ENS MP C 2023

I

1. (a) Par définition ϕ_0 reste à valeurs dans l'ouvert $\Omega =]0,+\infty[$ donc $\phi_0 > 0$. On a $\phi_0(0) = y_{init} < \theta$ donc par continuité de ϕ_0 en 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [0,\varepsilon]$, $\phi_0(t) < \theta$. On en déduit que $\frac{\theta}{\phi_0(t)} > 1$ puis $\phi_0'(t) = a\phi_0(t)\ln\left(\frac{\theta}{\phi_0(t)}\right) > 0$ pour $t \in [0,\varepsilon]$, ainsi ϕ_0 est strictement croissante sur $[0,\varepsilon]$, donc $\forall t \in]0,\varepsilon]$, $\phi_0(t) > \phi_0(0) = y_{init}$.

   (b) Vu $\phi_0 > 0$, on peut poser $z_0 = \ln(\phi_0/\theta)$, fonction dérivable par composition. On note que $\phi_0'/\phi_0 = z_0'$, ainsi l'égalité $\phi_0' = a\phi_0 \ln\left(\frac{\theta}{\phi_0}\right)$ équivaut à $z_0' = -az_0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$ et la condition initiale impose $\lambda = \ln(y_{init}/\theta)$. Ainsi nécessairement

$$\forall t \geqslant 0,\ \phi_0(t) = \theta \exp\left(\mathrm{e}^{-at}\ln\left(\frac{y_{init}}{\theta}\right)\right) = \theta\left(\frac{y_{init}}{\theta}\right)^{\mathrm{e}^{-at}}.$$

   Remarque : ce calcul prouve l'unicité, et en testant la formule obtenue, on constate que c'est une solution globale du problème de Cauchy, d'où l'existence. On n'a donc pas besoin du résultat admis par l'énoncé.

   (c) L'argument de l'exponentielle étant strictement négatif, on a $\forall t \geqslant 0$, $\phi_0(t) < \theta$. On en déduit comme en (a) que ϕ_0 est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc $\forall t > 0$, $\phi_0(t) > \phi_0(0) = y_{init}$.

2. On a $\phi_\mu > 0$ donc on peut poser $z = \phi_\mu^{-\mu} = \exp(-\mu \ln \phi_\mu)$. En dérivant $\ln z = -\mu \ln \phi_\mu$ on obtient $\dfrac{z'}{z} = -\mu\dfrac{\phi_\mu'}{\phi_\mu}$ puis

$$\frac{\phi_\mu'}{\phi_\mu} = \frac{a}{\mu}\left(1 - \frac{\phi_\mu^\mu}{\theta^\mu}\right) \iff -\frac{1}{\mu}\frac{z'}{z} = \frac{a}{\mu}\left(1 - \frac{\theta^{-\mu}}{z}\right) \iff z' = -a(z - \theta^{-\mu})$$

ce qui est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre en la fonction $\tilde{z} = z - \theta^{-\mu}$. Avec $\phi_\mu(0) = y_{init}$ on obtient $z - \theta^{-\mu} = (y_{init}^{-\mu} - \theta^{-\mu})\exp(-at)$ soit encore

$$\phi_\mu(t) = \left(\theta^{-\mu}(1 - \mathrm{e}^{-at}) + y_{init}^{-\mu}\mathrm{e}^{-at}\right)^{-1/\mu}.$$

Remarque : on constate que cette fonction est bien définie, puisque $\theta^{-\mu}(1 - e^{-at}) + y_{init}^{-\mu}e^{-at} \geqslant y_{init}^{-\mu}e^{-at} > 0$, et en remontant les calculs on voit qu'elle est solution du problème de Cauchy. Finalement, on a démontré l'existence et l'unicité d'une solution globale.

En factorisant $\theta^{-\mu}$ on obtient aussi

$$\forall t \geqslant 0,\ \phi_\mu(t) = \theta\left(1 + \left(\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)^\mu - 1\right)\mathrm{e}^{-at}\right)^{-1/\mu}.$$

3. (a) Soit $y > 0$. $F_\mu(y) = \frac{a}{\mu}y\left(1 - \left(\frac{y}{\theta}\right)^\mu\right) = \frac{a}{\mu}y\left(1 - \exp\left(\mu\ln\left(\frac{y}{\theta}\right)\right)\right)$ or $\mu\ln\left(\frac{y}{\theta}\right) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$ et $1 - \mathrm{e}^u \sim -u$ en 0, donc $F_\mu(y) \sim -\frac{a}{\mu}y\mu\ln\left(\frac{y}{\theta}\right) = -ay\ln\left(\frac{y}{\theta}\right) = F_0(y)$. Ainsi $F_\mu(y) \xrightarrow[\mu\to 0]{} F_0(y)$.

   (b) Soit $t \geqslant 0$. On a

$$\phi_\mu(t) = \theta\left(1 + \left(\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)^\mu - 1\right)\mathrm{e}^{-at}\right)^{-1/\mu} = \theta\exp\left(-\frac{1}{\mu}\ln\left\{1 + \left(\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)^\mu - 1\right)\mathrm{e}^{-at}\right\}\right)$$

   or quand μ tend vers 0,

$$\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)^\mu - 1 = \exp\left(\mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)\right) - 1 \sim \mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)$$

donc en utilisant le fait que $\ln(1+u) \sim u$ en 0, on obtient

$$-\frac{1}{\mu}\ln\left\{1+\left(\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right)^{\mu}-1\right)\mathrm{e}^{-at}\right\} \sim -\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-at}\mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{init}}\right) = \mathrm{e}^{-at}\ln\left(\frac{y_{init}}{\theta}\right).$$

Ainsi $\phi_\mu(t) \xrightarrow[\mu\to 0]{} \theta\exp\left(\mathrm{e}^{-at}\ln\left(\frac{y_{init}}{\theta}\right)\right) = \phi_0(t)$.

II

1. Déjà B est inclus dans $C(K,\mathbb{R}^d)$ car toute fonction lipschitzienne est continue. Fixons $x \in K$ et montrons que B est équicontinue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $r = \varepsilon/k$, réel strictement positif, alors $\forall f \in B$, $\forall y \in B(x,r)\cap K$, $\|f(x)-f(y)\| \leqslant k\|x-y\| \leqslant k\times(\varepsilon/k) = \varepsilon$. Ainsi B est équicontinue en chaque point $x \in K$.

2. Soit $A \subset C(K,\mathbb{R}^d)$.

   ($\Rightarrow$) Supposons A relativement compacte, disons incluse dans le compact $X \subset C(K,\mathbb{R}^d)$. Soit une suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$. C'est aussi une suite d'éléments du compact X, donc elle admet une sous-suite convergente vers un élément f de X. Dès lors $f \in C(K,\mathbb{R}^d)$, et la convergence dans l'espace $C(K,\mathbb{R}^d)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est une convergence uniforme sur K.

   ($\Leftarrow$) Supposons que toute suite de A admet une sous-suite qui converge uniformément vers un élément de $C(K,\mathbb{R}^d)$. Considérons $X = \overline{A}$ l'adhérence de A dans l'espace $C(K,\mathbb{R}^d)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et montrons que X est compact. Soit $(f_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $g_n \in A \cap B(f_n, 2^{-n})$ car f_n est adhérent à A. Ceci fournit une suite $(g_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui admet donc par hypothèse une sous-suite $(g_{\varphi(n)})$ convergente vers un élément g de $C(K,\mathbb{R}^d)$; $g \in X = \overline{A}$ en tant que limite d'une suite d'éléments de A. On a

   $$\|f_{\varphi(n)} - g\|_\infty \leqslant \|f_{\varphi(n)} - g_{\varphi(n)}\|_\infty + \|g_{\varphi(n)} - g\|_\infty \leqslant 2^{-\varphi(n)} + \|g_{\varphi(n)} - g\|_\infty$$

   donc $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$. Ainsi toute suite $(f_n) \in X^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ convergente vers un élément de X, autrement dit X est compact. La partie A, incluse dans X, est donc relativement compacte.

   Remarque : cette étude montre que A est relativement compacte ssi son adhérence est compacte.

3. Supposons A est relativement compacte. Supposons par l'absurde que A n'est pas équicontinue. On écrit la négation de l'équicontinuité, en considérant des réels r du type $r = 2^{-n}$. Il existe un point $x \in K$ et un réel $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in A$ et $y_n \in B(x, 2^{-n})\cap K$ tels que $\|f_n(x) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0$. Notons que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Avec la question (2), on peut extraire $(f_{\varphi(n)})$ convergente vers une fonction $f \in C(K,\mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec l'inégalité triangulaire on a

   $$\varepsilon_0 < \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \leqslant \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y_{\varphi(n)})\| + \|f(y_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\|$$

   puis $\varepsilon_0 < 2\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty + \|f(x) - f(y_{\varphi(n)})\|$, quantité qui converge vers 0 vu la convergence uniforme de $(f_{\varphi(n)})$ et la continuité de f au point x. À la limite on obtient $\varepsilon_0 \leqslant 0$, une contradiction. Ceci achève le raisonnement.

4. Supposons A relativement compacte, disons $A \subset X$ avec X compact de $C(K,\mathbb{R}^d)$. La question (3) donne déjà l'équicontinuité de A. Soit $x \in K$. L'application $S_x : C(K,\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ définie par $f \mapsto f(x)$ est linéaire avec $\forall f \in C(K,\mathbb{R}^d)$, $\|S_x(f)\| = \|f(x)\| \leqslant \|f\|_\infty$ donc par théorème S_x est continue. Il en résulte que $S_x(X)$ est compact comme image continue d'un compact, en particulier borné, ainsi $A(x) = \{f(x),\ f \in A\} = S_x(A) \subset S_x(X)$ est borné. La partie A vérifie donc la propriété $(P2)$.

5. (a) • On extrait tout d'abord de $(f_n(x_0))$ une suite $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))$ convergente vers un $y_0 \in \mathbb{R}^d$, en effet $f_n(x_0) \in A(x_0)$ partie bornée vu $(P2)$, par conséquent incluse dans une boule fermée de $\mathbb{R}^d$ donc compacte. On pose $\psi_0 = \varphi_0$.

   • On considère alors la suite $(f_{\psi_0(n)}(x_1))$, évoluant dans la partie bornée $A(x_1)$. On en extrait de même une suite $(f_{\psi_0(\varphi_1(n))}(x_1))$ convergente vers un $y_1 \in \mathbb{R}^d$. On pose $\psi_1 = \psi_0 \circ \varphi_1$.

• On itère : ayant construit des extractrices $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ et $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ ainsi que des vecteurs $y_0, y_1, \dots, y_{p-1} \in \mathbb{R}^d$ tels que $\forall j < p$, $\psi_j = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_j$ et $f_{\psi_j(n)}(x_j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_j$, on considère la suite $(f_{\psi_{p-1}(n)}(x_p))$, évoluant dans la partie bornée $A(x_p)$. On en extrait une suite $(f_{\psi_{p-1}(\varphi_p(n))}(x_p))$ convergente vers un $y_p \in \mathbb{R}^d$. On pose $\psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p$, donc $f_{\psi_p(n)}(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_p$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n > p$, $\psi_n(n) = (\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n)(n) = (\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p)(k_n) = \psi_p(k_n)$ où

$$k_n = (\varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n)(n).$$

Par le cours, on sait que $\forall i, q \in \mathbb{N}$, $\varphi_i(q) \geqslant q$, donc $k_n \geqslant n$. Puisque $f_{\psi_p(n)}(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_p$, il en découle par composition que $f_{\psi_n(n)}(x_p) = f_{\psi_p(k_n)}(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_p$.

6. *On supposera désormais, pour toute la fin de cette partie, que K est un segment non réduit à un point. En effet le raisonnement par densité suggéré par l'énoncé ne fonctionne pas pour un compact K quelconque de $\mathbb{R}$.*

(a) $\mathbb{Q} \cap K$ est une partie de $\mathbb{Q}$, ensemble au plus dénombrable, donc $\mathbb{Q} \cap K$ est au plus dénombrable, et par ailleurs non vide. Il existe donc une surjection $p \mapsto x_p$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap K$, ainsi $\mathbb{Q} \cap K = \{x_p,\ p \in \mathbb{N}\}$. En appliquant la construction précédente on obtient $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_{\psi_n(n)}(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_p$.

Montrons que $\theta : n \mapsto \psi_n(n)$ est une extractrice. C'est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Elle est strictement croissante : soient $m < n$ dans $\mathbb{N}$. Alors $\psi_n(n) = (\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m)(k) = \psi_m(k)$ où $k = (\varphi_{m+1} \circ \dots \circ \varphi_n)(n)$. On a $k \geqslant n$ donc $k > m$, or $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m$ est strictement croissante (comme composée de telles applications), donc $(\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m)(k) > (\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m)(m)$ soit $\psi_n(n) > \psi_m(m)$.

La suite $(f_{\theta(n)}(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{Q} \cap K$, ce qui est la convergence simple attendue.

(b) Soit $x \in K$. Supposons que $g_{\varphi_1(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_1$ et $g_{\varphi_2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_2$ et montrons qu'alors $y_1 = y_2$. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $r > 0$, donné par l'équicontinuité, tel que $\forall f \in A$, $\forall x' \in B(x,r) \cap K$, $\|f(x) - f(x')\| \leqslant \varepsilon/2$. K est un segment non réduit à un point, donc x est adhérent à $\mathbb{Q} \cap K$. Fixons $x' \in B(x,r) \cap \mathbb{Q} \cap K$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g_{\varphi_1(n)}(x) - g_{\varphi_1(n)}(x')\| \leqslant \varepsilon/2$. D'après (a) la suite $(g_n(x'))$ converge, disons vers y. En passant à la limite dans l'inégalité précédente on a $\|y_1 - y\| \leqslant \varepsilon/2$. On obtient symétriquement $\|y_2 - y\| \leqslant \varepsilon/2$, puis par inégalité triangulaire $\|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y\| + \|y - y_2\| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\|y_1 - y_2\|$ est inférieur à tout réel $\varepsilon > 0$, donc $\|y_1 - y_2\| = 0$ soit $y_1 = y_2$.

On peut maintenant affirmer que la suite $(g_n(x))$ admet au plus une valeur d'adhérence, or ses termes appartiennent à un compact puisque $A(x)$ est supposé borné. Par théorème, la suite $(g_n(x))$ est convergente. La suite de fonctions (g_n) converge donc simplement sur K vers une certaine fonction g.

7. (a) Soit $x \in K$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $r > 0$, vu l'équicontinuité, tel que $\forall f \in A$, $\forall y \in B(x,r) \cap K$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$. Soit $y \in B(x,r) \cap K$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g_n(x) - g_n(y)\| \leqslant \varepsilon$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\|g(x) - g(y)\| \leqslant \varepsilon$.

En résumé, $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$; $\forall y \in B(x,r) \cap K$, $\|g(x) - g(y)\| \leqslant \varepsilon$ d'où la continuité de g au point x.

(b) Supposons que (g_n) ne converge pas uniformément sur K vers g. On dispose d'un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 0,\ \exists m \geqslant n,\ \exists x_m \in K\ ;\ \|g_m(x_m) - g(x_m)\| > \varepsilon_0.$$

Il existe donc une infinité de tels m, d'où une extractrice φ telle que $\forall n \geqslant 0$, $\|g_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - g(x_{\varphi(n)})\| > \varepsilon_0$. Comme K est compact, il existe une extractrice ψ telle que $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, un élément de K.

Notons $x'_n = x_{\varphi(\psi(n))}$ et $g'_n = g_{\varphi(\psi(n))}$ ainsi $x'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et (g'_n) converge simplement vers g.

• Soit $r > 0$ (équicontinuité) tel que $\forall f \in A$, $\forall y \in B(x,r) \cap K$, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon_0/3$, puis soit n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $x'_n \in B(x,r)$, ce qui garantit donc que $\|g'_n(x'_n) - g'_n(x)\| < \varepsilon_0/3$.

• Vu la convergence simple, soit n_2 tel que $\forall n \geqslant n_2$, $\|g'_n(x) - g(x)\| < \varepsilon_0/3$.

• Vu la continuité de g au point x, soit n_3 tel que $\forall n \geqslant n_3$, $\|g(x) - g(x'_n)\| < \varepsilon_0/3$.

Fixons $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Alors

$$\|g'_n(x'_n) - g(x'_n)\| \leqslant \|g'_n(x'_n) - g'_n(x)\| + \|g'_n(x) - g(x)\| + \|g(x) - g(x'_n)\| < \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0/3 = \varepsilon_0$$

alors que par construction $\|g'_n(x'_n) - g(x'_n)\| > \varepsilon_0$: contradiction. On a ainsi prouvé par l'absurde que (g_n) converge uniformément sur K vers g.

(c) Sous l'hypothèse $(P2)$ on a montré que toute $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite (g_n) qui converge uniformément sur K vers une fonction $g \in C(K, \mathbb{R}^d)$. D'après la question (2), A est relativement compacte, propriété notée $(P1)$. Ainsi $(P2) \Rightarrow (P1)$.

Le théorème 1 que l'on vient d'établir est une version du théorème d'Ascoli.

III

1. Comme $y_{init} \in \Omega$ ouvert, fixons $r > 0$ tel que $B_r \subset \Omega$. B_r étant un compact de $\mathbb{R}^d$, la fonction continue F reste bornée sur B_r. Soit donc $\mu > 0$ tel que $\forall x \in B_r$, $\|F(x)\| \leqslant \mu$. Posons alors $T = r/\mu$.

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Notons $\Delta t = T/N$. On pose $y_0 = y_{init}$, puis $y_1 = y_0 + \Delta t \times F(y_0)$, bien défini car $y_0 \in \Omega$. On note que $\|y_1 - y_0\| \leqslant \Delta t \times \mu = r/N$, en particulier $y_1 \in B_r \subset \Omega$ donc $F(y_1)$ est bien défini.

   On poursuit la construction ainsi : ayant pour $n < N$ défini $y_0, \ldots, y_n$ tels que $\|y_k - y_0\| \leqslant kr/N$ pour tout $k \leqslant n$, vérifiant $y_0 = y_{init}$ et $y_{k+1} = y_k + \Delta t \times F(y_k)$ pour tout $k < n$, on pose $y_{n+1} = y_n + \Delta t \times F(y_n)$, bien défini car $y_n \in B_r \subset \Omega$, alors $\|y_{n+1} - y_0\| \leqslant \|y_{n+1} - y_n\| + \|y_n - y_0\| \leqslant \Delta t \times \mu + nr/N = (n+1)r/N$.

   On obtient une suite finie $(y_0, y_1, \ldots, y_N)$ ayant les propriétés demandées.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On notera $t_n = n \times \Delta t$, en étant conscient que t_n dépend aussi de N.

   Unicité : supposons ϕ_N continue sur $[0, T]$, affine sur les intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, avec $\phi_N(t_n) = y_n$ pour tout $n \leqslant N$. Soit $n < N$. Pour $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$, $\phi_N(t) = ta_n + b_n$. En testant en t_n et t_{n+1} on obtient $y_n = t_n a_n + b_n$ et $y_{n+1} = t_{n+1}a_n + b_n$. La différence fournit $y_{n+1} - y_n = \Delta t \times a_n$ or $y_{n+1} - y_n = \Delta t \times F(y_n)$ donc $a_n = F(y_n)$. On en déduit $b_n = y_n - t_n a_n = y_n - t_n F(y_n)$. Finalement

   $$\forall t \in [t_n, t_{n+1}],\ \phi_N(t) = y_n + (t - t_n)F(y_n).$$

   Existence : pour tout $t \in [0, T[$, soit n l'unique entier tel que $t_n \leqslant t < t_{n+1}$. On a $0 \leqslant n < N$. Définissons

   $$\phi_N(t) = y_n + (t - t_n)F(y_n).$$

   Posons enfin $\phi_N(T) = y_N$. On a en particulier $\phi_N(t_n) = y_n$ pour tout $n \leqslant N$. On en déduit que $\forall n < N$, $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$, $\phi_N(t) = y_n + (t - t_n)F(y_n)$. La fonction ainsi définie est donc affine sur les intervalles fermés $[t_n, t_{n+1}]$, et continue en tout point vu les limites à gauche et à droite en chaque t_n. Cette fonction ϕ_N convient.

   En notant que $y_{n+1} - y_n = \Delta t \times F(y_n)$ on obtient une nouvelle expression :

   $$\forall n < N, \forall t \in [t_n, t_{n+1}],\ \phi_N(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} y_n + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} y_{n+1}.$$

3. Avec le théorème 1 pour $K = [0, T]$, il suffit que la partie $A = \{\phi_N,\ N \in \mathbb{N}^*\}$ vérifie la propriété $(P2)$.

   • Puisque $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$, $\phi_N(t) \in [y_n, y_{n+1}]$ et $y_n, y_{n+1} \in B_r$, convexe, on a $\phi_N(t) \in B_r$ donc pour tout $t \in [0, T]$, $A(t) = \{\phi_N(t),\ N \in \mathbb{N}^*\}$ est borné.

   • On a établi plus haut que $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$, $\phi_N(t) = y_n + (t - t_n)F(y_n)$ or $\|F(y_n)\| \leqslant \mu$ (constante), donc $(\phi_N)_{[t_n, t_{n+1}]}$ est μ-lipschitzienne. Pour $t < t'$ n'appartenant pas au même intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, on considère les t_k situés entre t et t'. Par inégalité triangulaire et télescopage on retrouve $\|\phi_N(t') - \phi_N(t)\| \leqslant \mu|t' - t|$. Ainsi ϕ_N est μ-lipschitzienne sur $[0, T]$. La question (II.1) permet alors d'affirmer que A est équicontinue.

4. On note toujours $t_n = n \times \Delta t$ (qui dépend aussi de N). Soit $\psi_N : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ telle que $\forall n > N$, $\forall t \in [t_n, t_{n+1}[$, $\psi_N(t) = y_N$ et $\psi_N(T) = y_N$. C'est une fonction en escalier qui coïncide avec ϕ_N en les points $t_0, \dots, t_N$. Lorsque $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$,
$$\int_{t_n}^t F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s = \int_{t_n}^t F(y_n)\,\mathrm{d}s = (t - t_n)F(y_n).$$
En particulier
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s = (t_{n+1} - t_n)F(y_n) = y_{n+1} - y_n.$$
Ainsi par Chasles
$$\begin{aligned}\int_0^t F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_n}^t F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} - y_i + (t - t_n)F(y_n) \\ &= y_n - y_{init} + (t - t_n)F(y_n) \\ &= \phi_N(t) - y_{init}.\end{aligned}$$

5. Soit $t \in [0,T[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Fixons l'entier n (dépendant de N) tel que $t_n \leqslant t < t_{n+1}$, alors $\phi_N(t) = y_n + (t - t_n)F(y_n)$ et $\psi_N(t) = y_n$ donc $\|\phi_N(t) - \psi_N(t)\| = |t - t_n|\|F(y_n)\| \leqslant \Delta t \times \mu$ ainsi $\|\phi_N(t) - \psi_N(t)\| \leqslant T\mu/N$. Ceci reste vrai pour $t = T$ donc $\|\phi_N - \psi_N\|_\infty \leqslant T\mu/N$.

   Par la question (3) il existe une sous-suite $(\phi_{\varphi(N)})$ qui converge uniformément sur $[0,T]$ vers la fonction continue ϕ, alors
$$\|\psi_{\varphi(N)} - \phi\|_\infty \leqslant \|\psi_{\varphi(N)} - \phi_{\varphi(N)}\|_\infty + \|\phi_{\varphi(N)} - \phi\|_\infty \leqslant T\mu/\varphi(N) + \|\phi_{\varphi(N)} - \phi\|_\infty$$
   donc $(\psi_{\varphi(N)})$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers ϕ.

6. Soit $t \in [0,T]$. Observons que $\phi(t) \in B_r$ car B_r est fermé. On part de l'égalité de la question (4), en remplaçant N par $\varphi(N)$, et on passe à la limite quand $N \to +\infty$. Le membre droit converge vers $\phi(t)$. Pour le membre gauche, on montre que $(F \circ \psi_{\varphi(N)})$ converge uniformément sur le segment $[0,T]$, donc sur $[0,t]$, vers $F \circ \phi$: soit $\varepsilon > 0$. Selon le théorème de Heine, F est uniformément continue sur le compact B_r, d'où l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in B_r$ verifiant $\|x - y\| \leqslant \delta$, $\|F(x) - F(y)\| \leqslant \varepsilon$. Par convergence uniforme, il existe N_0 tel que $\forall N \geqslant N_0$, $\forall t \in [0,T]$, $\|\psi_{\varphi(N)}(t) - \phi(t)\| \leqslant \delta$, ce qui entraîne $\|F(\psi_{\varphi(N)}(t)) - F(\phi(t))\| \leqslant \varepsilon$.

   Dès lors,
$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t F(\psi_{\varphi(N)}(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t F(\phi(s))\,\mathrm{d}s\right\| &= \left\|\int_0^t F(\psi_{\varphi(N)}(s)) - F(\phi(s))\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \int_0^t \left\|F(\psi_{\varphi(N)}(s)) - F(\phi(s))\right\|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant t \times \|F \circ \psi_{\varphi(N)} - F \circ \phi\|_\infty\end{aligned}$$
   donc $\int_0^t F(\psi_{\varphi(N)}(s))\,\mathrm{d}s \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_0^t F(\phi(s))\,\mathrm{d}s$.

   Remarque : on ne pouvait utiliser directement le théorème d'intégration d'une limite uniforme sur un segment, car ici les fonctions ne sont pas supposées continues.

   Ainsi le passage à la limite dans l'égalité du (4) est légitime. Par unicité de la limite, on en déduit que
$$\forall t \in [0,T],\ \phi(t) = y_{init} + \int_0^t F(\phi(s))\,\mathrm{d}s.$$
   On note que $\phi(0) = y_{init}$. La fonction $F \circ \phi$ est continue, donc $t \mapsto \int_0^t F(\phi(s))\,\mathrm{d}s$ est dérivable de dérivée $F \circ \phi$, ainsi ϕ est dérivable avec $\forall t \in [0,T]$, $\phi'(t) = F(\phi(t))$. Finalement (ϕ, T) est une solution du problème de Cauchy (1), ce qui prouve le théorème 2. *Il s'agit du théorème de Cauchy-Peano-Arzela.*

7. Pour des fonctions restant localement strictement positives : $y' = 3y^{2/3} \iff \frac{1}{3}y^{-2/3}y' = 1 \iff (y^{1/3})' = 1$ ce qui conduit à $y(t) = (t - \mathrm{cte})^3$. La fonction nulle est aussi solution.

   Avec ces remarques, on va construire une infinité de solutions globales, en sus de la fonction nulle. Soit $a > 0$. Soit $h_a : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h_a(t) = 0$ si $t \leqslant a$ et $h_a(t) = (t-a)^3$ sinon. Cette application est dérivable en tout point, y compris au point a : son taux d'accroissement $\frac{h_a(t)-h_a(a)}{t-a}$ vaut $(t-a)^2$ si $t > a$, et 0 si $t < a$, donc tend vers 0 en a. On obtient donc $h_a'(a) = 0$. La dérivation aux autres points est banale, et finalement

   - si $t \leqslant a$, $h_a'(t) = 0 = F(h_a(t))$;
   - si $t > a$, $h_a'(t) = 3(t-a)^2 = 3\,|h_a(t)|^{2/3} = F(h_a(t))$

   donc $h_a'(t) = F(h_a(t))$ pour tout $t \geqslant 0$ et $h_a(0) = 0$. Ces fonctions, distinctes deux à deux, sont des solutions globales du même problème de Cauchy.

IV

1. On suppose l'existence d'une telle constante C_K pour chaque compact K. Soient deux solutions maximales (X, T) et (Y, T'). On suppose, quitte à intervertir, que $T \leqslant T'$. Fixons θ tel que $0 < \theta < T$. La fonction

$$\delta = \|X - Y\|^2 = \langle X - Y, X - Y\rangle$$

   est continue sur $[0, \theta]$, C^1 par morceaux, avec $\delta'(t) = 2\,\langle X'(t) - Y'(t), X(t) - Y(t)\rangle$ sauf peut-être en un nombre fini de points $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_s = \theta$ sur $[0, \theta]$. On a alors $X'(t) \in \mathcal{F}(X(t))$ et $Y'(t) \in \mathcal{F}(Y(t))$. Les points $X(t)$ et $Y(t)$ appartiennent au compact $K = X([0, \theta]) \cup Y([0, \theta])$ donc on dispose de C_K (qui dépend de θ) et la condition (3) donne $\delta'(t) \leqslant 2C_K\delta(t)$.

   On forme alors $d(t) = \exp(-2C_K t)\delta(t)$ et on constate que $d'(t) \leqslant 0$ sur chaque intervalle ouvert $]\theta_i, \theta_{i+1}[$. La fonction continue d est donc décroissante sur les intervalles fermés $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, puis sur $[0, \theta]$. Comme d est positive et nulle en 0, vu $X(0) = y_{init} = Y(0)$, elle est nulle partout sur $[0, \theta]$. Ceci vaut pour tout θ tel que $0 < \theta < T$, donc $\forall t \in [0, T[$, $X(t) = Y(t)$. Ainsi (Y, T') prolonge (X, T), or cette dernière est une solution maximale du problème (2), donc par définition $(X, T) = (Y, T')$. Ceci prouve l'unicité d'une solution maximale du problème (2).

2. On peut se figurer les solutions dans le plan des (x_1, x_2) avec x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée. Notons D l'axe des ordonnées. Une solution $x : t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ se déplace dans le plan de telle sorte que :

   - lorsque le point $x(t)$ est à gauche de D, son vecteur vitesse vaut v^- et tend à le ramener sur l'axe D ;
   - lorsqu'il est à droite de D, son vecteur vitesse vaut v^+, et tend à le ramener sur l'axe D ;
   - sur l'axe D ce vecteur vitesse est autorisé à prendre des valeurs intermédiaires entre v^+ et v^-.

   (a) Pour vérifier la condition (3), on note le rôle symétrique de x et y. On calcule $\langle v_x - v_y, x - y\rangle$ lorsque $v_x \in \mathcal{F}(x)$ et $v_y \in \mathcal{F}(y)$ dans tous les cas de figure. Ce produit scalaire est nul lorsque x et y sont du même côté (strictement) de la droite D, strictement négatif si x et y sont de part et d'autre (strictement) de D. Il reste le cas où l'un des points est sur la droite D, disons $x_1 = 0$, sans perte de généralité :

   - Si $y_1 < 0$, $v_x - v_y = (u, 0)$ avec $u \leqslant 0$ donc $\langle v_x - v_y, x - y\rangle = u(x_1 - y_1) = -uy_1 \leqslant 0$.
   - Si $y_1 > 0$, $v_x - v_y = (u, 0)$ avec $u \geqslant 0$ donc $\langle v_x - v_y, x - y\rangle = u(x_1 - y_1) = -uy_1 \leqslant 0$.
   - Si $y_1 = 0$, $v_x - v_y = (u, 0)$ avec $u \in \mathbb{R}$ donc $\langle v_x - v_y, x - y\rangle = u(x_1 - y_1) = 0$.

   Dans tous les cas, $\langle v_x - v_y, x - y\rangle \leqslant 0$, donc la condition (3) est réalisée en prenant $C_K = 1$ par exemple, quel que soit le compact K.

   (b) La question (1) garantit donc l'unicité d'une solution maximale, or l'application $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (0, 2t)$ est clairement solution : $y(0) = (0, 0)$, y est de classe C^1 et $\forall t \geqslant 0$, $y'(t) = (0, 2) \in \mathcal{F}(y(t)) = [-1, 1] \times \{2\}$. Cette solution est maximale car définie sur $[0, +\infty[$, c'est donc l'unique solution maximale du problème (2).

(c) Même principe : il y a unicité donc il suffit de proposer une solution maximale. On la devine facilement sur une figure : on part de $(1,0)$ à vitesse constante $v^+ = (-1,2)$, puis quand on arrive sur l'axe D, on y reste à vitesse constante $(0,2)$.

Soit donc $y : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ telle que $\forall t \in [0,1]$, $y(t) = (1-t, 2t)$ et $\forall t > 1$, $y(t) = (0, 2t)$. Cette fonction est continue, C^1 par morceaux, et $y(0) = (1,0)$. On vérifie immédiatement que $\forall t \neq 1$, $y'(t) \in \mathcal{F}(y(t))$. Enfin pour le cas $t = 1$, $y'_g(1) = (-1,2)$ et $y'_d(1) = (0,2)$ sont bien dans $\mathcal{F}(y(1)) = [-1,1] \times \{2\}$. Cette solution définie sur $[0,+\infty[$ est donc l'unique solution maximale du problème (2).

3. (a) Supposons (3). Soit $K = [-1,1] \times \{0\}$ (compact) et $C_K > 0$ associée. Soient $t \in]0,1]$, $x = (-t,0)$ et $y = (t,0)$, ainsi $x, y \in K$. On a $\langle v_x - v_y, x - y\rangle = \langle (0,1) - (1,1), (-2t, 0)\rangle = 2t$ donc

$$\langle v_x - v_y, x-y\rangle \leqslant C_K \|x-y\|^2 \iff 2t \leqslant C_K \times 4t^2 \iff 1 \leqslant C_K \times 2t$$

ce qui est faux en choisissant t assez petit. Ainsi $\mathcal{F}$ ne vérifie pas la condition (3).

(b) Condition nécessaire : supposons (y,T) solution maximale. Notons que $y_1'(t)$, quand il est défini, est toujours $\geqslant 0$ donc y_1 est croissante. Vu $y_1(0) = 1$, y_1 reste > 0, donc on ne peut avoir que $y'(t) = (1,1)$ lorsque ce vecteur dérivé existe. Il en résulte que $\forall t \in [0,T[$, $y(t) = (1+t, t)$. La maximalité impose $T = +\infty$.

Condition suffisante : l'application $t \mapsto (1+t,t)$ définie sur $[0,+\infty[$ est solution maximale.

Il y a donc une et une seule solution maximale du problème (2).

(c) Condition nécessaire : supposons (y,T) solution maximale. Notons que y_2' ne peut valoir que 1, or $y_2(0) = 0$, donc $y_2(t) = t$ pour tout t. Comme précédemment, y_1 est croissante, or $y_1(0) = 0$. On a donc deux cas. Ou bien y_1 reste nulle, donc $y(t) = (0,t)$ pour tout t. Ou bien il existe t tel que $y_1(t) > 0$, dans ce cas $\{t \geqslant 0\ ;\ y_1(t) = 0\}$ est fermé borné donc compact, et non vide ; soit a son maximum. On a donc $\forall t \in [0,a]$, $0 = y_1(0) \leqslant y_1(t) \leqslant y_1(a) = 0$ par croissance de y_1, donc $y_1(t) = 0$, et $\forall t > a$, $y_1(t) > 0$ par conséquent $y_1'(t) = 1$. On en déduit que $\forall t \in [0,a]$, $y(t) = (0,t)$ et $\forall t > a$, $y(t) = (t-a, t)$. La maximalité impose $T = +\infty$.

Condition suffisante : déjà l'application $y : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (0,t)$, est une solution maximale du problème (2).

Soit $a \geqslant 0$ quelconque. L'application $y : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in [0,a]$, $y(t) = (0,t)$ et $\forall t > a$, $y(t) = (t-a,t)$ est aussi une solution maximale du problème (2).

On remarque qu'il existe une infinité de solutions maximales pour $y_{init} = (0,0)$.

♦ ♦ ♦