

Partie I. Résultats préliminaires.

I.A Distance de A à A_s

- I.A.1) Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors $M = M_s + M_a$ avec $M_s \in S_n(\mathbb{R})$ et $M_a \in A_n(\mathbb{R})$ donc $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. De plus, si $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\langle A, S \rangle = \text{tr}({}^tAS) = -\text{tr}(AS)$ et $\langle S, A \rangle = \text{tr}({}^tSA) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS)$. On en déduit que $\langle A, S \rangle = 0$ et que les deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux. La somme est directe et orthogonale. On montre enfin que $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $A_n(\mathbb{R})$ d'où $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ (ou en explicitant une base).
- I.A.2) On a, d'après le théorème de Pythagore ($S - A_s \in S_n(\mathbb{R})$ et $A_a \in A_n(\mathbb{R})$), $\|A - S\|^2 = \|A_s - S + A_a\|^2 = \|A_s - S\|^2 + \|A_a\|^2 \geq \|A_a\|^2 = \|A - A_s\|^2$ avec égalité si et seulement si $S = A_s$. On a bien, pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A - A_s\| \leq \|A - S\|$ avec égalité si et seulement si $S = A_s$.

I.B Valeurs propres de A_s

- I.B.1) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A_s avec $A_s X_i = \lambda_i X_i$ (et $\lambda \geq 0$). On a, si $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$,

$${}^tX A_s X = \left(\sum_{i=1}^n x_i {}^tX_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j X_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

On a bien ${}^tX A_s X \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Réciproquement, en prenant $X = X_i$, on obtient $\lambda_i \|X_i\|^2 = \lambda_i \geq 0$. On fait de même dans le cas $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (les x_i n'étant pas tous nuls).

- I.B.2) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$. On peut normaliser X afin d'avoir un vecteur X unitaire tel que $AX = \lambda X$. On a alors

$${}^tXAX = \lambda \|X\|^2 = \lambda = {}^tX A_s X + {}^tX A_a X.$$

Soit $a = {}^tX A_a X$ (matrice $(1, 1)$ assimilée à son coefficient). On a $a = {}^t(a)$ d'où ${}^tX A_a X = -{}^tX A_a X$ et ${}^tX A_a X = 0$. On a donc ${}^tXAX = {}^tX A_s X$. D'après la question précédente, ${}^tX A_s X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ si $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$. On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \max \text{Sp}(A_s) \sum_{i=1}^n x_i^2 = \max \text{Sp}(A_s),$$

puisque X est unitaire. On a de même la minoration. Dans le cas où $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\min \text{Sp}(A_s) > 0$ et 0 n'est pas valeur propre de A .

I.B.3)

- a) L'existence est simple. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A_s = PD^tP = PDP^{-1}$. On note C la matrice diagonale dont les termes sont les racines des termes de D . On a $C^2 = D$ et si on note $B = PC^tP = PCP^{-1}$ alors B est symétrique réelle (première expression) et à valeurs propres strictement positives (seconde expression - $\text{Sp} B = \text{Sp} C$) et vérifie $B^2 = A_s$. Pour l'unicité, supposons que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 = A_s$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes (et strictement positives) de A . On note u et v les endomorphismes canoniquement associés à A_s et B . On a alors $\ker(u - \lambda_i \text{Id}) = \ker(v - \sqrt{\lambda_i} \text{Id}) \oplus \ker(v + \sqrt{\lambda_i} \text{Id})$. Puisque les valeurs propres de v sont strictement positives, $\ker(u - \lambda_i \text{Id}) = \ker(v - \sqrt{\lambda_i} \text{Id})$. Ainsi la restriction de v à $E_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id})$ est $\sqrt{\lambda_i} \text{Id}_{E_{\lambda_i}}$. Puisque les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, cela définit totalement et de façon unique v ce qui donne l'unicité (et la seule expression possible pour v et donc B).
- b) On a $A = A_s + A_a = B^2 + A_a = B(I_n + B^{-1}A_aB^{-1})B$. On note $Q = B^{-1}A_aB^{-1}$. Puisque B et donc B^{-1} sont symétriques, on a ${}^tQ = -Q$. On a alors

$$\det A = \det(B)^2 \det(I_n + Q) = \det(B^2) \det(I_n + Q) = \det(A_s) \det(I_n + Q).$$

- c) La matrice Q est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Si μ est une valeur propre réelle de Q et X un vecteur propre associé alors ${}^tXQX = \mu {}^tXX = 0$ (calcul précédent puisque Q est antisymétrique). Ainsi la seule valeur propre réelle possible pour Q est 0. Puisque Q est à coefficients réels, si μ est une valeur propre non réelle de Q de multiplicité p alors $\bar{\mu}$ l'est aussi avec la même multiplicité. De plus Q^2 est symétrique réelle et si μ est valeur propre de Q alors μ^2 est valeur propre de Q^2 donc est un réel. Ainsi les valeurs propres de Q sont imaginaires pures. Notons $\mu_1, \dots, \mu_k$ les valeurs propres complexes de partie imaginaire strictement positive et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leurs multiplicités. On note α_0 la multiplicité de la valeur propre 0 (éventuellement $\alpha_0 = 0$ si 0 n'est pas valeur propre de Q). On a alors

$$\det(I_n + Q) = (1 + 0)^{\alpha_0} \prod_{i=1}^k ((1 + \mu_i)(1 + \bar{\mu}_i))^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^k (|1 + \mu_i|^2)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^k (1 + |\mu_i|^2)^{\alpha_i} \geq 1$$

Finalement $\det(A) \geq \det(A_s)$.

I.B.4) On note $C = A(A^{-1})_s^t A$. On a $C = A \frac{A^{-1} + {}^t(A^{-1})}{2} A = \frac{AA^{-1}A + A{}^t(A^{-1})A}{2} = \frac{A + {}^tA}{2} = A_s$. On a donc $\det(A) \det((A^{-1})_s) \det({}^tA) = \det(A)^2 \det((A^{-1})_s) = \det(A_s)$.

I.C Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Soit λ une valeur propre de A_s et X un vecteur propre unitaire associé. On a

$${}^tXAX = {}^tXA_sX = \lambda \|X\|^2 = \lambda$$

Ainsi $|\lambda| = |{}^tXAX| = |\langle X, AX \rangle| \leq \|X\| \|AX\| = 1$.

I.C.2) Les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dont la partie symétrique est $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ dont la partie symétrique est elle-même. Il suffit de prendre pour S une matrice diagonale dont les deux termes sont dans $[-1, 1]$ et ni égaux, ni opposés. Par exemple $S = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

I.C.3) $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc est diagonalisable. Il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PD^tP$ avec D diagonale sous la forme

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & \cos(\theta_1)I_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \cos(\theta_m)I_2 \end{pmatrix}$$

où les $\cos\theta_i$ sont dans $] -1, 1[$ (on peut les regrouper deux par deux). Si on note $C = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix}$ alors

$C_s = D$. Si on note $A = PC^tP$ alors A est orthogonale en tant que produit de matrices orthogonales et $A_s = \frac{PC^tP + P^tC^tP}{2} = PC_s^tP = PD^tP = S$.

I.C.4) dans l'autre sens en plus simple. Le théorème de réduction des matrices orthogonales donne $A = PC^tP$ avec P orthogonale et C comme celle de la question précédente. On a alors $A_s = PC_s^tP$. Si on note $D = C_s$ alors D est sous la forme

$D = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & \cos(\theta_1)I_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \cos(\theta_m)I_2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres S sont celles de D donc dans $[-1, 1]$ et celles dans $] -1, 1[$ se regroupent par paquets de 2 et la dimension d'une espace propre pour $\lambda \in] -1, 1[$ est paire.

Matrices F -singulières

II.A Cas où F est un hyperplan - on remarque pour commencer que la condition ${}^tZKX = 0$ s'écrit $\langle Z, KX \rangle = 0$. Dire que K est F singulière équivaut à dire qu'il existe $X \neq 0$ dans F tel que KX est orthogonal à F .

II.A.1) M est E_n -singulière si et seulement si il existe $X \neq 0$ dans E_n tel que MX est orthogonal à E_n , c'est-à-dire $MX = 0$. Cela est bien équivalent à $\ker M \neq 0$ ou encore M n'est pas inversible.

II.A.2) A est H -singulière si et seulement si il existe X non nul dans H tel que AX est orthogonal à H donc colinéaire à N . On a bien A est H -singulière si et seulement si il existe $X \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda N$.

II.A.3) Soit Y un vecteur de taille $n+1$ sous la forme $Y = \begin{pmatrix} X \\ \mu \end{pmatrix}$ avec X un vecteur de taille n . On a alors

$$A_N Y = \begin{pmatrix} A & N \\ {}^tN & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + \mu N \\ {}^tN.X \end{pmatrix}$$

Si A est H -singulière : on note X un vecteur non nul de H tel que $AX = \lambda N$ alors ${}^tNX = 0$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul tel que $A_N Y = 0$. La matrice A_N est singulière. Réciproquement si A_N est singulière et $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul tel que $A_N Y = 0$. On a ${}^tNX = 0$ et $AX = \lambda N$. Si $X = 0$ alors $\lambda = 0$ ce qui est impossible. Ainsi X est non nul, orthogonal à N donc dans H et $AX = \lambda N$. Finalement A est H -singulière.

II.A.4) On effectue le produit

$$A_N B = \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ {}^tNB_1 & {}^tNB_2 \end{pmatrix}$$

On veut donc $AB_1 + NB_3 = I_n$, ${}^tNB_1 = {}^tNA^{-1}$, ${}^tNB_2 = {}^tN(-A^{-1}N)$ et $AB_2 + NB_4 = 0$. On choisit $B_1 = A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, $B_2 = -A^{-1}N \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Il reste $NB_3 = 0$ et $-N + NB_4 = 0$. On choisit $B_4 = 1$ et $B_3 = 0 \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. Finalement, avec

$$B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a le résultat.

II.A.5) On a $\det(A_N B) = -{}^tNA^{-1}N = \det(A_N) \det B = \det(A_N) \det(A^{-1})$. Finalement $\det(A_N) = -\det(A)({}^tNA^{-1}N)$.

II.A.6) Si $\det((A^{-1})_s) = 0$ alors il existe N non nul tel que $A_s^{-1}N = 0$. Alors ${}^tNA^{-1}N = 0$ et ${}^tNA^{-1}N = {}^tNA_s^{-1}N$. On a donc $\det A_N = 0$. La matrice A_N est singulière et A est H -singulière où H est l'hyperplan orthogonal à N .

II.A.7) Si $\det(A_s) = 0$ alors, d'après I.B.4, on a $\det(A^{-1})_s = 0$ (puisque $\det A \neq 0$). D'après la question précédente, il existe un hyperplan H tel que A est H -singulière.

II.A.8) Si $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. S'il existe H un hyperplan tel que A est H -singulière, alors il existe $X \neq 0$ dans H tel que AX est orthogonal à H et notamment ${}^tXAX = 0 = {}^tXA_sX$ ce qui est impossible puis que A est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour tout hyperplan H , A est H -régulière.

II.B Exemple

II.B.1) On calcule $\det A(\mu)$ et on trouve $\det A(\mu) = 1$.

II.B.2) On a $A(\mu)_s = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu/2 \\ -1 & 2-\mu & \mu/2-1 \\ \mu/2 & \mu/2-1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule son déterminant et $\det A(\mu)_s = \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu^2-2\mu-2)$ qui s'annule pour les valeurs 1 , $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$ pour μ .

II.B.3) On cherche un vecteur N non nul tel que ${}^tNA(1)^{-1}N = {}^tN(A(1)^{-1})_sN = 0$ ce qui revient à chercher un vecteur du noyau de $(A(1)^{-1})_s$ (si $B \in S_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tXBX = 0$ si et seulement si $BX = 0$). Après calcul, on trouve $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'hyperplan H

d'équation $z = 0$ convient (et si on veut trouver $X \neq 0$ dans H vérifiant la condition, on le cherche sous la forme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

et on cherche x et y tel que AX colinéaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient).

II.C Cas où F est de dimension $n-2$

II.C.1) Déjà remarqué au début : A est F -singulière si et seulement si il existe $X \neq 0$ dans F tel que AX est dans $H^\perp = \text{Vect}(N_1, N_2)$.

II.C.2) Même principe qu'auparavant avec $Y = \begin{pmatrix} X \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, on a

$$A_N Y = \begin{pmatrix} AX + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 \\ {}^tN_1 X \\ {}^tN_2 X \end{pmatrix}$$

Si A est F singulière alors il existe λ_1 et λ_2 tels que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul du noyau

de A_N . Réciproquement si on a un tel vecteur Y dans le noyau alors $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$, X est orthogonal à N_1 et N_2 (conditions ${}^tN_1 X = {}^tN_2 X = 0$) et X est non nul sinon on aurait $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $Y = 0$.

II.C.3) Même principe avec

$$B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \text{ où } -A^{-1}N = \begin{pmatrix} A^{-1}N_1 & A^{-1}N_2 \end{pmatrix}.$$

II.C.4) Par déterminant par blocs comme dans II.A. avec $\det(-{}^tNA^{-1}N) = (-1)^2 \det({}^tNA^{-1}N)$.

II.C.5) On a $\det({}^tPA^{-1}P) = \det({}^t(A \cdot A^{-1}P)(A^{-1}P)) = \det({}^tP'{}^tAP')$ avec $P' = A^{-1}P$. Enfin $\det({}^tP'{}^tAP') = \det({}^t(P'{}^tAP')) = \det({}^tP'AP')$. On a donc $\det({}^tPA^{-1}P) = 0$ si et seulement si $\det({}^tP'AP) = 0$ avec $P' = A^{-1}P$.

II.C.6) On effectue les calculs :

$${}^tN'AN' = \begin{pmatrix} {}^tN'_1AN'_1 & {}^tN'_1AN'_2 \\ {}^tN'_2AN'_1 & {}^tN'_2AN'_2 \end{pmatrix} \text{ et } \det({}^tN'AN') = ({}^tN'_1AN'_1)({}^tN'_2AN'_2) - ({}^tN'_1AN'_2)({}^tN'_2AN'_1)$$

De nouveau ${}^tN'_1AN'_1 = {}^tN'_1A_sN'_1$ et ${}^tN'_2AN'_2 = {}^tN'_2A_sN'_2$. Pour l'autre terme : on a ${}^tN'_2AN'_1$ qui est de taille (1, 1) donc égale à sa transposée : ${}^tN'_2AN'_1 = {}^tN'_1AN'_2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} ({}^tN'_1AN'_2)({}^tN'_2AN'_1) &= ({}^tN'_1A_sN'_2 + {}^tN'_1A_aN'_2) \cdot ({}^tN'_1A_sN'_2 - {}^tN'_1A_aN'_2) \\ &= ({}^tN'_1A_sN'_2)^2 - ({}^tN'_1A_aN'_2)^2. \end{aligned}$$

En remettant tout cela ensemble, on obtient le résultat.

II.C.7) On choisit $N' = A^{-1}N$. On va montrer que $({}^tN'_1A_sN'_1)({}^tN'_2A_sN'_2) - ({}^tN'_1A_sN'_2)^2 > 0$ ce qui donnera $\det({}^tN'AN') > 0$. On utilise la formule de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire $(X, Y) \in E_n^2 \mapsto {}^tXA_sY$ (on vérifie que l'application est bilinéaire symétrique facilement, le caractère défini positif provient du fait que $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \neq 0$). L'inégalité est donc directement la formule de Cauchy-Schwarz et l'inégalité est stricte car N'_1 et N'_2 sont non colinéaires puisque N_1 et N_2 sont linéairement indépendants (et A^{-1} est inversible). Ainsi pour ce vecteur N' , on a $\det({}^tN'AN') > 0$. En reprenant la question II.C.5., on a $\det({}^tNA^{-1}N) = \det({}^tN'AN') > 0$.

II.C.8) Si A est F -singulière pour un certain espace de dimension 2 : on reprend toutes les notations précédentes. On a alors $\det(A_N) \neq 0$ et A_N n'est pas singulière. Cette contradiction donne bien que A est F -régulière pour tout sous-espace F de dimension $n-2$.

II.D Exemple

II.D.1) On a $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice n'est pas inversible ($C_2 = -C_1$). On reprend la formule de II.C.6. On choisit

N'_2 tel $A_sN'_2 = 0$ afin de la simplifier au maximum - on choisit $N'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il reste à choisir un vecteur N'_1 (non colinéaire

à N'_2) tel que ${}^tN'_1A_aN'_2 = 0$. On a $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_aN'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On prend N'_1 orthogonal à ce vecteur, non

colinéaire N'_2 - par exemple $N'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II.D.2) On choisit $N = AN' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, N_1 et N_2 les deux colonnes et F la droite orthogonale à N_1 et N_2 . Si $u = (x, y, z)$ en

est un vecteur directeur alors $x - y = 0$ et $z = 0$. On a $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi avec $F = \text{Vect}(u)$, la matrice $A(1)$ est F -singulière

(effectivement $Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -N_2$)... tout ça pour ça!!!

II.E Cas général

II.E.1) et c'est reparti... on prend $N_1, \dots, N_p$ une base de $F^\perp$ et N la matrice de $\mathcal{G}_{n,p}$ de colonnes $N_1, \dots, N_p$. On note A_N comme précédemment (avec $A_N \in M_{n+p}(\mathbb{R})$), B la matrice $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. On a A_NB comme avant et $\det(A_N) = \det(-{}^tNA^{-1}N)\det(A)$. On vérifie encore que A est F -singulière si et seulement si A_N est non inversible donc si et seulement si $\det({}^tNA^{-1}N) = 0$. Avec $N' = A^{-1}N$ (de rang p comme N), on a $\det({}^tNA^{-1}N) = \det({}^tN'AN')$

II.E.2) On a ${}^tX{}^tN'AN'X = ({}^tN'X)A(N'X)$. Si $N'X = 0$ alors $X = 0$ (les colonnes de N' sont linéairement indépendantes). Si $X \neq 0$ alors $Y = N'X \neq 0$ et puisque $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, ${}^tYAY = {}^tY A_s Y > 0$.

II.E.3) Si λ est une valeur propre réelle de ${}^tN'AN'$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé, alors ${}^tX({}^tN'AN')X = \lambda \|X\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

II.E.4) On trigonalise la matrice, on regroupe les valeurs propres complexes conjuguées deux par deux (même multiplicité pour λ et $\bar{\lambda}$) et on calcule le déterminant : on a le produit des valeurs propres réelles et des modules des valeurs propres non réelles. Le déterminant est strictement positif.

II.E.5) Si A est F -singulière pour un certain sous-espace de dimension $n-p \geq 1$ alors il existe $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\det({}^tN'AN') = 0$ et cela donne une contradiction avec II.E.4.

III. Matrices positivement stables

III.A Exemples

III.A.1) Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - (\text{tr } A)X + \det A$. On a deux situations :

- les deux valeurs propres de A sont réelles : leur somme est $\text{tr } A$ et leur produit $\det A$. Elles sont toutes les deux positives si et seulement si $\det A > 0$ et $\text{tr } A > 0$.
- les deux valeurs propres sont complexes conjuguées : $\lambda = a + ib$ et $\mu = a - ib$. Dans ce cas $\text{tr } A = 2a > 0$ et $\det A = a^2 + b^2 > 0$ (car $a \neq 0$) et réciproquement, si $\det A > 0$ et $\text{tr } A > 0$ alors λ et μ sont de partie réelle strictement positive.

III.A.2) a) On peut choisir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors A et B sont positivement stables et $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a une valeur propre nulle.

b) Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés aux matrices de A et B (vues comme matrices de $M_n(\mathbb{C})$). Soit λ une valeur propre complexe de $u+v$. L'endomorphisme u commute avec $u+v$ donc l'espace propre $E_\lambda(u+v)$ est stable par u . L'endomorphisme u admet donc une valeur propre μ dans cet espace et un vecteur propre associé. On a alors $(u+v)(x) = \lambda x$ et $u(x) = \mu x$. On en déduit que $v(x) = (\lambda - \mu)x$ donc la partie réelle de $\lambda - \mu$ est strictement positive. Puisque celle de μ aussi, celle de $\lambda = (\lambda - \mu) + \mu$ l'est toujours.

remarque : on pourrait aussi montrer que A et B sont simultanément trigonalisables et ainsi montrer que les valeurs propres de $A+B$ sont somme d'une valeur propre de A et d'une de B .

III.A.3) a) on calcule ${}^t\bar{X}AX = ({}^tY - i{}^tZ)A(Y + iZ)$ et $\text{Re}({}^t\bar{X}AX) = {}^tYAY + {}^tZAZ = {}^tYA_sY + {}^tZA_sZ$. Puisqu'au moins l'un entre Y et Z est non nul et que A_s est définie positive, on a bien $\text{Re}({}^t\bar{X}AX) > 0$.

b) Soit λ une valeur propre de A est X un vecteur propre associé. On a ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}X = \lambda \|X\|^2$ (norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$ ou $M_{n,1}(\mathbb{C})$) dont la partie réelle est $\text{Re}(\lambda) \|X\|^2 > 0$. Ainsi A est positivement stable.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient encore : elle est positivement stable et $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $S_2^+(\mathbb{R})$ mais pas $S_2^{++}(\mathbb{R})$ (0 est valeur propre).

III.B.1) On résout $y' + \lambda y = v$: on a $y(x) = A \exp(-\lambda x) + \exp(-\lambda x) \int_0^x v(t) \exp(\lambda t) dt$. Si $|v| \leq M$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |A| \exp(-\text{Re}(\lambda)x) + \exp(-\text{Re}(\lambda)x) \int_0^x M \exp(\text{Re}(\lambda)t) dt \\ &\leq |A| + M \exp(-\text{Re}(\lambda)x) \frac{\exp(\text{Re}(\lambda)x) - 1}{\text{Re}(\lambda)} \\ &\leq |A| + M \frac{1 - \exp(-\text{Re}(\lambda)x)}{\text{Re}(\lambda)} \leq |A| + \frac{M}{\text{Re}(\lambda)} \end{aligned}$$

III.B.2) La dernière ligne du système $U' + TU = 0$ est $u'_n(t) + T_{n,n}u_n(t) = 0$ et le résultat précédent montre que u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$. La ligne précédente est $u'_{n-1}(t) + T_{n-1,n-1}u_{n-1}(t) = -T_{n-1,n}u_n(t)$ et de nouveau u_{n-1} est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On remonte ainsi ligne par ligne par avoir à chaque étape $u'_i(t) + T_{ii}u_i(t) = v_i(t)$ avec v_i bornée donc u_i aussi.

III.B.3) Les valeurs propres de $B = A - \alpha I_n$ ont toutes une partie réelle strictement positive donc cette matrice est positivement stable. Elle est trigonalisable et il existe P inversible et T triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux de partie réelle strictement positive telle que $B = A - \alpha I_n = PTP^{-1}$. On a $\exp(tB) = \exp(PTP^{-1}) = P \exp(tT)P^{-1}$ (on utilise la continuité de $M \mapsto P^{-1}$ avec la suite des sommes partielles de l'exponentielle). On a alors $\exp(-tB) = \exp(\alpha t I_n - tA) = \exp(\alpha t I_n) \exp(-tA)$ (car I_n et A commutent) et $\exp(\alpha t I_n) = e^{\alpha t} I_n$. Ainsi $\exp(\alpha t) \exp(-tA) = P \exp(-tT)P^{-1}$. On note E_i le i -ème vecteur de la base canonique de E_n . On a $\exp(\alpha t) \exp(-tA)E_i$ qui correspond à la colonne i de la matrice $\exp(\alpha t) \exp(-tA)$. De plus $t \mapsto \exp(-tT)P^{-1}E_i$ est l'unique solution de $U' + TU = 0$ avec $U(0) = P^{-1}E_i$. D'après la question précédente, $t \mapsto \exp(-tT)P^{-1}E_i$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et on en déduit (par multiplication par la matrice constante P) que $t \mapsto \exp(\alpha t) \exp(-tA)E_i$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Finalement $t \mapsto \exp(\alpha t) \exp(-tA)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.C Une caractérisation des matrices positivement stables

III.C.1) Soit $\varphi_A : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto MA \in M_n(\mathbb{R})$. Si P est un polynôme, on vérifie que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $(P(\varphi_A))(M) = P(A).M$. Ainsi $P(\varphi_A)$ est nul si et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle. L'endomorphisme φ_A admet les mêmes polynômes annulateurs que A donc son polynôme minimal est celui de A et φ_A est positivement stable. On montre que même que $\psi_A : M \mapsto {}^tAM$ est positivement stable (et son polynôme minimal est celui de tA donc celui de A). Enfin φ_A et ψ_A commutent puisque $\varphi_A(\psi_A(M)) = {}^tAMA = \psi_A(\varphi_A(M))$. D'après III.A.2, l'endomorphisme Φ est positivement stable.

III.C.2) a) Puisque 0 n'est pas valeur propre de Φ , il est bijectif et il existe une unique matrice B telle que $\Phi(B) = I_n$.

b) On transpose la relation précédente : ${}^tBA + {}^tA{}^tB = I_n = \Phi_A({}^tB)$. Par unicité, $B = {}^tB$.

On a donc ${}^tA{}^tB + BA = I_n$ soit ${}^t(BA) + BA = I_n$ et $(BA)_s = \frac{1}{2}I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors, d'après I.B.3.c, $\det(BA) \geq \det((BA)_s) > 0$. On a $\det A > 0$ (on trigonalise, on regroupe les valeurs propres complexes conjuguées et il reste éventuellement des valeurs propres réelles strictement positives) donc $\det B > 0$.

- III.C.3)** a) On note $C(t) = \exp(-tA)$. On vérifie (par continuité de la transposition) que ${}^tC(t) = \exp(-t{}^tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On a s'intéresse donc à la matrice $V(t) = {}^tC(t)C(t)$. Elle est symétrique, et si X est un vecteur colonne non nul alors ${}^tX{}^tC(t)C(t)X = \|C(t)X\|^2 \geq 0$ et est non nul car $X \neq 0$ est $C(t)$ est inversible. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $V(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que si $f : t \in [a, b] \mapsto E$ (où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) est continue sur $[a, b]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ (F un autre $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) alors $\varphi\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$. On en déduit alors que ${}^tW(t) = \int_0^t {}^tV(s) ds = W(t)$ si $t \in \mathbb{R}^+$ et si X est un vecteur non nul, ${}^tXW(t)X = \int_0^t ({}^tXV(s)X) ds$. Puisque ${}^tXV(s)X > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale est strictement positive du moment que $t > 0$. Cela prouve que $W(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si $t > 0$.
- b) On remarque qu'on a bien égalité pour $t = 0$ (car $V(0) = I_n$ et $W(0) = 0$). On s'intéresse aux dérivées. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $V'(t) = -{}^tAV(t) - V(t)A = -({}^tA.V(t) + V(t).A)$. Si on note $f(t) = {}^tAW(t) + W(t)A$, on a $f'(t) = {}^tAW'(t) + W'(t)A = {}^tA.V(t) + V(t).A = -V'(t)$. Les fonctions f et $t \mapsto I_n - V(t)$ ont même dérivée sur $\mathbb{R}^+$ et sont nulles en 0 et sont donc égales sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$.
- c) On commence par montrer que V tend vers 0 en $+\infty$: on choisit α comme dans III.B.3 et on fixe une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. On a alors l'existence d'une constante K telle que $\|\exp(-tA)\| \leq Ke^{-\alpha t}$. En transposant, on a la même majoration pour $\|\exp(-t{}^tA)\|$. Puisque le produit $(M, N) \mapsto M.N$ est bilinéaire donc continue sur $M_n(\mathbb{R})$, il existe K' tel que pour tout $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, $\|MN\| \leq K'\|M\|\|N\|$ (on aurait pu prendre la norme 2 pour laquelle $K' = 1$ convient). On a alors $\|V(t)\| \leq C.e^{-2\alpha t}$. On en déduit déjà que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$. On en déduit alors que W admet une limite finie en $+\infty$: on a $|W(t)[i, j]| \leq \|W(t)\|_\infty \leq C'\|W(t)\|$ par équivalence des normes. Or $\|W(t)\| \leq \int_0^t \|V(s)\| ds$ qui admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$ (puisque $\|V(t)\| = O(e^{-2\alpha t})$). On peut donc passer à la limite et finalement obtenir (par continuité des applications $M \mapsto {}^tAM$ et $M \mapsto MA$) la relation ${}^tAL + LA = I_n$. Par unicité $B = L = \int_0^{+\infty} V(s) ds$ (en effectuant l'intégration de 0 à $+\infty$ sur chaque coordonnées). Puisque $S_n(\mathbb{R})$ est fermé, B est symétrique (on le savait déjà) et si $X \neq 0$, on a ${}^tXBX = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t {}^tXV(s)X ds \geq \int_0^1 {}^tXV(s)X ds > 0$. En conclusion $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.