EXERCICE I

Q1. On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = det(XI_3 - A)$, on obtient :
J'ai procédé par opérations sur les colonnes : $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & 0 & 2 \\ 0 & X+2 & 6 \\ -X-2 & X+2 & X+3 \end{vmatrix} = (X+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & X+3 \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-1)$$

On étudie alors la dimension de $\text{Ker}(A+2I_3)$, $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A+2I_3) \Leftrightarrow x - y + z = 0$

Ainsi la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre (-2) est égale à ma multiplicité de (-2) dans $\chi_A(X)$, on a $\text{Ker}(A+2I_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

De même, après calcul, on trouve $\text{Ker}(A - I_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

la dimension des sous-espaces propres de A est égale à la multiplicité des valeurs propres associées, A est diagonalisable et $P^{-1}AP$ est diagonale égale à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q2. On a la relation $X_n = AX_{n-1}$ pour $n > 0$, par une récurrence immédiate, on a $X_n = A^n X_0$
De plus par associativité du produit matriciel, on a $X^n = PD^nP^{-1}$ donc $P^{-1}X_n = Y_n = D^nY_0$

On identifie alors $Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n\beta_0 \\ (-2)^n\gamma_0 \end{pmatrix}$

$X_n = PY_n$, on a donc $X_n = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 + (\beta_0 + \gamma_0)(-2)^n \\ 6\alpha_0 + \beta_0(-2)^n \\ \alpha_0 - \gamma_0(-2)^n \end{pmatrix}$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\subset N}$ et $(w_n)_{n\subset\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$

De là, avec cette contrainte, (X_n) est une suite constante égale à X_0, on a donc $X_1 = X_0$ car la suite est constante et $X_1 = AX_0$ par construction, donc $X_0 = AX_0$ ce qui traduit le fait que X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, on a donc, pour tout entier n, $X_n = X_0 \in Vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

EXERCICE II

Q3. L'instruction `s[1]` permet d'obtenir $\sigma(1)$
La transposition demandée est représentée par `[0,1,3,2]`

Q4. Attention à l'ordre, applique pour i parcourant la liste l'image par σ_1 de $\sigma_2(i)$

```
L=[]
for k in range (len(s1)):
    L.append(s1[s2[k]])
return L
```

Q5. On a $\sigma^{-1} \circ \sigma = id$, donc pour i parcourant la liste associée à σ, on a $\sigma^{-1} \circ \sigma(i) = i$
On construit donc une liste "vide" que l'on complète avec la relation précédente

```
def inv(s):
    L=[]
    for k in range (len(s)):
        L.append(0)
    for k in range (len(s)):
        L[s[k]]=k
    return L
```

Q6. On doit donc vérifier les 3 propriétés suivante :

- le neutre `[0,1,2,3]` est un élément de `G`.
- la composée de deux éléments de `G` appartient à `G`
- l'inverse de tout élément de `G` appartient à `G`.

On pose une variable `res` qui par défaut vaut `True` et deviendra `False` si l'une des 3 conditions précédente n'est pas vérifiée

```
res = True
if [0,1,2,3] not in G :
    res = False
for k in range (len(G)):
    if inv(G[k]) not in G :
        res = False
    for j in range (k+1,len(G)):
        if comp(G[k],G[j]) not in G :
            res = False
return res
```

Q7. Puisque le groupe est cyclique, on va construire à partir de σ, successivement : σ^2, σ^3...jusqu'à obtenir l'identité représentée par la liste`[0,1,2,3]`.

```
def cyclique(s):
    G=[s]
    t= comp(s,s)
    while [0,1,2,3] not in G:
        G.append(t)
        t = comp(t,s)
    return G
```

PROBLÈME

Q8. Soit $X = \big(x_1, x_2\big) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $X^\top AX = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$.
De plus $x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0$ équivaut à $x_1 = x_2$ ce qui est exclus donc $X^\top AX > 0$
Donc A est définie positive

Caractérisation spectrale

Q9. Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont strictement positives.

D'après le théorème spectral, cette matrice est ortho-diagonalisable, il existe donc une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^\top DQ$ avec $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$
alors on a successivement : $X^\top MX = X^\top Q^\top DQX = (QX)^\top D(QX)$

On pose $Y = QX$, et on note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on obtient $DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$

et donc $X^\top MX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$
Puisque $X \neq 0$, alors $Y \neq 0$ et donc l'un au moins des y_i est non nul, de plus les valeurs propres sont strictement positives donc $X^\top MX > 0$ et M est définie positive

Réciproque

Supposons M définie positive. Soit λ valeur propre de M associée au vecteur propre X ($X \neq 0$ par définition)
On a donc $X^\top MX > 0$ car M est définie positive
Or $X^\top MX = X^\top \lambda X = \lambda \|X\|_2^2 > 0$, or $X \neq 0$ donc $\|X\|_2^2 > 0$ et de là $\lambda > 0$
Ainsi les valeurs propres de M sont strictement positives.

Q10. Application :

Le polynôme dérivé est $P'(X) = 3(X - 1)(X - 3)$, la fonction polynôme P, continue sur $\mathbb{R}$, est donc croissante sur $[0, 1[$, décroissante sur $[1, 3[$ puis croissante sur $[3, +\infty[$

De plus $P(0)P(1) < 0$, de même $P(1)P(3) < 0$ et $P(3) < 0$ et $\lim X \to +\infty P(X) = +\infty$ donc en appliquant le théorème de la bijection sur ces trois intervalles, on en déduit que ce polynôme de degré 3 admet exactement 3 racines distinctes, toutes les 3 strictement positives.

La matrice est symétrique réelle, son polynôme caractéristique P, on en déduit avec l'équivalence précédente que M est définie positive.

Un critère en dimension 2

Q11. On rappelle que pour A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$

Soit M une matrice symétrique définie positive, ses valeur propres sont donc strictement positives d'après **Q9.** et elle est ortho-diagonalisable d'après le théorème spectral (il existe donc une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^\top DQ$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

On a donc $Tr(M) = Tr(Q^\top(DQ)) = Tr((DQ)Q^\top) = Tr(DI_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0.$

De même pour A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $det(AB) = det(BA)$

On a donc de la même façon $det(M) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$

Q12. Soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs

La matrice M est donc diagonalisable d'après le théorème spectral, on note λ_1 et λ_2 ses deux valeurs propres

Puisque $det(M) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, on en déduit que les deux valeurs propres sont non nulles et de même signe.

De plus $Tr(M) = lambda_1 + \lambda_2 > 0$ donc les deux valeurs propres sont strictement positives.

Ainsi M est définie positive.

Q13. LA réponse est non, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a son déterminant (égal à 3) et sa trace (égale à 1) strictement positifs et pourtant la matrice est symétrique réelle sans être définie positive.

Q14. la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

On commence par déterminer les points critiques de la fonction :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{yx^2} &= 0 \\ 1 - \frac{1}{xy^2} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{yx^2} &= 0 \\ xy^2 &= yx^2 \end{cases} \underset{(xy\neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^3 &= 1 \\ x &= y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

f admet donc un unique point critique $A(1,1)$ sur $\mathbb{R}^2$.

On construit ensuite la matrice Hessienne en ce point :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3 y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3 x}$$

La matrice Hessienne de f en A est $H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, son déterminant est strictement positif (2) et sa trace est strictement positive (4), les deux valeurs propres de la matrice sont strictement positives, c'est donc une matrice symétrique de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$

et donc $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad (h,k)H_f(A)\binom{k}{h} > 0$,

A l'aide du développement limité à l'ordre 2 de f en A, on peut dire que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha + h, \frac{\alpha}{2} + k) = f(\alpha, \frac{\alpha}{2}) + 0 + \frac{1}{2}(h,k)H_f(A)\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|^2)$$

C'est à dire que sur un voisinage de A, $f(\alpha + h, 2\alpha + k) - f(A) > 0$, ce qui signifie que l'on a en A un minimum local strict.

Le critère de Sylvester

Q15. Remarque importante : il y a une erreur de l'énoncé sur cette question, il faut absolument préciser que X_k est non nul. Dans le cas où $X_k = 0$, il n'est pas possible de construire X vérifiant ce que l'on souhaite.

La matrice M s'écrit par blocs $M = \begin{pmatrix} M_k & A_{k,n-k} \\ A_{k,n-k}^\top & N_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, par le produit par blocs, on obtient

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

Q16. Soit M une matrice réelle définie positive. Soit k un entier $(0 < k < n)$

Soit $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $X \neq 0$

On a donc $X^\top M X > 0$ car M est définie positive

Donc $X_k^\top M_k X_k > 0$ avec l'égalité de la question précédente

Donc M_k est définie positive et avec le résultat de **Q11.** on obtient $det(M_k) > 0$

Ceci est vrai pour tout entier k donc M vérifie le critère de Sylvester

Q17. M_{n-1} est définie positive, son déterminant est donc non nul et M_{n-1} est donc inversible.
Pour un vecteur $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ donné, il existe donc un unique vecteur $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}^{-1}U = -V$ c'est à dire tel que $M_{n-1}V + U = 0$.
En utilisant le produit matriciel par bloc, on a

$$MQ = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{n-1} & V \\ 0_{1n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}$$

de là

$$Q^\top MQ = \begin{pmatrix} l_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}$$

Or $V^\top M_{n-1} + U^\top = [M_{n-1}V + U]^\top = 0$

$$= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}$$

Il reste à montrer que $\beta > 0$

Q est triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux, donc $det(Q) = 1$

De plus une matrice et sa transposée ont le même déterminant donc $det(Q^\top) = 1$
$det(Q^\top MQ)det(Q^\top)det(M)det(Q) = det(M) > 0$ d'une part
et d'autre part, en utilisant le déterminant par blocs, $det(Q^\top MQ) = det(M_{n-1})\beta$
Comme M_{n-1} est définie positive, on en déduit que $\beta > 0$.
On a donc ainsi montrer que $Q^\top MQ$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

Q18. Soit la propriété $\mathcal{P}_m$: une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive

- Pour $m = 1$, la propriété est vraie car la matrice n'a alors qu'un seul coefficient qui est strictement positif car son déterminant est strictement positif ; elle est donc définie positive car sa seule valeur propre est strictement positive
- supposons la propriété vraie au rang $n-1$ ($n \geq 2$)
  On considère une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester
  M s'écrit $M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$
  On souhaite montrer que la matrice est définie positive, on prend donc un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ et on s'intéresse à $X^\top MX$
  La matrice Q de la question précédente est inversible (son déterminant vaut 1), donc il existe un unique $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ tel que $QY = X$
  On peut donc écrire
  $X^\top MX = (QY)^\top MQY = Y^\top Q^\top MQY$
  En notant $Y_{n-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ et $Y_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$
  On obtient $X^\top MX = Y_{n-1}^\top M_{n-1}Y_{n-1} + \beta y_n^2$
  Or $Y_{n-1}^\top M_{n-1}Y_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence et $\beta > 0$ (cf question précédente)
  On a donc $X^\top MX \geq 0$
  Supposons $X^\top MX = 0$ alors $y_n = 0$ et $Y_{n-1}^\top M_{n-1}Y_{n-1} = 0$, cela implique $Y_{n-1} = 0_{n-1,1}$ et donc $Y_n = 0_{n,1}$ et donc $Q^{-1}Y_n = X = 0_{n,1}$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse.
  Donc $X^\top MX > 0$
  ce qui prouve l'hérédité
  On a ainsi montré par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. On calcule les mineurs principaux :

$$|2| = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \qquad |C(x)| = 1 - 2x^2$$

avec la question précédente, on en déduit que la matrice sera définie positive si et seulement si $1 - 2x^2 > 0$ c'est à dire $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Q20. On calcule les mineurs principaux et on obtient en particulier :
avec les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-6) + (-5) < 0$$

Donc au moins un mineur principal n'est pas strictement positif, donc la matrice n'est pas définie positive.

Q21. première méthode (en rapport avec le problème)

On "devine" la matrice M telle qu'en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on ait $X^\top MX = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$

En s'inspirant de la question **Q8.** on trouve $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \frac{-3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le calcul des trois mineurs principaux donne respectivement $4 > 0$, $3 > 0$ et $\frac{3}{4} > 0$ donc la matrice est définie positive et donc pour tout X, $X^\top MX > 0$, c'est à dire $4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz > 0$.

Autre méthode
Soit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz &= x^2 + 2xy + y^2 + 3(x^2 - xz) + z^2 \\ &= (x+y)^2 + 3\left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}z^2 + z^2 \\ &= (x+y)^2 + 3\left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}z^2 \end{aligned}$$

la quantité sera nulle si et seulement si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on a donc tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q22. On note d_n le déterminant de S_n
en développant selon la première ligne, on obtient pour $n \geq 2$:

$$d_n = \sqrt{3} d_{n-1} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & S_{n-2} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = \sqrt{3} d_{n-1} - d_{n-2}$$

On étudie alors la suite récurrente linéaire d'ordre 2 ainsi mise en évidence, l'équation caractéristique associée est $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$ dint les racines complexes sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$
On en déduit que pour tout entier n non nul, $d_n = \alpha cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \beta sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$

avec $d_1 = \sqrt{3}$ et $d_2 = 2$ on détermine $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{3}$
Donc $d_n = cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$
En observant les premières valeurs, on voit $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$ et $d_4 > 0$ mais $d_5 = 0$
donc, d'après le critère de Sylvester, pour que tous les mineurs principaux soient strictement positifs, il faut et il suffit que $n < 5$
On a donc S_n définie positive pour $n < 5$.
NB : la relation de récurrence suffisant à trouver que pour $n = 5$, on a $d_5 = 0$, il n'était pas nécessaire de déterminer explicitement la suite d_n

FIN