CCP 2015 - Filière MP
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Damien Broizat & Nicolas Basbois
Lycée Jules Ferry - Institut Stanislas, Cannes

EXERCICE I.

I.1. Par définition, la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X (qui prend ici ses valeurs dans $\mathbb{N}$) est la somme de la série entière :

$$g_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}z^n.$$

On reconnaît là le développement en série entière de l'exponentielle (qui a un rayon de convergence infini) :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad g_X(z) = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda z - \lambda}.$$

La restriction de g_X à $\mathbb{R}$ est donc de classe C^∞ et se dérive terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_X'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)nx^{n-1}.$$

En évaluant en $x=1$, on obtient l'espérance de X :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = g_X'(1) = \frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x-\lambda}\right)_{x=1} = \lambda.$$

Pour calculer le moment d'ordre 2 de X, on dérive une seconde fois et on évalue en $x=1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_X''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)n(n-1)x^{n-2},$$

donc

$$g_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = E(X^2) - E(X).$$

D'où

$$E(X^2) = E(X) + g_X''(1) = \lambda + \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\lambda x-\lambda}\right)_{x=1} = \lambda + \lambda^2,$$

et on déduit la variance de X avec la formule de Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (\lambda+\lambda^2) - \lambda^2 = \lambda.$$

EXERCICE II.

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ est continue sur $I =]0;+\infty[$ et se prolonge continûment en 0, donc elle est intégrable sur tout segment $[0,X]$ avec $X>0$.
En outre, pour tout réel $p>0$, la fonction positive $x \mapsto e^{-px}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ car elle est continue et

$$\forall X > 0, \qquad \int_0^X e^{-px}dx = \frac{1-e^{-pX}}{p} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}.$$

Par combinaison linéaire, la fonction f_n est donc intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx}dx - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nx}dx = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0.$$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)$ est donc convergente (puisque son terme général est nul), et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = 0.$$

II.2. Pour tout $x > 0$, les séries géométriques $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-nx}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-2nx}$ sont convergentes car leurs raisons e^{-x} et e^{-2x} appartiennent à $]0;1[$. Par combinaison linéaire, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-2x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$

Ceci montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I vers la fonction

$$S : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Etudions l'intégrabilité de S sur I. Tout d'abord, S est continue sur I, et se prolonge continûment en 0, donc S est intégrable sur tout segment $[0, X]$ avec $X > 0$. Ensuite :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x},$$

et la fonction positive $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc S aussi. Ceci montre que S est intégrable sur I. Enfin, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^{+\infty} S(x)dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \lim_{X\to+\infty}\left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^X = \ln(2).$$

II.3. La série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx\right)$ est divergente. En effet, si elle était convergente, alors on pourrait appliquer le théorème d'intégration terme à terme (car la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I), et on aurait alors

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = 0,$$

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

PROBLEME.

Partie 1 : Exemples et contre-exemples

III.1. Supposons qu'il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;1]$. Vu que les polynômes P_n possèdent tous une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$, on peut appliquer le théorème de la double limite, ce qui a pour conséquence que h possède une limite dans $\mathbb{R}$ (donc finie !) en 0^+, et cela est contradictoire. Une telle suite de polynômes n'existe donc pas.
Ce résultat illustre le fait qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de compacité du domaine $[a, b]$ dans le théorème de Weierstrass (l'approximation polynomiale uniforme de la fonction continue $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impossible sur $]0, 1]$ par exemple).

III.2. Dans l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$, l'ensemble $\mathcal{P}_N = Vect((x \mapsto x^k)_{0\leq k\leq N})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $(N+1)$, donc c'est une partie fermée de E.
Si une fonction $f \in E$ est limite uniforme de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier N fixé, alors on a une suite (P_n) de vecteurs de $\mathcal{P}_N$ qui converge vers f (au sens de la norme sur E), donc sa limite f reste dans $\mathcal{P}_N$ (puisqu'il s'agit d'une partie fermée, elle est stable par passage à la limite).
Cette fonction f est donc elle-même un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

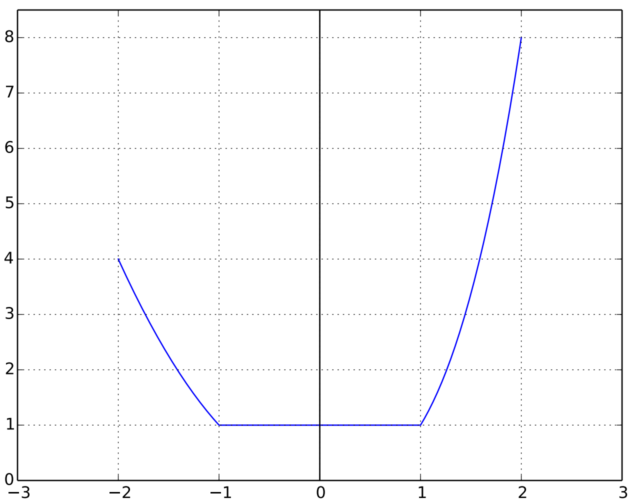
III.3.

III.3.a. L'application N_1 est bien définie (car tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est continu, donc borné sur le segment $[-2,-1]$), et clairement positive. De plus :

- Si $N_1(P) = 0$, alors $\sup\limits_{[-2,-1]} |P| = 0$, ce qui signifie que la fonction positive $|P|$ est nulle sur le segment $[-2,-1]$. Le polynôme P possède alors une infinité de racines, ce qui entraîne $P = 0$.
- Pour tout $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$, on a
$$N_1(\lambda P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda P|(x) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda||P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$$
(car la constante $|\lambda|$ est positive). Donc $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$.
- Pour tous polynômes P, Q et pour tout $x \in [-2,-1]$, on a
$$|P+Q|(x) = |P(x)+Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq N_1(P) + N_1(Q),$$
(puisque $|P(x)| \leq N_1(P)$ et $|Q(x)| \leq N_1(Q)$).
Le réel $N_1(P) + N_1(Q)$ est un majorant de l'ensemble $\{|P+Q|(x),\ x \in [-2,-1]\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble, i.e.
$$N_1(P) + N_1(Q) \geq \sup\{|P+Q|(x),\ x \in [-2,-1]\} = N_1(P+Q).$$

L'application N_1 est donc bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

III.3.b. Voici la représentation graphique de f :



La fonction f étant clairement continue sur $[-2;2]$, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[-2;2]$.
Cela signifie que $\sup\limits_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En outre, en considérant la fonction polynomiale $f_1 : x \mapsto x^2$ (qui coïncide avec f sur $[-2;-1]$), on a
$$N_1(P_n - f_1) = \sup_{x\in[-2;-1]} |P_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)|,$$
donc on a aussi $N_1(P_n - f_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_1)$, la suite (P_n) converge vers le polynôme X^2.
De façon similaire, dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_2)$, la même suite (P_n) converge vers le polynôme X^3 (puisque la fonction $f_2 : x \mapsto x^3$ coïncide avec f sur $[1;2]$).

Partie 2 : Application : un théorème des moments

Remarque
Il faut supposer que $a < b$, même si l'énoncé ne le précise pas !
En effet, si $a = b$, alors le théorème des moments est bien entendu faux.

III.4.

III.4.a. Par linéarité de l'intégrale sur un segment, l'hypothèse $\left(\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b x^k f(x)dx = 0\right)$ entraîne que $\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout polynôme P.

III.4.b. Considérons une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (une telle suite existe d'après le théorème de Weierstrass puisque f est continue).
D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0$.
Or, $\int_a^b P_n(x)f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f^2(x)dx$, puisque

$$\left|\int_a^b P_n(x)f(x)dx - \int_a^b f^2(x)dx\right| \le \int_a^b |P_n(x)-f(x)||f(x)|dx \le \underbrace{\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)}_{cste} \times \underbrace{\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On en déduit donc, en faisant tendre $n \to +\infty$, que $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Cela entraîne la nullité de f^2 sur $[a,b]$ (puisque f^2 est continue et positive), et donc la nullité de f.

Remarque
L'indication fournie est inutilement compliquée, puisqu'elle demande d'utiliser deux "boîtes noires" :

- la convergence uniforme sur $[a,b]$ du produit $P_n f$ vers f^2 ;
- l'interversion "limite-intégrale" en cas de convergence uniforme sur un segment.

III.5. L'ensemble $F^\perp$ est formé des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui vérifient $\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout fonction polynomiale P. D'après la question préćécédente, seule la fonction nulle $f = 0$ vérifie cette condition. On a donc $F^\perp = \{0_E\}$, donc $F \oplus F^\perp = F$.
Vu que $F \neq E$ (il existe des fonctions continues sur $[a,b]$ non polynomiales, par exemple $x \mapsto e^x$!), on a donc $F \oplus F^\perp \neq E$.

III.6.

III.6.a.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue (à valeurs complexes) sur $[0,+\infty[$, et on a $\left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = x^n e^{-x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x} = 0$ par croissance comparée, ce qui montre que $|x^n e^{-(1-i)x}|$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable.
  Ceci montre que l'intégrale I_n est absolument convergente, donc convergente.
- Ensuite, on fait une intégration par parties à partir de I_{n+1}, en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$ et en intégrant $x \mapsto e^{-(1-i)x}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-(1-i)x}dx = \left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}x^{n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}dx,$$

  et ceci a du sens car $\lim\limits_{X\to+\infty}\left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}x^{n+1}\right]_0^X = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^{-(1-i)X}}{-(1-i)}X^{n+1}$ existe
  (en effet, $\left|\frac{e^{-(1-i)X}}{-(1-i)}X^{n+1}\right| = \frac{X^{n+1}e^{-X}}{\sqrt{2}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
  On obtient donc la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i}I_n$.

- On en déduit par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

  En effet, c'est vrai pour $n = 0$ $\Big($puisque $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)x}dx = \left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i}\Big)$, et si pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$, alors

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} I_n = \frac{n+1}{1-i} \times \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(1-i)^{n+2}}.$$

Remarque
L'énoncé ne demandait la formule que pour $n \geq 1$. Curieux...

III.6.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin(x) dx = \int_0^{+\infty} Im\left(x^{4k+3} e^{-(1-i)x}\right) dx = Im(I_{4k+3}).$$

Or, d'après les formules établies précédemment, $I_{4k+3} = \dfrac{(4k+3)!}{((1-i)^4)^{k+1}} = \dfrac{(4k+3)!}{(-4)^{k+1}} \in \mathbb{R}$, donc la partie imaginaire de I_{4k+3} est nulle. On en déduit la nullité de l'intégrale considérée.

III.6.c. Effectuons le changement de variable $u = x^4$ dans l'intégrale impropre convergente précédente. L'application $x \mapsto x^4$ est une bijection de classe C^1 de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$, donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin(x) dx \underset{du=4x^3dx}{=} \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^k \sin(u^{1/4}) e^{-u^{1/4}} du.$$

En posant $f(u) = \sin(u^{1/4})e^{-u^{1/4}}$ pour tout $u \geq 0$, on définit une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R})$ qui est non nulle ($f(1) = \sin(1)e^{-1} \neq 0$ par exemple) et dont tous les moments sont nuls.

Remarque
Le théorème des moments montré à la question **III.4.** ne se généralise donc pas aux intervalles non compacts.

III.6.d. Supposons que f soit limite uniforme sur $[0; +\infty[$ d'une suite de polynômes (P_n).
Nous avons alors $\|P_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq 1$ pour n supérieur à un certain rang $N \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0; +\infty[, \quad |P_n(x)| \leq 1 + |f(x)|$$

Mais la fonction limite f est elle-même bornée sur $[0; +\infty[$ (car elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$, puisque $|f(u)| \leq e^{-u^{1/4}}$). On en déduit que pour tout $n \geq N$, le polynôme P_n est borné sur $[0; +\infty[$, donc constant (puisqu'un polynôme de degré ≥ 1 a une limite infinie en $+\infty$).
Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a (par convergence simple de (P_n) vers f) :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(0) = f(0),$$

ce qui entraîne que f est constante, et ceci est contradictoire ($f(1) \neq f(0)$ par exemple).
La fonction f n'est donc pas une limite uniforme de polynômes sur $[0; +\infty[$.

Partie 3 : Exemple via un théorème de Dini

III.7. Une étude rapide montre que la fonction polynomiale $g_x : t \mapsto t + \frac{1}{2}(x - t^2)$ est strictement croissante sur $I =]-\infty, \sqrt{x}]$, et que $g_x(I) =]-\infty, \sqrt{x}] = I$ (puisque $g_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$).
Le premier terme $u_0 = 0$ est dans I (puisque $x \geq 0$), donc une récurrence facile montre que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc majorée par $\sqrt{x}$.
D'autre part, $u_1 = g_x(u_0) = g_x(0) = \frac{x}{2} \geq u_0$, donc la croissance de g_x sur l'intervalle I implique (par récurrence) celle de la suite (u_n), puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \implies g_x(u_n) \leq g_x(u_{n+1}) \implies u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

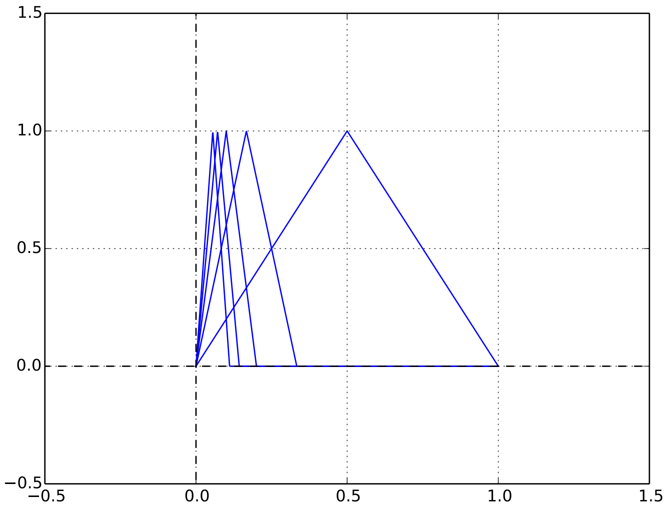
La suite (u_n) est donc croissante et majorée, ce qui entraîne sa convergence vers un réel ℓ tel que $g_x(\ell) = \ell$ par continuité de g_x, c'est-à-dire tel que $x - \ell^2 = 0$. Or, (u_n) ne peut pas converger vers $-\sqrt{x}$ si $x > 0$ (car $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \geq u_0 = 0$), donc elle converge nécessairement vers $\sqrt{x}$.
Finalement, la suite (u_n) converge (en croissant) vers $\sqrt{x}$.
III.8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par (cette expression n'était pas exigée par le sujet) :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2n(x-a)}{b-a} & \text{si } a \leq x < a + \dfrac{b-a}{2n} \\[2ex] 2 - \dfrac{2n(x-a)}{b-a} & \text{si } a + \dfrac{b-a}{2n} \leq x < a + \dfrac{b-a}{n} \\[2ex] 0 & \text{si } a + \dfrac{b-a}{n} \leq x \leq b \end{cases}.$$

f_n est affine par morceaux, et son graphe est la réunion des segments $[AB_n], [B_nC_n], [C_nD]$, où

$$A = (a,0), \quad B_n = \left(a + \frac{b-a}{2n}, 1\right), \quad C_n = \left(a + \frac{b-a}{n}, 0\right), \quad D = (b,0).$$

Voici le graphe de f_n pour $[a,b] = [0,1]$, et $n \in \{1,3,5,7,9\}$:



Les fonctions f_n sont clairement continues sur $[a,b]$ la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (qui est continue), puisque $f_n(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $x \in]a,b]$, $f_n(x) = 0$ pour $n > \frac{b-a}{x-a}$.
Mais la convergence vers 0 n'est pas uniforme puisque

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = 1,$$

et cette quantité ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
III.9.
III.9.a. Pour $x \in [0;1]$ fixé, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite (u_n) étudiée à la question **III.7.**, puisque $P_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = g_x(P_n(x))$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in [0;1]$, la suite de polynômes (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0;1]$.
III.9.b. Les P_n et la fonction limite $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0;1]$, et la suite de fonctions (P_n) est croissante, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1], \quad P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \geq 0,$$

puisque d'après **III.7.**, on a $P_n(x) \in [0;\sqrt{x}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'après le théorème de Dini, la convergence des (P_n) vers $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

Partie 4 : Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

III.10.

III.10.a. Puisque S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, l'espérance de S_n est $E(S_n) = nx$ et sa variance est $V(S_n) = nx(1-x)$. Appliquons alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout réel $\beta > 0$,

$$P(|S_n - E(S_n)| > \beta) \leq \frac{V(S_n)}{\beta^2}.$$

En choisissant $\beta = n\alpha$ (avec $\alpha > 0$), on obtient ainsi :

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Mais le polynôme $x \mapsto x(1-x)$, qui a pour racines 0 et 1, atteint son maximum en $x = 1/2$, et ce maximum vaut $1/4$. On a donc la majoration

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III.10.b. D'après la formule de transfert, on a, puisque $S_n(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$,

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mais par définition de la loi binomiale, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, donc

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[0;1]$, donc uniformément continue (c'est le théorème de Heine). Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (a,b) \in [0;1]^2, \quad |a-b| \leq \alpha \implies |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on a alors $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$, donc en utilisant l'implication précédente avec $a = \frac{k}{n}$, on en déduit

$$\forall x \in [0;1], \qquad \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha \implies \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

III.11.b. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| &\leq \sum_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P(S_n = k) \\
&\leq \sum_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} 2\|f\|_\infty P(S_n = k) \\
&= 2\|f\|_\infty \times P\left(\bigcup_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} (S_n = k)\right),
\end{aligned}$$

la réunion étant disjointe.
Mais pour tout éventualité $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}\omega \in \bigcup_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} (S_n = k) &\iff \exists k \in \{0, \cdots, n\},\ \left|\tfrac{k}{n} - x\right| > \alpha \text{ et } S_n(\omega) = k \\ &\iff \left|\tfrac{S_n(\omega)}{n} - x\right| > \alpha \iff \omega \in \left(\left|\tfrac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right),\end{aligned}$$

ce qui fait que $P\left(\displaystyle\bigcup_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} (S_n = k)\right) = P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.
La majoration de la somme étudiée se réécrit donc

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \quad \leq \quad 2\|f\|_\infty \times P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

III.11.c. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le réel $\alpha > 0$ introduit dans la question **III.11.a.**.
Fixons $x \in [0; 1]$. Pour estimer la différence $|B_n(f)(x) - f(x)|$, il suffit de réécrire $f(x)$ sous la forme d'une somme :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f(x)$$

(d'après la formule du binôme). On a alors :

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f(x)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right|.\end{aligned}$$

Décomposons alors cette somme suivant les indices $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$ et suivant ceux tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha$:

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \\ &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P(S_n = k) + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right|.\end{aligned}$$

D'après la question **III.11.a** : on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ pour tous les k tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$. On en déduit une majoration de la première somme :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P(S_n = k) \leq \varepsilon \times \underbrace{\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha} P(S_n = k)}_{\leq P(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Quant à la deuxième somme, on peut la majorer en utilisant le résultat de **III.11.b** :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \leq 2\|f\|_\infty \times P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Or $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=P\left(|S_n-nx|>n\alpha\right)\leq\frac{1}{4n\alpha^2}$ (d'après **III.10.a.**), donc

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

A ce stade, on a montré :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0;1],\qquad |B_n(f)(x)-f(x)|\leq\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

Reste à choisir n suffisamment grand : en posant $n_0=E\left(\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2}\right)+1$, on a

$$n\geq n_0\qquad\Longrightarrow\qquad\forall x\in[0;1],\ |B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon.$$

Finalement, on a établi que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \forall x\in[0;1],\qquad |B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon,$$

ce qui signifie exactement que la suite des polynômes de Bernstein $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$. La fonction f étant une quelconque fonction continue de $[0;1]$, on a démontré le théorème de Weierstrass sur $[0;1]$.