.
   - on en déduit que si $p|ab$ et p ne divise pas a alors p et a sont premiers entre eux, une relation de Bezout puis $p|b$.

   Une fois cela fait, si on a deux décomposition en irréductibles d'un même élément :

$$p_1 p_2 \dots p_n = u q_1 q_2 \dots q_m$$

   avec u unitaire (donc ± 1 ici) alors $m = n$ et les termes sont identiques à une permutation près.

- *Remarque :* ce n'est plus le cas avec $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$: on a par exemple $4 = 2 \times 2 = (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$ - quel point de la démonstration est en défaut ?
- *Remarque 2* : c'est un résultat général sur les anneaux où euclidien $\Rightarrow$ principal $\Rightarrow$ factoriel

Exercice 20

a) Soit $t>0$. On a
$$e^{t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|}\leqslant e^{t|X_1|}+\cdots+e^{t|X_n|}\leqslant e^{tX_1}+\cdots+e^{tX_n}+e^{-tX_1}+\cdots+e^{-tX_n}$$
donc
$$\mathbf{E}\left(e^{t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|}\right)\leqslant 2ne^{t^2\sigma^2/2}$$
Comme $e^{t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|}\geqslant t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$, on déduit de cette majoration que $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$ est d'espérance finie. On va maintenant minorer l'espérance grâce à l'inégalité de Jensen. Rappelons la démonstration de cette inégalité dans le cas particulier qui nous intéresse. La fonction $\varphi : u\mapsto e^{tu}$ est convexe. Si $a\in\mathbb{R}$, on a
$$\forall u\in\mathbb{R},\quad \varphi(u)\geqslant\varphi(a)+\varphi'(a)(u-a)$$
donc
$$e^{t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|}\geqslant e^{ta}+te^{ta}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|-a\right).$$
Par croissance de l'espérance
$$\mathbf{E}\left(e^{t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|}\right)\geqslant e^{ta}+te^{ta}\left(\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\right)-a\right).$$
Pour $a=\mathbf{E}(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|)$, on obtient
$$\mathbf{E}\left(e^{t\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|}\right)\geqslant e^{t\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\right)}$$
De (1) et (2), on déduit :
$$\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\quad \mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\right)\leqslant\frac{\ln(2n)}{t}+\frac{t\sigma^2}{2}.$$
Le minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$ de
$$\psi : t\mapsto\frac{\ln(2n)}{t}+\frac{t\sigma^2}{2}$$
est atteint en $\dfrac{\sqrt{2\ln(2n)}}{\sigma}$ et est égal à $\sqrt{2}\sigma\sqrt{\ln(2n)}$. On a donc
$$\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\right)\leqslant\sqrt{2}\sigma\sqrt{\ln(2n)}$$
et la constante $C=\sqrt{2}$ vérifie la condition.

b) Nous poserons, si $t\in\mathbb{R}$,
$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-(k-t)^2/2}$$
On a, si $t\in\mathbb{R}$
$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)=\frac{1}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}e^{-k^2/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{tk-k^2/2}=\frac{1}{\varphi(0)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-(k-t)^2/2}e^{t^2/2}=\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}e^{t^2/2}$$
La propriété désirée s'écrit
$$(3)\qquad\forall t\in\mathbb{R},\quad\varphi(t)\leqslant\varphi(0).$$
Nous démontrerons (3) en donnant une autre expression de φ, à savoir son développement en série de Fourier 1-périodique. La rédaction ci-dessous s' appuie uniquement sur le théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique, à travers le lemme suivant.

Lemme 1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et 1-périodique. Pour $n\in\mathbb{Z}$, soit
$$c_n(f)=\int_0^1 f(u)e^{-2i\pi nu}\mathrm{d}u$$

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nx}$$

Preuve. En posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nx}$$

on définit une fonction continue (convergence normale sur $\mathbb{R}$), 1-périodique, telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_n(g)$$

Ainsi, si $h = f - g$ alors h est continue, 1-périodique et, pour tout polynôme trigonométrique p,

$$\int_0^1 h\overline{p} = 0$$

En prenant une suite $(p_k)_{k\geqslant 0}$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers h, il vient $\int_0^1 |h|^2 = 0$ d'où, puisque $|h|^2$ est continue et positive, $h = 0$ sur $[0,1]$, puis, par 1-périodicité, $h = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Si $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(\varphi) = \int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k-t)^2/2}\right) e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t$$

La convergence normale sur $[0,1]$, laissée au lecteur, entraîne que

$$c_n(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-(k-t)^2/2} e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t$$

On effectue, dans l'intégrale, le changement de variable $u = k - t$. Il vient, par 2π-périodicité de l'exponentielle :

$$c_n(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k-1}^{k} e^{-u^2/2} e^{2i\pi nu}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} e^{2i\pi nu}\mathrm{d}u$$

Mais il est classique, et facile à démontrer par dérivation d'intégrale à paramètre, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} e^{-ixu}\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2}$$

(transformée de Fourier d'une gaussienne). Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\varphi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2 n^2}$$

Grâce au lemme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2 n^2} e^{2i\pi nx} = \sqrt{2\pi} + 2\sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi^2 n^2} \cos(2\pi nx)$$

Le fait que les coefficients $c_n(\varphi)$ soient dans $\mathbb{R}^+$ donne immédiatement (3).