



L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.

Dans tout le problème, on fixe un entier  $d \in \mathbb{N}^*$  et on note  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ ) l'espace des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille  $d \times d$ . Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers entre 1 et  $d$ , on note  $A_{i,j}$  le coefficient placé ligne  $i$  et colonne  $j$  dans la matrice  $A$ . On rappelle que  $A^0 = I_d$ . On note  $\text{Tr}(A)$  la trace de la matrice  $A$ .

Les parties I, II et III sont indépendantes des parties IV et V.

### I Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

**I.A** – Montrer que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ , l'application  $f_P : A \mapsto P(A)$  est une fonction continue de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .

**I.B** – Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A \times B)$  est un produit scalaire sur l'espace  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

Dans toute la suite du problème, on note  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire.

**I.C** – Pour tous entiers  $i, j$  entre 1 et  $d$  et toute matrice  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , comparer  $|A_{i,j}|$  et  $\|A\|$ .

**I.D** – Montrer que :  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2, \|A \times B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

**I.E** – Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , comparer  $\|A^n\|$  et  $\|A\|^n$ .

### II Séries entières de matrices

Dans cette partie, on se donne une série entière à coefficients complexes  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  strictement positif, éventuellement égal à  $+\infty$ .

**II.A** – Soit  $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$ . Montrer que l'application  $\varphi : A \mapsto \varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$  est définie et continue sur  $\mathcal{B}$ .

**II.B** – Soit  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  une matrice non nulle telle que  $\|A\| < R$ .

**II.B.1)** Établir l'existence d'un entier  $r \in \mathbb{N}^*$  tel que la famille  $(A^k)_{0 \leq k \leq r-1}$  soit libre et la famille  $(A^k)_{0 \leq k \leq r}$  soit liée.

**II.B.2)** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer l'existence et l'unicité d'un  $r$ -uplet  $(\lambda_{0,n}, \dots, \lambda_{r-1,n})$  dans  $\mathbb{R}^r$  tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$$

**II.B.3)** Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C \|A^n\|$$

**II.B.4)** En déduire que, pour tout entier  $k$  entre 0 et  $(r-1)$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n \lambda_{k,n}$  est absolument convergente dans  $\mathbb{C}$ .

**II.B.5)** Conclure qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\varphi(A) = P(A)$  et  $\deg P < r$ .

**II.B.6)** Déterminer ce polynôme  $P$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $a_n = \frac{1}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.C** – Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  pour qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \varphi(A) = P(A)$$

### III Deux applications

#### III.A – Première application : une formule de trigonométrie matricielle

**III.A.1)** Rappeler l'énoncé du théorème permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes. On admet dans la suite de la **partie III** que le résultat valable pour les séries de nombres complexes est encore valable pour des séries de matrices dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .

**III.A.2)** Pour  $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$  tel que  $A$  et  $B$  commutent, montrer que  $\exp(iA)\exp(iB) = \exp(i(A+B))$ .

**III.A.3)** Pour tout  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$$

#### III.B – Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

On fixe une matrice  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

**III.B.1)** Pour  $R$  assez grand, montrer que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la matrice  $(Re^{i\theta}I_d - A)$  est inversible dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$$

**III.B.2)** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $R$  assez grand, la matrice

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta$$

vaut  $A^{n-1}$ .

**III.B.3)** On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot I_d) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

Montrer que pour  $R$  assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta$$

**III.B.4)** En déduire que  $\chi_A(A)$  est la matrice nulle.

On pourra faire intervenir des comatrices.

### IV Étude d'une équation fonctionnelle

Soit  $M \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  et  $f : ]-\infty, M[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \left[ , \quad 2f(x+y) = f(2x) + f(2y) \tag{IV.1}$$

**IV.A** – Soit  $\alpha$  un nombre strictement inférieur à  $\frac{M}{2}$  et  $F$  la primitive de  $f$  s'annulant en  $\alpha$ . Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\left] -\infty, \frac{M}{2} \left[$ , avec  $y \neq \alpha$ , on a :

$$f(2x) = 2 \frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$$

**IV.B** – En déduire que la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-\infty, M[$ .

**IV.C** – Montrer que  $f'' = 0$ , puis que l'ensemble des solutions continues de l'équation (IV.1) forme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, dont on déterminera une base.

## V Étude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie, on se donne une fonction  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et on définit une fonction  $f_\xi : \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}), \quad f_\xi(A) = \left( \xi(A_{i,j}) \right)_{1 \leq i, j \leq q}$$

On se propose de déterminer les fonctions continues  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}), \quad A \text{ inversible} \Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible} \quad (\text{V.1})$$

**V.A** – Déterminer les fonctions continues  $\xi$  vérifiant la condition (V.1) lorsque  $q = 1$ .

On se place dorénavant dans le cas  $d \geq 2$ .

On se donne une fonction continue  $\xi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant (V.1).

**V.B** – Montrer

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad ad \neq bc \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$$

On pourra considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & 0 & \dots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{q-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}.$$

**V.C** – En déduire que la fonction  $\xi$  est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur  $\mathbb{R}$ .

**V.D** – Montrer que la fonction  $\xi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

**V.E** – Le but de cette question est de montrer  $\xi(0) = 0$ .

**V.E.1** Montrer que si  $\xi(0) \neq 0$ , alors il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$ .

**V.E.2** Conclure.

**V.F** – Soit  $\eta = \xi^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction réciproque de la bijection  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow I$ . Montrer que là où cela est défini

$$(\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

**V.G** – On suppose dans cette question que la fonction  $\eta$  prend des valeurs strictement positives sur  $I \cap ]0, +\infty[$ .

**V.G.1** Montrer que la fonction  $f = \ln \circ \eta \circ \exp$  vérifie l'équation (IV.1) sur un intervalle  $]-\infty, M[$ , avec  $M$  (éventuellement infini) à préciser en fonction de l'intervalle  $I$ .

**V.G.2** En déduire que sur l'intervalle  $I \cap ]0, +\infty[$  la fonction  $\eta$  est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_1 x^{\alpha_1}$$

avec deux constantes  $K_1 > 0$  et  $\alpha_1 > 0$ .

**V.G.3** Montrer que sur l'intervalle  $I \cap ]-\infty, 0[$  la fonction  $\eta$  est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_2 (-x)^{\alpha_2}$$

avec deux constantes  $K_2 < 0$  et  $\alpha_2 > 0$ .

**V.G.4** Montrer que  $I = \mathbb{R}$  puis que la fonction  $\eta$  est une fonction impaire.

**V.H** – En déduire dans le cas général que, si  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue vérifiant la condition (V.1), alors elle est impaire et sa restriction à  $\mathbb{R}_+^*$  est de la forme  $x \mapsto Cx^\beta$ , avec  $C \neq 0$  et  $\beta > 0$ .

**V.I** – Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , calculer le déterminant de la matrice  $A_\lambda \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des  $\lambda$  sur la diagonale.

**V.J** – En déduire toutes les fonctions continues  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (V.1).

---

• • • FIN • • •

---