

# CONCOURS COMMUN INP 2023 CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2- MP

m.laamoum@gmail.com

## EXERCICE I

**Q1.**  $\triangleright$  Pour tout  $P, Q$  dans  $E$  on a  $P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$  converge et l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle$  est bien définie.

$\triangleright$  La linéarité de l'intégrale entraîne la bilinéarité de  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

$\triangleright$  La symétrie de  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est évidente.

$\triangleright$  On a  $\langle P | P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x} dx \geq 0$  car  $P^2(x)e^{-x} \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$ .

$\triangleright$  Si  $\langle P | P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x} dx = 0$ , comme la fonction  $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$  est continue positive alors elle s'annule sur  $[0, +\infty[$  par suite  $P$  s'annule sur  $[0, +\infty[$  donc  $P$  est le polynôme nul (*car il admet une infinité de racines*)

Finalement l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Q2.**  $\triangleright$  Cherchons une base orthonormée de  $F = \mathbb{R}_1[X]$  :

Posons  $P_0 = 1$  et  $P_1 = X + a$  tels que  $\langle P_0 | P_1 \rangle = 0$ , alors on a :

$$\langle X + a | 1 \rangle = \langle X | 1 \rangle + a \langle 1 | 1 \rangle = 0$$

de plus  $\langle 1 | 1 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$  et  $\langle X | 1 \rangle = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$ , donc  $a = -1$  et  $P_1 = X - 1$ .

La famille  $(P_0, P_1)$  est orthogonale, de plus on a  $\|P_0\| = 1$  et

$$\begin{aligned} \|P_1\|^2 &= \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc la famille  $(P_0, P_1)$  est orthonormée, par suite c'est une base orthonormée de  $F$ .

$\triangleright$  On a  $P_F(X^2) = \langle X^2 | P_0 \rangle P_0 + \langle X^2 | P_1 \rangle P_1$ , avec :

$$\begin{aligned} \langle X^2 | P_0 \rangle &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2 \\ \langle X^2 | P_1 \rangle &= \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 4 \end{aligned}$$

donc  $\boxed{P_F(X^2) = 2P_0 + 4P_1 = 4X - 2}$ .

**Q3.**  $\triangleright$  Ecrivons  $\|X^2\|^2 = \|(X^2 - P_F(X^2)) + P_F(X^2)\|^2$  et on sait que  $P_F(X^2)$  est l'unique élément de  $F$  tel que  $X^2 - P_F(X^2)$  est dans  $F^\perp$  donc  $P_F(X^2) \perp (X^2 - P_F(X^2))$ , le théorème de Pythagore donne :

$$\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$$

$\triangleright$  On a

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx &= \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX + b)\|^2 \\ &= d^2(X^2, F) \end{aligned}$$

d'après le théorème de la projection orthogonale on a  $d^2(X^2, F) = \|X^2 - P_F(X^2)\|^2$ , donc

$$d^2(X^2, F) = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$$

le calcul donne :

$$\begin{aligned} \|X^2\|^2 &= \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 24 \\ \|P_F(X^2)\|^2 &= \int_0^{+\infty} (4x - 2)^2 e^{-x} dx \\ &= 16 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 16 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + 4 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 20 \end{aligned}$$

d'où

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx = d^2(X^2, F) = 4$$

## EXERCICE II

**Q4.**  $Z = \sup(X, Y)$  et  $T = \inf(X, Y)$ , on a  $T \leq Z$  donc :

- ▷ Si  $m < n$  alors  $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$ .
- ▷ Si  $m > n$  alors

$$[Z = m] \cap [T = n] = ([X = m] \cap [Y = n]) \cup ([X = n] \cap [Y = m])$$

c'est une réunion d'événements disjoints ainsi

$$\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = m] \cap [Y = n]) + \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = m])$$

par indépendance de  $X$  et  $Y$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) &= \mathbb{P}([X = m]) \mathbb{P}([Y = n]) + \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y = m]) \\ &= 2p^2 q^{n+m} \end{aligned}$$

- ▷ Si  $m = n$  alors

$$[Z = n] \cap [T = n] = ([X = n] \cap [Y = n])$$

et

$$\mathbb{P}([Z = n] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n])$$

l'indépendance de  $X$  et  $Y$  donne

$$\mathbb{P}([Z = n] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y = n]) = p^2 q^{2n}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ p^2 q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2 q^{n+m} & \text{si } m > n \end{cases}$$

**Q5.** La famille  $([T = n])_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements donc pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on a :

$$\mathbb{P}(Z = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n])$$

or si  $m < n$   $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$  donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = m) &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) \\ &= p^2 q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{n+m} \\ &= p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \frac{1 - q^m}{1 - q} \end{aligned}$$

ce qui donne  $\boxed{\mathbb{P}(Z = m) = pq^m (2 - (q + 1)q^m)}$

# PROBLEME

## Partie I

**Q6. Un exemple -**

▷ La matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

▷ On vérifie facilement que :  $\Pi_1^2 = \Pi_1$  ,  $\Pi_2^2 = \Pi_2$  ainsi  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont des matrices de projecteur.  
 $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$  ,  $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$  et  $\Pi_1\Pi_2 = 0$

**Q7.  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $P$  et  $Q$  deux polynômes premiers entre eux.**

▷ Soit  $x \in \text{Ker}(P(u))$  donc  $P(u)(x) = 0$  et  $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$  donc  $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$  ce qui donne  $x \in \text{Ker}[(PQ)(u)]$  , ainsi  $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$  (de même, on a :  $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$  ).

▷ On applique le théorème de Bézout : Il existe  $A, B \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $AP + BQ = 1$ . Ce qui donne

$$\text{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si  $x \in \text{ker } P(u) \cap \text{ker } Q(u)$ , on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{ker } P(u) \cap \text{ker } Q(u) = \{0\}$ .

▷ On a  $\text{ker}(P \times Q)(u) \subset \text{ker } P(u) + \text{ker } Q(u)$  et si  $x \in \text{ker}(P \times Q)(u)$ , alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \text{ker } Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \text{ker } P(u)}$$

En effet,  $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$  et

$P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$  . Donc  $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$

Finalement on a montrer :  $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$ .

**Q8. On a  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$  ,  $P_1$  et  $P_2$  sont premiers entre eux,  $Q_1 = P_2^{k_2}$  et  $Q_2 = P_1^{k_1}$ .**

$Q_1$  et  $Q_2$  sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes  $R_1$  et  $R_2$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$ .

On a  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$  et pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$ , il existe des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$ .

**Q9. On a  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$  , pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$  .  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ .**

▷ Il existe des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$  et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$  donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \dots + R_m(u) \circ Q_m(u) = \text{id}_E$$

par suite  $\boxed{\sum_{i=1}^m p_i = id_E}$ .

▷ Soit  $i, j$  des entiers distincts de  $\{1, 2, \dots, m\}$ , on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_i R_j)(u) \circ (Q_i Q_j)(u) \end{aligned}$$

et  $Q_i Q_j = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \frac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \frac{\pi_u}{P_i^{k_i} P_j^{k_j}}$ , car  $P_i^{k_i} P_j^{k_j}$  divise  $\pi_u$ , par suite  $\pi_u$  divise  $Q_i Q_j$ , il est donc annulateur de  $u$  d'où  $p_i \circ p_j = 0$ .

▷ Soit  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, m\}$ , on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^m p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si  $i \neq j$  on a  $p_i \circ p_j = 0$  donc  $p_i^2 = p_i$ , et  $p_i$  est un projecteur.

**Q10.** On a  $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $N_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ .

Les polynômes  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  sont deux à deux premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a  $\chi_u(u) = 0$  donc  $\ker \chi_u(u) = E$  d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^m N_i$$

**Q11.** ▷ La somme  $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$  est directe :

Soit  $(y_1, \dots, y_m) \in \text{Im } p_1 \times \dots \times \text{Im } p_m$  tels que  $y_1 + \dots + y_m = 0$ , il existe  $x_1, \dots, x_m$  dans  $E$  vérifiant  $y_i = p_i(x_i)$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, m\}$ . Soit  $i, j$  distinct dans  $\{1, \dots, m\}$  alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + \dots + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc  $(y_1, \dots, y_m) = (0, \dots, 0)$ , ce qui prouve que la somme  $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$  est directe

▷  $E = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$  :

On a  $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m \subset E$  et  $p_1 + \dots + p_m = id_E$  donc pour tout  $x$  dans  $E$  on a  $x = p_1(x) + \dots + p_m(x)$  donc  $x \in \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$  par suite  $E \subset \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$ , d'où  $E = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$ .

Ainsi on a  $E = \text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m$

**Q12.** D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a  $\pi_u$  divise  $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  et l'ensemble des racines

de  $\pi_u$  est exactement le spectre de  $u$ , donc  $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\beta_i}$  avec  $0 < \beta_i \leq \alpha_i$ , on a alors

$P_i^{k_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ , à l'indice près.

Soit  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  et  $y_i = p_i(x_i) \in \text{Im } p_i$ , puisque  $P_i^{k_i}$  divise  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  et  $P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$  alors  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(p_i) = 0$ , par suite  $y_i \in N_i$  et  $\text{Im } p_i \subset N_i$ .

D'autre part  $E = \text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$  donc

$$\dim(\text{Im } p_1) \oplus \dots \oplus \dim(\text{Im } p_m) = \dim(N_1) \oplus \dots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tel que  $\text{Im } p_i \neq N_i$  donc  $\dim(\text{Im } p_i) < \dim(N_i)$  par suite

$$\dim(\text{Im } p_1) \oplus \dots \oplus \dim(\text{Im } p_m) < \dim(N_1) \oplus \dots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  on a  $\dim(\text{Im } p_i) = \dim(N_i)$  et  $\text{Im } p_i = N_i$ .

## Partie II

**Q13.**  $u$  est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de  $u$  d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$$

**Q14.** On a, pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$  où  $P_i = X - \lambda_i$ , et  $\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$ .

▷ Avec un peu de détails, la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{\pi_u}$  s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec  $a_i = \left[ \frac{P_i(X)}{\pi_u(X)} \right]_{X=\lambda_i} = \left[ \frac{1}{Q_i(X)} \right]_{X=\lambda_i} = \theta_i$  donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

▷ Cette relation donne

$$1 = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^m \theta_i Q_i$$

suitant les notation de Q10 on a pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = \theta_i Q_i(u) = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$ .

**Q15.** On suppose que  $\deg \pi_u > 1$ . On a  $1 = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i}$  donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{X - \lambda_i + \lambda_i}{X - \lambda_i} \pi_u \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \theta_i \right) \pi_u + \sum_{i=1}^m \theta_i \lambda_i Q_i(X) \end{aligned}$$

De la relation  $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$  on a  $\frac{x}{\pi_u(x)} = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{x}{x - \lambda_i}$  et on fait tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 0, \text{ d'où}$$

$$X = \sum_{i=1}^m \theta_i \lambda_i Q_i(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} \quad (*)$$

Par substitution de  $X$  par  $u$  on obtient

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i.$$

Si  $\deg \pi_u = 1$  : la relation (\*) n'a pas de sens, mais on a  $\pi_u = X - \lambda_1$  et  $u = \lambda_1 \cdot p_1$  avec  $p_1 = id_E$ .

**Q16. Exemple :** on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) La matrice  $A$  est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Et  $A^2 = 4I_4$ .  
b) On a  $A^2 = 4I_4$  donc  $X^2 - 4$  est annulateur de  $A$  et  $\pi_A$  divise  $X^2 - 4$ ,  $A$  n'est pas de la forme  $\alpha I_4$  donc forcément  $\deg \pi_A \geq 2$  par suite  $\pi_A = X^2 - 4$ .

On a

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{\theta_1}{X - 2} + \frac{\theta_2}{X + 2}$$

$$\text{avec } \theta_1 = \left[ \frac{X - 2}{\pi_u(X)} \right]_{X=2} = \frac{1}{4} \text{ et } \theta_2 = \left[ \frac{X + 2}{\pi_u(X)} \right]_{X=-2} = \frac{-1}{4}, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{1}{4} \left( \frac{-1}{X + 2} + \frac{1}{X - 2} \right)$$

et  $Q_1 = X - 2$ ,  $Q_2 = X + 2$ .

Par suite  $\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(-2)} = \frac{-1}{4}(A - 2I_4)$  et  $\Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(2)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4)$ .

On trouve

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(-A + 2I_4) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) On a les relations :

$$\triangleright A = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2$$

$$\triangleright \Pi_1 \cdot \Pi_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_1 = 0$$

$$\triangleright \Pi_1^k = \Pi_1, \Pi_2^k = \Pi_2 \text{ pour tout entier naturel } k.$$

On obtient pour tout entier naturel  $k$   $A^k = \lambda_1^k \Pi_1 + \lambda_2^k \Pi_2$ , donc

$$A^k = 2^k \Pi_1 + (-2)^k \Pi_2 = 2^k (\Pi_1 + (-1)^k \Pi_2).$$

Ainsi pour tout entier naturel  $k$  on a

$$A^{2k} = 4^k I_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^k A$$

**Q17.** On a  $\mathbb{C}[v] = \{P(v), P \in \mathbb{C}[X]\}$ , posons  $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  on effectue la division euclidienne de  $P$  par  $\pi_v$  :

$$P = Q\pi_v + R \text{ avec } \deg R \leq d-1,$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$

donc  $P(v) \in \text{vect} \{id_E, v, \dots, v^{d-1}\}$  et  $\mathbb{C}[v] \subset \text{vect} \{id_E, v, \dots, v^{d-1}\}$ . Par suite  $\dim \mathbb{C}[v] \leq d$ .

Si on suppose que  $\dim \mathbb{C}[v] \leq d-1$  alors la famille  $\{id_E, v, \dots, v^{d-2}\}$  est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de  $v$  de degré inférieur à  $d-1$  ce qui contredit le fait que  $\pi_v$  est annulateur de degré minimal égal à  $d$ .

Donc  $\dim \mathbb{C}[v] = d$ .

**Q18.** On a  $\deg \pi_u = m = \dim \mathbb{C}[u]$ .

La famille  $(p_1, \dots, p_m)$  est libre :

Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  dans  $\mathbb{C}^m$  tels que  $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m = 0$ , on compose par  $p_j$ , sachant que  $p_i \circ p_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $p_i \circ p_i = p_i$ , on obtient  $\alpha_j = 0$ , ainsi  $(p_1, \dots, p_m)$  est libre.

$(p_1, \dots, p_m)$  est libre de cardinal  $m$  donc c'est une base de  $\mathbb{C}[u]$ .

**Q19.** Si  $u$  non diagonalisable, par exemple nilpotent non nul, alors  $\pi_u$  n'est pas à racines simple et  $\deg \pi_u > m$ , donc la famille  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  n'est pas génératrice et n'est pas une base de  $\mathbb{C}[u]$ .

**Q20.** On suppose qu'il existe  $m$  endomorphismes non nuls  $f_i$  de  $E$  et  $m$  complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  distincts, tels que pour tout entier naturel  $q$  on ait  $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$ .

Donc pour tout polynôme  $P$  on a  $P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$ , en particulier le polynôme  $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$  est annulateur à racines simples, donc  $u$  est diagonalisable.

Fin.