- On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.
- Une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite définie positive.
- Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3, \|Ax\| = 1\}.$$

1/ Soit P dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que P est orthogonale. Déterminer $\mathcal{E}(P)$.

2/ Soit A dans $M_3(\mathbb{R})$ inversible.

a/ Justifier que ${}^tAA$ est symétrique définie positive.

b/ En déduire qu'il existe une matrice diagoanle D, avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$${}^tAA = {}^tPD^2P.$$

c/ On pose $S = {}^tPDP$. Montrer que S est symétrique définie positive.

d/ Montrer alors qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $A = QS$.

e/ Démontrer que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

3/ Soient S et S' deux matrices symétriques définies positives telles que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

a/ Soit v un vecteur non nul. En considérant $v/\|S(v)\|$ démontrer que $\|S(v)\| = \left\|S'(v)\right\|$.

b/ En déduire que, pour tout $v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle S(v), S(w)\rangle = \left\langle S'(v), S'(w)\right\rangle.$$

c/ En déduire que $S^2 = S'^2$.

d/ Soit α une valeur propre de S. Montrer que $\ker(S - \alpha \mathrm{Id}) = \ker(S^2 - \alpha^2 \mathrm{Id})$.

e/ Démontrer que $S = S'$.

4/ Soient A et A' dans $GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$ si et seulement si il existe une matrice orthogonale V telle que $A = VA'$.

Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série alternée avec

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$,
- la suite (u_n) converge en décroissant vers 0,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$.

Soit $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

1/ Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_n$.

2/ Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| - |R_{n+1}| = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(u_{n+p} - u_{n+1+p}\right)$. En déduire la monotonie de $(|R_n|)$.

3/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \dfrac{u_{n-1}}{2}$.

4/ En déduire que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{u_n}{2}$.

5/ Application : déterminer un équivalent de $a_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln k}{k}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1\} \text{ et } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\}.$$

1/ On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f.

a/ Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

b/ Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).

c/ Démontrer que les points où les deux dérivées s'annulent sont exactement $(1,0)$ et $(-1,0)$.

d/ Le point de coordonnées $(1,0)$ est-il un extremum local de f ? idem pour $(-1,0)$?

e/ Quels sont les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$?

2/ Désormais g est la restriction de f au disque D.

a/ Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D.

b/ Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.

c/ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les point sur lesquels ce maximum est atteint.

d/ Déterminer a et les points sur lesquels ce minimum est atteint.

On étudie dans cet exercice des équations de la forme

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : \qquad M^2 + pM + qI_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients réels, p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n.

1/ Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note

$$E(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_{p,q})$ alors toute matrice $M' \in E(M)$ est également solution.
Dans la suite, les ensembles de solutions des équations $(\mathcal{E}_{p,q})$ pourront être écrits sous laforme d'une réunion d'ensembles $E(A)$

2/ On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$:

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$$

avec a et b deux réls distincts.

a/ Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable.

b/ Déterminer les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$.

3/ On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est-à-dire $M^2 = 0$).

a/ On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.

b/ Énoncer précisément le théorème du rang.

c/ Démontrer que $\operatorname{rg} f \leqslant \frac{n}{2}$.

d/ On pose $p = \operatorname{rg} f$. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

e/ En déduire les solutions de $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4/ On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$:

$$M^2 - 2aM + a^2 I_n = 0$$

avec a réel.

a/ Démontrer que toute solution peut s'écrire $M = N + aI_n$ avec $N^2 = 0$.

b/ En déduire les solutions de $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$.

5/ Démontrer que si n est impair, l'équation $M^2 + I_n$ n'a pas de solution dans $M_n(\mathbb{R})$.

6/ On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$, c'est-à-dire $M^2 + I_n = 0$. On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.

a/ Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b/ Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

c/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$.

7/ Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E_{p,q})$ lorsque $p^2 - 4q < 0$.

On considère les fonctions définies par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\, dt.$$

1/ Pour $x > 0$, justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\, dt$ puis calculer la valeur de cette intégrale.

2/ Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier sa parité.

3/ Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4/ Déterminer un encadrement de $F(x)$ utilisant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\, dt$.

5/ En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers 0, ainsi que la limite de F en $+\infty$.

6/ Étudier les variations de F puis représenter graphiquement F sur $\mathbb{R}^*$.

7/ Démontrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

8/ Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t e^{-\alpha t}\, dt$ et calculer sa valeur

9/ Démontrer que, pour tout $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin t}{e^{2xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin t) e^{-2nxt}.$$

10/ En déduire une relation entre F et G.

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1/ Soit un entier n strictement positif.

a/ Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,dt$.

b/ En effectuant le changement de variable $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,du$ en fonction de l'intégrale I_n.

c/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$

2/ Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3/ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,du.$$

a/ Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,du$.

b/ En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

4/ a/ Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).

b/ Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\,dt \quad \text{pour} \quad |x| < R.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$; il est muni du produit scalaire défini par :
$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$
(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).
- Soit $\Delta : E \longrightarrow E$ défini par :
$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$$

1/ a/ Soit $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$ et $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et orthogonaux. Préciser la dimension de F et de G.

b/ Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

c/ En considérant la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^{2n})$, déterminer les valeurs propres de Δ. Préciser si Δ est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.

d/ Soit $k \in [\![0;2n]\!]$. On pose $\lambda_k = k(k+1)$. Justifier l'existence d'un unique vecteur propre P_k de Δ associé à λ_k, tel que P_k soit de degré k et admette 1 comme coefficient de X^k.

e/ Montrer que pour tout P, Q dans E, on a : $\langle \Delta(P), Q\rangle = \langle P, \Delta(Q)\rangle$. En déduire que pour tout $(k,h) \in [\![0;2n]\!]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h\rangle = 0$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_{2n})$?

f/ Montrer que $(P_0, P_2, \dots, P_{2n})$ est une base de F et $(P_1, P_3, \dots, P_{2n-1})$ est une base de G.

2/ On prend ici $n = 1$ et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par :
$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

a/ Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1. , et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ.

b/ Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X+1$ au sous-espace vectoriel G de E.

c/ Montrer que $C = \{h \in \mathscr{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

d/ Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2).

Soit f l'application définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ par :

$$f:(x,t)\to f(x,t)=e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right).$$

1/ Pour x réel strictement positif fixé, montrer que l'application $t\to f(x,t)$, définie sur $[0,+\infty[$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2/ Soit F l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$x\to F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\,.$$

a/ Prouver que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et, pour x strictement positif, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b/ Montrer que F' est aussi définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F'(x)=\int_0^{+\infty} -te^{-t^2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\,.$$

En déduire que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $F''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3/ Montrer que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x)-2\sqrt{x}\,y'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}y(x)=0.$$

4/ Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5/ On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a/ Déterminer un réel K tel que pour tout réel u :

$$|\cos u-1|\leq Ku^2.$$

b/ Justifier l'existence du réel J défini par : $J=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^6du$.

Pour x réel strictement positif, majorer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\left|\cos(\frac{t^3}{3})-1\right|dt$ en fonction de J et de x.

c/ En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.
- $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égalà 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. 0 est la matrice nulle de E, I est la matrice identité de E. Pour M élément de E, ${}^tM$ et $\mathrm{tr}(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M.
- On note F le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour Y élément de F, ${}^tY$ désigne la matrice transposée de Y.
- Soient A et B deux éléments de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E\,,\ f(M) = AM - MB.$$

Première partie

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1/ On suppose que A et B ont une valeur propre commune notée λ.

a/ Justifier l'existence de Y et Z éléments non nuls de F vérifiant :

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

b/ Prouver que $Y\,{}^tZ$ est un élément non nul de E. Calculer $f(Y\,{}^tZ)$.

2/ On suppose qu'il existe M_0 élément non nul de E tel que : $f(M_0) = O$.

a/ Pour k entier naturel, prouver que : $A^k M_0 = M_0 B^k$. En déduire que pour tout polynôme P à coefficients complexes on a :

$$P(A)M_0 = M_0 P(B).$$

b/ Soit P_A le polynôme caractéristique de A. Que peut-on dire de $P_A(A)$? En déduire que $P_A(B)$ n'est pas inversible dans E, et ensuite que A et B ont une valeur propre commune.

3/ Démontrer que f est une bijection de E sur E si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

4/ En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que : $\mu = \alpha - \beta$.

Deuxième partie

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1/ Pour M et N appartenant à E, on pose : $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^tMN)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

2/ Justifier qu'il existe un unique endomorphisme g de E tel que, pour tout $M, N \in E$, $\langle M, f(N)\rangle = \langle g(M), N\rangle$ et que :

$$\forall M \in \mathbf{E}\,,\ g(M) = {}^tAM - M\,{}^tB.$$

3/ a/ Soit D appartenant à E vérifiant : $\forall M \in E\,,\ DM = MD$. Prouver qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que : $D = aI$.

b/ En déduire que f est l'application nulle si et seulement s'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$A = B = aI.$$

c/ Démontrer que l'endomorphisme f est symétrique si et seulement si les matrices A et B sont symétriques.

4/ a/ On suppose que B est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que n est un entier pair.

b/ On suppose de plus que A est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme $\dfrac{1}{\sqrt{2}}f$ est un endomorphisme orthogonal de E.

5/ On considère le cas particulier : $n = 2$. On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base b de E, où $b = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Vérifier les résultats démontrés aux questions 3.b), 3.c) et 4.b).

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
- Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
- Soit (α_n) une suite réelle. On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1/ Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2/ Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3/ On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

   a/ Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

   b/ Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geqslant N$, on ait $u_n \leqslant K v_n$.

   c/ Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

4/ On suppose que $0 \leqslant \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5/ Pour $n \geqslant 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B : applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1/ Pour $n \geqslant 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2/ Pour $n \geqslant 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

   a/ Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

   b/ Ètablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

   c/ En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3/ Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1\ ;\ \forall n \geqslant 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\ ;\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   a/ Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

   b/ Utimiser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

   c/ Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = 0.$$

   d/ Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

   e/ On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

      i) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(|a_n|) = -\infty$.

      ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

      iii) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tout l'exercice, on identifie un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et sa matrice colonne associée d'une part et un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec sa matrice canoniquement associée, d'autre part.
- I_n désigne la matrice identité d'ordre n.
- Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. On considère $\mathcal{N}$ la norme subordonnée à $\|.\|$, c'est à dire telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a
$$\mathcal{N}(A) = \sup_{\|X\| \leqslant 1} \|AX\|$$
On rappelle que l'on a $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathcal{N}(AB) \leqslant \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

1/ Démontrer que l'on a $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\|X\|$.

2/ Prouver qu'il existe $X_0 \in \mathbb{C}^n$, $X_0 \neq 0$, tel que l'on a $\mathcal{N}(A) = \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

3/ Vérifier l'égalité $\mathcal{N}(I_n) = 1$.
On rappelle que la norme $\mathcal{N}_\infty$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$\mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$$

4/ Justifier, sans le calculer, l'existence de deux réels positifs α et β tels que l'on a
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \alpha\mathcal{N}_\infty(A) \leqslant \mathcal{N}(A) \leqslant \beta\mathcal{N}_\infty(A)$$

Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{C})$ qui possède la propriété suivante :
$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathcal{N}(A - I_n) \leqslant 1$$
ce que l'on peut traduire par : $\mathcal{G}$ est inclus dans la boule fermée de centre I_n et de rayon 1 pour la norme $\mathcal{N}$.

5/ Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ est borné pour la norme $\mathcal{N}$.

6/ Soient $A \in \mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- a/ Justifier que $A^k \in \mathcal{G}$.
- b/ Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Justifier que λ est non nul et déterminer $A^k X$.
- c/ Montrer que l'on a $\|(A^k - I_n)X\| \leqslant \|X\|$. En déduire les inégalités $|\lambda^k - 1| \leqslant 1$ puis $||\lambda^k| - 1| \leqslant 1$.
- d/ Démontrer que $|\lambda| = 1$. *On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et distinguer les cas* $|\lambda| > 1$ *et* $|\lambda| < 1$.

  On pose dans la suite de cette question $\lambda = e^{i\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$.
- e/ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|\cos(k\theta) - 1| \leqslant 1$, puis $\cos(k\theta) \geqslant 0$.
- f/ Montrer alors successivement que l'on a $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ puis $\forall q \in \mathbb{N},\ \theta \in [-\pi/2^q, \pi/2^q]$.
- g/ En déduire $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

7/ Dans toute cette question, on étudie le cas $n = 2$. Soit A une matrice non diagonalisable de $\mathcal{G}$.

- a/ Montrer que A est semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un complexe non nul.
- b/ Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^m puis $\mathcal{N}_\infty(T^m)$.
- c/ Démontrer $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$, puis $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$.
- d/ En déduire que toute matrice de $\mathcal{G}$ est diagonalisable.
- e/ Décrire alors l'ensemble $\mathcal{G}$.

On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$(E) \qquad y' - y = -\frac{1}{e}\frac{1}{1+x}.$$

1/ Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a/ Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \in]-1,1[\mapsto -\frac{1}{e}\frac{1}{1+x}$, et préciser sur quel intervalle ce développement est valable.

b/ Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a_n pour que la somme S soit solution de (E) sur $]-1,1[$.

c/ On suppose la condition précédente satisfaite, démonter qu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!$$

d/ Démontrer que la suite (a_n) est bornée et justifier la relation $R \geqslant 1$.

2/ Démontrer que pour $x > -1$, la fonction

$$F : \begin{cases} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{-t}}{x+t} \end{cases}$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On définit la fonction f sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$\forall x > -1, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

3/ Démontrer que f admet un développement en série entière en 0 de la forme :

$$\forall x \in]-1,1[\, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

et expliciter les coefficients b_n à l'aide des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^p}\,dt$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

4/ Démontrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer $f'(x) - f(x)$ pour $x > -1$.

5/ En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!$ à l'aide des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^p}\,dt$.

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

1/ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

a/ Étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i,j)-ème coefficient de A. Justifier :

$$a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle.$$

b/ En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2/ Montrer que l'entier n est un nombre pair (*Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice* A).

3/ On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4/ Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5/ On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

a/ Montrer que la dimension de F est égale à 2.

b/ Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.

c/ Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ (*Indication : On pourra considérer les vecteurs* $e_1' = \frac{1}{\|x\|} x$ *et* $e_2' = \frac{1}{a\|x\|} u(x)$).

d/ Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6/ On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).

Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}''$ de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
- On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.
- Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1/ Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

a/ $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$

b/ $\forall \ell \in \mathrm{Sp}(A)$, $\ell \geqslant 0$

c/ $\exists B \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble ces matrices.

2/ Soient J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et a un réel. On pose $M = -J + (a+1)I_n$.

a/ Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.

b/ Pour quelles valeurs de a a-t-on $M \in S_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}\,(M) \geqslant n-1$.

3/ Soient $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A.

a/ Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

On notera pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, ℓ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.

b/ Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\ell_i}\,u_i$. Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

c/ Démontrer que : $\ker(a) = \ker(b)$.

4/ Soit $A = (a_{i,j}) \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} < 0)$. a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.2**.

a/ Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ **est libre.** Dans ce but, on considère des scalaires $(g_i)_{i \in [\![1\,;n-1]\!]}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} g_i z_i = 0$.

i. Montrer que l'on a aussi : $\sum_{i=1}^{n-1} |g_i| z_i = 0$.

ii. En utilisant le produit scalaire $\left\langle z_n, \sum_{i=1}^{n-1} |g_i| z_i \right\rangle$, conclure.

b/ Prouver que : $\mathrm{rg}\,(A) \geqslant n-1$.

Corrections

1/ Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $\|Px\| = \|x\|$. Ainsi $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$, c'est-à-dire la sphère unité.

2/ a/ Soit $B = {}^tAA$. On a $B \in M_n(\mathbb{R})$ et ${}^tB = {}^{tt}AA = {}^tAA = B$. La matrice est symétrique réelle. Soit λ une valeur propre de B et x un vecteur n on nul tel que $Bx = \lambda x = {}^tAAx$. On en déduit

$$ {}^txBx = \lambda {}^txx = \lambda\|x\|^2 = {}^tx{}^tAAx = {}^t(Ax)(Ax) = \|Ax\|^2 $$

Puisque A est inversible et $x \neq 0$, on a $Ax \neq 0$ et ainsi $\lambda = \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0$. La matrice B est symétrique définie positive.

b/ Il existe P orthogonale et C diagonale à éléments diagonaux strictement positifs telles que ${}^tAA = P^{-1}CP = {}^tPCP$. Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de C, on peut poser D la matrice diagonale de diagonale $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. On a alors $D^C = C$ et ${}^tAA = {}^tPD^2P$.

c/ On note $S = {}^tPDP$. Cette matrice est semblable à D donc ses valeurs propres sont strictement positives. De plus ${}^tS = {}^tP{}^tDP = S$ puisque ${}^tD = D$. On a donc S symétrique définie positive.

d/ Puisque les valeurs propres de S sont strictement positives, S est inversible. On note $Q = AS^{-1}$. On a ${}^tQQ = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1}$. Or ${}^tSS = {}^tP{}^tDP{}^tPDP = {}^tPD^2P = {}^tAA$. Cela donne ${}^tQQ = {}^tS^{-1}{}^tSSS^{-1} = {}^t(SS^{-1}) = I_3$. La matrice Q est orthogonale et $A = QS$.

e/ Si $\|Ax\| = 1$ alors $\|QSx\| = 1 = \|Sx\|$ donc $\|Sx = 1\|$. Réciproquement si $\|Sx\| = 1$, alors $\|QSx\| = 1$ et $\|Ax\| = 1$. On a donc $\|Ax\| = 1$ si et seulement si $\|Sx\| = 1$ et ainsi $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

3/ *Soient S et S′ deux matrices symétriques définies positives telles que* $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

a/ Soit $u = v/\|S(v)\|$ (possible puisque $Sv \neq 0$). On a $\|u\| = \dfrac{\|S(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$ donc $u \in \mathcal{E}(S)$. On en déduit que $u \in \mathcal{E}(S')$ et $\left\|S'(u)\right\| = \dfrac{\left\|S'(v)\right\|}{\|S(v)\|} = 1$. Ainsi $\|S(v)\| = \left\|S'(v)\right\|$.

b/ Avec les formules de polarisation, pour tout $v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$ \begin{aligned} \langle S(v), S(w)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|S(v+w)\|^2 - \|S(v)\|^2 - \|S(w)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|S'(v+w)\right\|^2 - \left\|S'(v)\right\|^2 - \left\|S'(w)\right\|^2\right) = \left\langle S'(v), S'(w)\right\rangle. \end{aligned} $$

c/ Puisque $\langle S(v), S(w)\rangle = \langle S^*S(v), w\rangle = \left\langle S^2(v), w\right\rangle$, on a pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$, $\left\langle S^2(v), w\right\rangle = \left\langle S'^2(v), w\right\rangle$. On en déduit que $S^2 = S'^2$: si $v \in \mathbb{R}^3$, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, on a $\left\langle (S^2 - S'^2)(v), w\right\rangle$ donc $(S^2 - S'^2)(v) = 0$.

d/ Si α est une valeur propre de S alors $\alpha > 0$ et, par le lemme des noyaux puisque $X - \alpha$ et $X + \alpha$ sont premiers entre eux,

$$ \ker(S^2 - \alpha^2\mathrm{Id}) = \ker(S - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \ker(S + \alpha\mathrm{Id}). $$

Puisque S est symétrique définie positive, $-\alpha$ n'est pas une valeur propre de S donc $\ker(S + \alpha\mathrm{Id}) = \{0\}$ et $\ker(S - \alpha\mathrm{Id}) = \ker(S^2 - \alpha^2\mathrm{Id})$

e/ Si α est une valeurs propre de S, alors $\ker(S - \alpha\mathrm{Id}) = \ker(S^2 - \alpha^2\mathrm{Id}) = \ker(S'^2 - \alpha^2\mathrm{Id})$ et pour les mêmes raisons, avec $\alpha > 0$ quelconque, on a $\ker(S' - \alpha\mathrm{Id}) = \ker(S'^2 - \alpha^2\mathrm{Id})$. Ainsi $\ker(S - \alpha\mathrm{Id}) = \ker(S' - \alpha\mathrm{Id}$. On en déduit que S et S' coïncident sur l'espace propre $E_\alpha(S)$. Puisque les sous-espaces propres de S sont supplémentaires, S et S' coïncident sur tout l'espace donc $S = S'$.

4/ On décompose $A = QS$ et $A' = Q'S'$ avec S, S' symétriques définies positives et Q et Q' orthogonale. On a $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A') = \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$. La question précédente donne $S = S'$. On a donc $S = Q^{-1}A = Q'^{-1}A'$ et $A = QQ'^{-1}A' = VA'$ avec $V = QQ'^{-1} \in I_3(\mathbb{R})$. Réciproquement si $A = VA'$ avec V' orthogonale, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\left\|VA'x\right\| = \left\|A'x\right\| = \|Ax\|$. On a donc $\|Ax\| = 1$ si et seulement si $\left\|A'x\right\| = 1$ et $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$.

1/ La série $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées. On sait donc que R_n est du signe de son premier terme, à savoir $(-1)^n$. On a donc

$$|R_n|+|R_{n+1}|=(-1)^nR_n+(-1)^{n+1}R_{n+1}=(-1)^n(R_n-R_{n+1})=(-1)^n\left((-1)^nu_n\right)=u_n$$

2/ Avec un changement d'indice dans chacune des sommes, on a

$$\begin{aligned}
|R_n|-|R_{n+1}| &= (-1)^n\,(R_n+R_{n+1})=(-1)^n\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^ku_k+(-1)^n\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^ku_k\\
&= (-1)^n\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+n}u_{n+p}+(-1)^n\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+n+1}u_{n+p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^pu_{n+p}+(-1)^n\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}u_{n+p+1}=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(u_{n+p}-u_{n+p+1}\right)
\end{aligned}$$

Si on note $v_p=u_{n+p}-u_{n+p+1}$, on a $v_{p+1}-v_p=-u_{n+p+2}+2u_{n+p+1}-u_{n+p}\leqslant 0$ d'après la propriété de u_n. De plus $\lim\limits_{p\to+\infty}v_p=0$. On est dans le cas du théorème sur les séries alternées, donc la somme obtenue est du signe de son premier terme donc positive. La suite $(|R_n|)$ est donc décroissante.

3/ On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2|R_{n+1}|\leqslant|R_n|+|R_{n+1}|\leqslant 2|R_n|$, d'où $2|R_{n+1}|\leqslant u_n\leqslant 2|R_n|$. Cela donne, pour $n_{g}eqslant1$, $\frac{u_n}{2}\leqslant|R_n|\leqslant\frac{u_{n-1}}{2}$.

4/ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n-1}}{u_n}=1$ et $1\leqslant\frac{2|R_n|}{u_n}\leqslant\frac{u_{n-1}}{u_n}$, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2|R_n|}{u_n}=1$. Puisque $R_n=(-1)^n|R_n|$, cela donne bien $R_n\underset{n\to+\infty}{\sim}(-1)^n\frac{u_n}{2}$

5/ on vérifie les hypothèses, à partir d'un certain rang au moins, avec $u_n=\frac{\ln n}{n}$: si les propriétés sont vraies à partir d'un certain rang, il suffit de considérer la suite translatée et constater que $u_{n_0+k}\underset{k\to+\infty}{\sim}u_k$ (ou alors changer les premiers termes pour que la suite vérifie les propriétés à partir du rang 0) : on note $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ et $u_n=f(n)$.

- pour tout $n\geqslant 2$, $u_n>0$,
- $\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$ et $u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n$,
- $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ et f est décroissante sur $[e,+\infty[$ donc $(u_n)_{n\geqslant3}$ est décroissante - elle tend vers 0 par croissances comparées.
- $f'(x)=_{d}frac1x^2-\frac{\ln x}{x^2}$ et $f''(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$ et $f''(x)\geqslant 0$ si $x\geqslant e^{3/2}$ donc f est décroissante et convexe sur $[5,+\infty[$. Notamment, pour $n\geqslant5$, on a $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(n+2)=n+1$ et $u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}u_{n+2}$ ce qui donne la dernière relation.

On en déduit que $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}(-1)^n\frac{\ln n}{2n}$

1/ a/ les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Par produits et sommes, les fonctions polynomiales en x et y sont également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

b/ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3(1 + y^2) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy$$

c/ On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ ne s'annule pas. Il reste $y = 0$. Dans ce cas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ si et seulement si $x^2 = 1$. On a donc deux points critiques $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

d/ On étudie la matrice hessienne de f en l'un de ces points. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$

Les deux matrices $Hf(1, 0)$ et $Hf(-1, 0)$ sont diagonales avec des valeurs propres non nulles de signe opposé. Elles ne sont donc pas symétrique définie positive ou négative. Les points ne sont donc pas des extrema locaux.

e/ Si on a un extremum local sur $\mathbb{R}^2$, alors, puisque R^2 est ouvert, cet extremum est en un point critique donc l'un des 2 points précédents. Il n'y a pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

2/ D est compact (fermé et borné) puisque c'est la boule unité fermée. L'application continue g admet donc un maximum et un minimum sur D (et ils sont atteints).

3/ si le maximum A était atteint en un point à l'intérieur de D alors ce point serait un point critique. Or g n'a pas de points critiques dans $B(0, 1)$. Les extrema sont donc atteints au bord du dommaine.

4/ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(\cos t, \sin t) = \cos t \left(\cos^2 t - 3 - 3\sin^2 t\right) = \cos t \left(\cos^2 t - 3 - 3 + 3\cos^2 t\right) = 2\cos t \left(2\cos^2 t - 3\right)$$

5/ la fonction g est de période 2π et paire. On peut l'étudier sur $[0, \pi]$ (on peut aussi constater que $g(\pi - x) = -g(x)$ ce qui permet de l'étudier sur $[0, \pi/2]$ seulement). On a $g'(t) = -6\sin t(2\cos^2 t - 1)$. Un tableau de variation nous donne un maximum $5/2$ en $2\pi/3$ et un minimum $-5/2$ en $\pi/3$. Le maximum vaut $5/2$ et il est atteint en deux points : $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

6/ Le minimum vaut $-5/2$ et il est atteint en deux points $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

1/ Si M est solution de l'équation, on pose $N = PMP^{-1}$. On a alors $N^2 = PM^2P^{-1}$ et

$$N^2 + pN + qI_n = P(M^2 + pM + qI_n)P^{-1} = 0$$

donc PMP^{-1} est bien solution.

2/ a/ la matrice M est solution si et seulement si le polynôme $(X-a)(X-b)$ est annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples donc M est diagonalisable, semblable à une matrice diagonale A_k de diagonale $(a,\ldots,a,b,\ldots,b)$ (avec k termes a et $n-k$ termes b). Réciproquement les matrices semblables à A_k sont solutions puisqu'elles sont diagonalisables avec comme seules valeurs propres a et b (éventuellement une seule des deux) donc annulées par $(X-a)(X-b)$.

b/ On a finalement $\mathcal{E}_{-(a+b),ab} = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} E(A_k)$.

3/ a/ On a $f^2 = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ puis $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \ker f$. On a bien $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.

b/ Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On a alors

$$\dim E = \dim\ker f + \operatorname{rg} f.$$

c/ Avec l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \ker f$, on a $\operatorname{rg} f \leqslant \dim\ker f$ et ainsi $\dim E \geqslant 2\operatorname{rg} f$.

d/ On cherche à construire une base $(e_1,\ldots,e_n)$ dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue. On veut donc

$$f(e_1) = e_{n-p+1},\ldots,f(e_p) = e_n, f(e_{p+1}) = 0 = \ldots = f(e_n).$$

- première version : puisque $\operatorname{Im} f \subset \ker f$, il est plus facile de compléter une base de $\operatorname{Im} f$ en une base de $\ker f$ plutôt que de commencer avec une base de $\ker f$ (dans laquelle on pourrait n'avoir aucun vecteur de $\operatorname{Im} f$). Soit p vecteurs $e_{n-p+1},\ldots,e_n$ qui forment une base de $\operatorname{Im} f$ avec des antécédents $e_1,\ldots,e_p$ (on a $p \leqslant n-p$ donc $p < n-p+1$) ; on a $f(e_k) = e_{n-p+k}$ pour $k \in [\![1;p]\!]$. On complète la famille libre $(e_{n-p+1},\ldots,e_n)$ de $\ker f$ en une base $(e_{p+1},\ldots,e_n)$ de $\ker f$. On a alors une famille de n vecteurs qui vérifieront les conditions imposées. Il reste à prouver que c'est une base. Si

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n = 0,$$

on obtient en appliquant f,

$$\lambda_1 e_{n-p+1} + \ldots + \lambda_p e_n + 0 = 0,$$

et ainsi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ puisque la famille de vecteurs $(e_{n-p+1},\ldots,e_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Il reste alors

$$\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n = 0,$$

et tous les scalaires sont nuls (base de $\ker f$). Finalement la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre ; c'est une base de E et la matrice de f dans cette base est la matrice J_p de l'énoncé.

- seconde version : même principe en un peu plus rapide avec l'isomorphisme du rang. Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E et $\tilde{f}$ l'isomorphisme $x \in H \mapsto f(x) \in \operatorname{Im} f$. On construit une base de $\ker f$ obtenue en complétant une base de $\operatorname{Im} f$: $(e_{p+1},\ldots,e_{n-p+1},\ldots,e_n)$ (les p derniers forment une base de $\operatorname{Im} f$. Par isomorphisme, il existe un unique antécédent $e_k \in H$ de e_{n-p+k} pour $k \in [\![1;p]\!]$. La famille $(e_1,\ldots,e_p)$ est une base de H. Puisque H et $\ker f$ sont supplémentaires, on a créé une base de E avec la propriété voulue.

e/ Si M est solution alors il existe $p \leqslant n/2$ telle que $M \in E(J_k)$. Réciproquement les matrices J_k vérifient bien $J_k^2 = 0$ (on a $\operatorname{Im} J_k \subset \ker J_k$ si $k \leqslant n/2$).

4/ a/ M vérifie l'équation si et seulement si $0 = M^2 - 2aM + a^2 I_n = (M - aI_n)^2$ donc si et seulement si $N = M - aI_n$ vérifie $N^2 = 0$.

b/ Les solutions sont toutes les matrices $aI_n + N$ où N est une solution de $\mathcal{E}_{0,0}$.

5/ Si une solution existe alors $M^2 = -I_n$ ce qui donne $\det(M^2) = (\det M)^2 = (-1)^n \geqslant 0$. On a donc n pair. Par contraposée, si n est impair, alors il n'y a pas de solution.

6/ a/ Le polynôme $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de M. Ainsi M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

b/ On propose deux versions :

- On diagonalise sur $\mathbb{C}$. La matrice est semblable à une matrice diagonale avec n_1 termes i et n_2 termes $-i$. La trace de M étant réelle, on obtient que $n_1 = n_2 = p$ (et $\operatorname{tr} M = 0$). Chaque espace propre E_i et E_{-i} est de dimension p). Soit $X_1,\ldots,X_p$ une base de vecteurs propres de M pour la valeur propre i : pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $MX_k = iX_k$. Par conjugaison (M est réelle), on obtient $M\overline{X_k} = -i\overline{X_k}$. La famille $(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_p})$ est une base de $E_{-i}(M)$. On écrit $X_k = Y_k + iZ_k$ (où Y_k et Z_k sont des vecteurs colonnes réels). On a

$$MX_k = MY_k + iMZ_k = iX_k = -Z_k + iY_k$$

ainsi $MY_k = -Z_k$ et $MZ_k = Y_k$. On considère alors la famille $(Z_1,\dots,Z_p,Y_1,\dots,Y_p)$. Si on prouve que cette famille est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors avec P la matrice de ces vecteurs, on a $P^{-1}MP$ qui sera sous la forme voulue. On prouve que la famille est libre (dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$) :

$$\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda p Z_p + \mu_1 Y_1 + \dots + \mu_p Y_p = 0$$

On a $X_k = Y_k + iZ_k$ donc $Y_k = \dfrac{X_k + \overline{X_k}}{2}$ et $Z_k = \dfrac{X_k - \overline{X_k}}{2i}$. Cela donne

$$(\frac{1}{2i}\lambda_1 + \frac{1}{2}\mu_1)X_1 + \dots + (\frac{1}{2i}\lambda_p + \frac{1}{2}\mu_p)X_p + (-\frac{1}{2i}\lambda_1 + \frac{1}{2}\mu_1)\overline{X_1} + \dots + (-\frac{1}{2i}\lambda_p + \frac{1}{2}\mu_p)\overline{X_p} = 0$$

Puisque $(X_1,\dots,X_p)$ est une base de E_i et $(\overline{X_1},\dots,\overline{X_p})$ une base de E_{-i}, les deux bases concaténées forment une base de l'espace complet et chque scalaire est nul. Cela donne des relations $\frac{1}{2i}\lambda_k + \frac{1}{2}\mu_k = 0$ et $-\frac{1}{2i}\lambda_k + \frac{1}{2}\mu_k = 0$ qui entrainent $\lambda_k = \mu = 0$ pour tout $k \in [\![1;p]\!]$. La famille est libre et cela termine la démonstration.

- On construit une base avec les contraintes souhaitées (et avec pas mal de marge) : soit g canoniquement associé à M. On considère une famille de $\mathbb{R}^n$ de p vecteurs linéairement indépendants $(e_1,\dots,e_p)$. On pose $e_{k+p} = f(e_k)$ pour $k \in [\![1;p]\!]$. On aura $f(e_{k+p}) = f^2(e_k) = -e_k$. Il suffit de vérifier qu'on a une base :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_1 e_{p+1} + \dots + \mu_p e_{2p} = 0,$$

on applique f et cela ne donne rien... en effet si on choisit mal, rien n'oblige a ce qu'on ait une base (par exemple si on a pris $e_2 = f(e_1)$ au début, on se retrouve avec $e_{p+1} = e_2$ et $e_{p+2} = -e_1$). Il faut donc mieux construire la famille de vecteurs. On les construit de proche en proche.

— Soit $e_1 \neq 0$. On pose $e_{p+1} = f(e_1)$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à e_1 (pas de valeurs propres réelles) donc $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, f(e_1))$ est une plan stable par f (car $f(e_{p+1}) = -e_1$).

— Si $p = 1$, c'est fini. Sinon $F_1 \neq E$ donc il existe $e_2 \notin F_1$. On vérifie que $F_2 = \mathrm{Vect}(e_2, f(e_2))$ est un plan stable par f et que F_1 et F_2 sont en somme directe : si

$$\lambda e_1 + \mu_1 e_{p+1} + \lambda_2 e_2 + \mu_2 e_{p+2} = 0,$$

alors, en appliquant f :

$$\lambda e_{p+1} - \mu_1 e_1 + \lambda_2 e_{p+2} - \mu_2 e_2 = 0,$$

en effectuant $\lambda_2 L_1 - \mu_2 L_2$, on obtient $(\lambda_2^2 + \mu_2^2)e_2$ combinaison de e_1 et e_{p+1} donc dans F_1. Cela n'est possible que si $\lambda_2 = \mu_2 = 0$. Cela donne alors $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

— On continue : on a construit $e_1,\dots,e_k$ tels que $F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_k$ sous le principe précédent. Si $k < p$, alors il existe $e_{k+1} \notin F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_k$. On vérifie de même que F_{k+1} est en somme directe avec $F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_k$.

— On s'arrête lorsque $k = p$. Cela donne $E = F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_p$ avec $F_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{p+k})$ avec $e_{p+k} = f(e_k)$. La famille $(e_1,\dots,e_{2p})$ est une base de E dans laquelle la matrice est sous la forme voulue.

c/ On a montré que si M est solution alors elle est semblable à la matrice donnée en 6/b. Réciproquement cette matrice convient et toutes les matrices semblables également.

7/ On a $M^2 + pM + qI_n = \left(M + \frac{p}{2}I_n\right)^2 + (q - \dfrac{p^2}{4})I_n$. On pose $\Delta = p^2 - 4q < 0$ et δ tel que $\delta^2 = -\Delta$, ce qui donne $\left(M + \frac{p}{2}I_n\right)^2 + \dfrac{\delta^2}{4}I_n = 0$ où encore $\left(\frac{2}{\delta}(M - \frac{p}{2}I_n)\right)^2 + I_n = 0$. La matrice M est solution si et seulement si $\frac{2}{\delta}(M - \frac{p}{2}I_n)$ est solution de $X^2 + I_n = 0$. Cela donne toutes les matrices M possibles.

1/ Pour $x>0$, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4x^2}\dfrac{1}{t^2}$. On en déduit que h est intégrable sur $[0,+\infty[$. On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2x}\arctan(2tx)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4x}$$

puisque $x>0$ et ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} 2tx = +\infty$.

2/ La fonction F n'est pas définie en 0 (la série de terme général 1 diverge). Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4x^2}\dfrac{1}{n^2}$ et la série converge (comparaison des termes généraux de séries à termes positifs). On a immédiatement, pour tout $x\neq 0$, $F(-x)=F(x)$.

3/ Soit $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$ si $n\in\mathbb{N}^*$. Chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x>0$,

$$u_n'(x) = \frac{-8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}.$$

Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$\left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2} = v_n$$

et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8bn^2}{16n^4a^4} = \dfrac{b}{2a^4n^2}$. La série $\sum v_n$ converge et ainsi la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et uniformément sur $[a,b]$. On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur leur réunion, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^*$.

4/ La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a donc

$$\frac{1}{1+4(n+1)^2x^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

En sommant ces inégalités pour n allant de 0 à $+\infty$ (les séries converge, l'intégrale également), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+infty} \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

ce qui donne

$$F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant F(x)+1$$

Cela donne finalement l'encadrement, pour $x>0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t - 1 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$$

5/ On utilise l'encadrement avec la valeurs de l'intégrale calculée précédemment :

$$\forall x>0,\ \frac{1}{4x} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{4x}.$$

Ainsi $1-4x \leqslant 4xF(x) \leqslant 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 4xF(x) = 1$. Cela donne $F(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{4x}$.

On a alors, pour tout $x>0$, $0\leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{4x}$ et par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

6/ On a déterminé F' sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x>0$, $F'(x)\leqslant 0$. La fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

7/ Soit $x>0$ et $g(t) = \dfrac{\sin t}{e^{2xt}-1}$. On a

- g continue sur $]0,+\infty[$,
- $g(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t}{2xt} = \dfrac{1}{2x}$ donc g admet une limite finie en $+\infty$,
- $|g(t)| \leqslant \dfrac{1}{e^{2xt}-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

8/ Soit $h(x,t) = \dfrac{\sin t}{e^{2xt}-1}$.

- pour tout $x>0$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
- pour tout $t>0$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $a>0$. Si $t>0$ et $x\geqslant a$, on a $e^{2xt}-1\geqslant e^{2at}-1>0$ donc $|h(x,t)|\leqslant \dfrac{|\sin t|}{e^{2at}-1}=|h(a,t)|$. La fonction $t\mapsto h(a,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (question précédente) donc le théorème de continuité s'applique et G est continue sur tout $[a,+\infty[$ avec $a>0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

9/ Pour $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\sin(t)e^{-\alpha t}\right|\leqslant e^{-\alpha t}$ et cette dernière expression est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit l'existence de I_α. En intégrant par parties de fois de suite (toutes les intégrales existent), on trouve

$$I_\alpha=\left[-\cos t e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty}-\alpha\int_0^{+\infty}\cos t e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=1-\alpha\left(\left[\sin t e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty}+\alpha I_\alpha\right)$$

Finalement $(1+\alpha^2)I_\alpha=1$ et $I_\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha^2}$.

10/ On décompose $t\mapsto\dfrac{\sin t}{e^{2xt}-1}$ en somme de série de fonctions. Pour $x>0$ et $t>0$,

$$\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}=\frac{\sin(t)e^{-2xt}}{1-e^{-2xt}}=(\sin t)e^{-2xt}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-2xt}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sin t)e^{-2nxt}$$

puisque $0<e^{-2xt}<1$ (série géométrique). On note $f_n(t)=\sin t e^{-2nxt}$. Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)=\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}=g(t)$. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On essaie alors d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme puisqu'il donnerait

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(t)e^{-2nxt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-2nxt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+(2nx)^2},$$

sauf que l'hypothèse manquante ne vient pas facilement :

$$\int_0^{+\infty}\left|\sin t e^{-2nxt}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-2nxt}\mathrm{d}t=\frac{1}{2nx}$$

ce qui n'est pas le terme général d'une série convergente. On utilise les sommes partielles :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sin t e^{-2nxt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{N}\int_0^{+\infty}\sin t e^{-2nxt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+(2nx)^2},$$

or

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N}(\sin t)e^{-2nxt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}(\sin t)e^{-2xt}\frac{1-e^{-2Nxt}}{1-e^{-2xt}}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}(1-e^{-2Nxt})\mathrm{d}t=G(x)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}e^{-2Nxt}\mathrm{d}t$$

Il reste à étudier la limite de la dernière intégrale, par exemple avec un théorème de convergence dominée (ou avec une simple majoration si on la voit). On note $b_N(t)=\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}e^{-2Nxt}$ pour $t>0$. La suite converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ (et cette fonction est continue). Pour tout $N\geqslant1$ et $t>0$, $|b_N(t)|\leqslant\left|\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\right|=\varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée, obtenir $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}b_N(t)\mathrm{d}t=0$ et enfin $F(x)=G(x)$.

1/ Soit $X \in \mathbb{C}^n$ non nul. Le vecteur $\dfrac{X}{\|X\|}$ est unitaire donc

$$\left\| A\frac{X}{\|X\|} \right\| = \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant \mathcal{N}(A).$$

Cela donne $\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\,\|X\|$. L'inégalité est évidemment vraie si $X = 0$.

2/ La boule unité fermée est un fermé borné donc compact. Prouver qu'il existe $X_0 \in \mathbb{C}^n$, $X_0 \neq 0$, tel que l'on a $\mathcal{N}(A) = \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

3/ Pour tout $X1_n\mathbb{C}^n$, $I_n X = X$. Ainsi $\mathcal{N}(I_n) = \sup\limits_{\|X\|\leqslant 1} \|X\| = 1$.

4/ Les deux normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont équivalentes puisque l'espace vectoriel est de dimension finie. Il existe donc deux réels **strictement** positifs α et β tels que l'on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \alpha\mathcal{N}_\infty(A) \leqslant \mathcal{N}(A) \leqslant \beta\mathcal{N}_\infty(A)$$

5/ Si $A \in \mathcal{G}$, alors $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A - I_n + I_n) \leqslant \mathcal{N}(A - I_n) + \mathcal{N}(I_n) \leqslant 2$. La partie A est bornée pour $\mathcal{N}$.

6/ Soient $A \in \mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

a/ Par récurrence, on prouve que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{G}$: c'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $A^k \in \mathcal{G}$, alors $A^{k+1} = A^k.A \in \mathcal{G}$ puisque $\mathcal{G}, \times)$ est un groupe. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le symétrique de A^k est encore dans $\mathcal{G}$. Ainsi, $A^{-k} \in \mathcal{G}$ si $k \in \mathbb{N}$. Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{G}$.

b/ Si λ est nul alors A n'est pas inversible donc n'est pas dans $GL_(\mathbb{C})$. On a $AX = \lambda X$. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p X = \lambda^k X$. On également $X = \lambda A^{-1} X$ ou encore $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$. De nouveau, par récurrence, $A^{-p}X = \lambda^{-p}X$ si $p \in \mathbb{N}$. Finalement, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $A^p X = \lambda^p X$.

c/ Puisque $A^k \in \mathcal{G}$, on a $\mathcal{N}(A^k - I_n) \leqslant 1$. Ainsi $\left\|(A^k - I_n)X\right\| \leqslant \mathcal{N}(A^k - I_n)\,\|X\|$ ce qui donne bien $\|(A^k - I_n)X\| \leqslant \|X\|$.

Puisque $(A^k - I_n)X = A^k X - X = \lambda^k X - X = (\lambda^k - 1)X$, on a $\left\|(A^k - I_n)X\right\| = |\lambda^k - 1|\,\|X\| \leqslant \|X\|$. Puisque $\|X\| > 0$, on obtient $|\lambda^k - 1| \leqslant 1$. Par inégalité triangulaire,$||\lambda^k| - 1| \leqslant |\lambda^k - 1| \leqslant 1$.

d/ Si $|\lambda| > 1$ alors la suite $(|\lambda|^p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ce qui contredit $||\lambda^p| - 1| \leqslant 1$. De même si $|\lambda| < 1$, la suite $(|\lambda|^{-p})_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On a donc $|\lambda| = 1$.

e/ On doit avoir $\left|e^{ik\theta} - 1\right| \leqslant 1$. Notamment, $\left|\mathrm{Re}(e^{ik\theta} - 1)\right| \leqslant 1$, ce qui donne $|\cos(k\theta) - 1| \leqslant 1$. Ainsi $\cos(k\theta) \in [0,2]$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\theta) \geqslant 0$.

f/ Puisqu'on a choisi $\theta \in [-\pi,\pi]$ et que $\cos(\theta) \geqslant 0$, on a $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$. On a alors $2\theta \in [-\pi,\pi]$ et $\cos(2\theta) \geqslant 0$ donc $2\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$, c'est-à-dire $\theta \in [-\pi/4,\pi/4]$. Par récurrence, on montre que $\forall q \in \mathbb{N}$, $\theta \in [-\pi/2^q,\pi/2^q]$. En effet la propriété est vraie pour $q = 0,1$ ou 2. Si elle est vraie pour un certain entier q, alors on a $2^q\theta \in [-pi,\pi]$ et $\cos(2^q\theta) \geqslant 0$, donc $2^q\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$ et ainsi $\theta \in [-\pi/2^{q+1},\pi/2^{q+1}]$.

g/ Par encadrement et passage à la limite, on a donc $\theta = 0$ et $\lambda = 1$. La seule valeur propre possible est donc 1. Puisque ch_A^i admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$, on a bien $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

7/ a/ La matrice est trigonalisable avec 1 comme seule valeur propre. Elle est donc semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ sinon elle serait diagonalisable (et même égale à I_2).

b/ On a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + aJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice J vérifie $J^2 = 0$ et commute avec A. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, avec la formule du binôme de Newton, on a $T^m = I_2 + maJ = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on peut évidemment le montrer par récurrence en conjecturant l'expression avec les premières puissances). Puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} |ma| = +\infty$, il existe un rang m_0 à partir duquel $\mathcal{N}_\infty(T^m) = m|a|$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{N}_\in^f ty(T^m) = +\infty$.

c/ Par équivalence des normes, $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$. Pour $X \neq 0$ dans C^n, et A et B deux matrices de taille n, on a $\|ABX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\,\|BX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)\,\|X\|$. Ainsi $\mathcal{N}(AB) \leqslant \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$. Enfin il existe $T \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$. On a $T^m = PA^mP^{-1}$ puis $\mathcal{N}(T^m) \leqslant \mathcal{N}(P)\mathcal{N}(A^m)\mathcal{N}(P^{-1})$. Cela minore $\mathcal{N}(A^m)$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$.

d/ Puisque $\mathcal{G}$ est borné, on obtient une contradiction. Toutes la matrices de $\mathcal{G}$ sont donc diagonalisables.

e/ Les matrices de $\mathcal{G}$ sont diagonalisables et la seule valeur propre possible est 1... donc $\mathcal{G} = \{1\}$.

1/ a/ Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et

$$\forall x \in]-1,1[, -\frac{1}{e}\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e} x^n.$$

b/ On a, pour tout $x \in]-1,1[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ et

$$S'(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_n)x^n$$

Par unicité du DSE sur $]-1,1[$, S est solution sur $]-1,1[$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{e}$$

c/ On a $a_1 - a_0 = -\frac{1}{e}$ ce qui correspond à la formule au rang $n = 1$. Si la relation est vérifiée jusqu'au rang n, alors

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{e(n+1)} = \left(\frac{a_0}{(n+1)!} - \frac{1}{e(n+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{e(n+1)}$$

et le dernier terme s'écrit également $-\frac{1}{e(n+1)!}(-1)^n n!$, soit le terme d'indice n dans la somme. Par récurrence, le résultat est prouvé.

d/ On majore brutalement en espérant que cela soit suffisant :

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_0|}{n!} + \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant |a_0| + \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)! = |a_0| + \frac{1}{en!}n(n-1)! \leqslant |a_0| + \frac{1}{e}.$$

La suite (a_n) est bornée. Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M$ et $|a_n x^n| \leqslant M|x|^n$. La série $\sum a_n x^n$ converge absolument lorsque $|x| < 1$ donc son rayon de convergence est au moins 1.

2/ F est continue sur $[1,+\infty[$ (car $x > -1$ et $x + t > -1 + 1 > 0$). On a $F(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-t}\right)$ et par comparaison F est intégrable sur $[1,+\infty[$.

3/ Pour tout $t \geqslant 1$, $F(t) = \frac{e^{-t}}{t}\frac{1}{1+\frac{x}{t}}$. Si $|x| < 1$ alors $\left|\frac{x}{t}\right| < 1$ (car $t \geqslant 1$) et ainsi,

$$\forall t \geqslant 1, F(t) = \frac{e^{-t}}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{t^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}x^n.$$

Il ne rete plus qu'à permuter somme et intégrale. On note, pour x fixé dans $]-1,1[$, $f_n(t) = (-1)^n\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}x^n$. La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ et sa somme est S (c'est le début de la question) avec S continue sur $[1,+\infty[$. Chacune des fonctions f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ (se fait facilement) et

$$\int_1^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}|x|^n\,dt \leqslant \left(\int_1^{+\infty}e^{-t}\,dt\right)|x|^n$$

La série $\sum\int_1^{+\infty}|f_n(t)|\,dt$ et on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Cela donne,

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt\right)x^n$$

On a bien obtenu un développement en série entière sur $]-1,1[$ avec $b_n = (-1)^n\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt\right)$.

4/ On a deux possibilités pour vérifier que f est solution de l'équation différentielle de départ :

- avec le DSE mais cela ne répond pas à la question car il n'est valable que sur $]-1,1[$: on calcule $(n+1)b_{n+1} - b_n$:

$$\begin{aligned}
(n+1)b_{n+1} &= (-1)^{n+1}\left(\int_1^{+\infty}e^{-t}\frac{n+1}{t^{n+2}}\,dt\right)\\
&= (-1)^{n+1}\left(\left[-e^{-t}\frac{1}{t^{n+1}}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}e^{-t}\frac{1}{t^{n+1}}\,dt\right)\\
&= (-1)^{n+1}e^{-1} + (-1)^n\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt\\
&= b_n + \frac{(-1)^{n+1}}{e}.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)b_{n+1} - b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{e}$, ce qui caractérise les solutions de (E) qu sont somme d'une série entière de rayon de convergence 1.

- avec le théorème de dérivation sous le signe somme : soit $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{t+x}$ pour $x > -1$ et $t \geqslant 1$. La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\times[1,+\infty[$ (on récupère ainsi toutes les hypothèses de régularité par rapport à chaque variable), pour tout $x > -1$, $h(x,\dot)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, on a
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$$
et si $a > -1$, pour $x \geqslant a$ et $t \geqslant 1$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{(t+a)^2} = \varphi(t)$. La fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (même chose que F). On a donc f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ avec
$$\forall x > -1, f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t+x)^2}\,dt.$$
On a alors, pour $x > -1$, par intégration par parties,
$$f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t+x)^2}\,dt = \left[e^{-t}\frac{1}{t+x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\,dt = f(x) - \frac{e^{-1}}{x+1}.$$
On a donc pout tout $x > -1$, $f'(x) - f(x) = -\dfrac{1}{e(x+1)}$.

- On a ainsi, $b_{n+1} = \dfrac{b_0}{(n+1)!} - \dfrac{1}{e(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!$ avec $b_p = (-1)^p\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{p+1}}\,dt\right)$. On obtient
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! = eb_0 - e(n+1)!b_{n+1} = eI_1 + (-1)^n e(n+1)! I_{p+2}$$
si on note $I_p = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^p}\,dt$.

1/ a/ Le terme a_{ij} est la composante du vecteur $u(e_j)$ sur le vecteur e_i : on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. Puisque la base est orthonormée, on a $\langle u(e_j), e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle ek, e_i \rangle = a_{ij}$.

b/ En utilisant (1), on a $\langle u(e_j), e_j \rangle = -\langle e_j, u(e_i) \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$, c'est-à-dire $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$. On a donc $A^T = -A$.

2/ De la relation $A^T = -A$, on obtient $\det(A^T) = \det(-A)$. Puisque $\det(A^T) = \det(A)$ et $\det(-A) = (-1)^n \det A$, il vient $\det(A) = (-1)^n \det A$. La matrice A est inversible car u est un automorphisme et ainsi $(-1)^n = 1$. On a donc n pair.

3/ On peut le faire matriciellement ou à partir des produits scalaires :

- On note B la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$. On a $B = A^2$ et ainsi $B^T = (A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2 = B$. La matrice B est symétrique, l'endomorphisme v est symétrique donc il est diagonalisable dans une base orthonormée
- pour tout $x, y \in E$, $\langle v(x), y \rangle = \langle u(u(x)), y \rangle = -\langle u(x), u(y) \rangle = (-1)^2 \langle x, u^2(y) \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. L'endomorphisme v est autoadjoint donc diagonalisable dans une base orthonormée.

4/ Soit λ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé (donc $x \neq 0$). On a alors

$$v(x) = \lambda x \text{ et } `scal v(x) x = \lambda \langle x, x \rangle = \langle u^2(x), x \rangle = -\langle u(x), u(x) \rangle$$

ce qui donne $\lambda \|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$. Puisque u est inversible, $u(x)$ est non nul donc $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} < 0$.

5/ a/ On a $F = \text{Vect}(x, u(x))$ de dimension 1 ou 2. Si $(x, u(x))$ est liée,alors, puisque $x \neq 0$, on aurait un réel α tel que $u(x) = \alpha x$ puis $u^2(x) = \alpha^2 x$ donc α^2 serait une valeur propre positive ou nulle de v ce qui est impossible. L'espace F est donc un plan vectoriel et $\dim F = 2$.

b/ L'image de x et $u(x) \in F$ et celle de $u(x)$ est $u^2(x) = v(x) = \lambda x \in F$. Par combinaison linéaire, l'image de tout vecteur de F est dans F. L'espace F est stable par u donc $F^\perp$ est stable par $u^* = -u$ donc par u.

c/
- Les vecteurs e'_1 et e'_2 sont dans F.
- Le vecteur e'_1 est unitaire et on a $u(e'_1) = \frac{1}{\|x\|} u(x) = a e'_2$.
- Le vecteur e'_2 est également unitaire :

$$\|e'_2\|^2 = \langle e'_2, e'_2 \rangle = \frac{1}{a^2 \|x\|^2} \langle u(x), u(x) \rangle = -\frac{1}{a^2 \|x\|^2} \langle u^2(x), x \rangle = \frac{1}{\lambda \|x\|^2} \langle \lambda x, x \rangle = 1$$

De plus $u(e'_2) = \frac{1}{a\|x\|} u^2(x) = \frac{\lambda}{a\|x\|} x = -\frac{a^2}{a\|x\|} x = -a e'_1$.

- les vecteurs sont orthogonaux :

$$\langle e'_1, e'_2 \rangle = \frac{1}{a\|x\|^2} \langle x, u(x) \rangle$$

Or $\langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle$ donc $\langle u(x), x \rangle = 0$

On a donc une base orthonormée de F, $u(e'_1) = a e'_2$, $u(e'_2) = -a e'_1$ donc la matrice de u_F dans cette base orthonormée est $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

d/ pour tout $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ donc la relation est vraie pour $x, y \in F^\perp$ et alors $u(x) = u_{F^\perp}(x)$ et de même pour y. Enfin si $x \in \ker u_{F^\perp}$ alors $u_{F^\perp}(x) = u(x) = 0$ donc $x \in \ker u$ et $x = 0$. On peut en conclure que $u_{F^\perp}$ est un automorphisme de $F^\perp$ qui vérifie la relation (1).

6/ On se donne u vérifiant 1. On considère v^2 qui admet une valeur propre strictement négative et on fait la construction de la question précédente. On a un plan F et une base orthonormée (e'_1, e'_2) de F dans laquelle l'endomorphisme induit a une matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ pour un certain réel α. On note $G = F^\perp$. L'espace vectoriel G est de dimension 2, stable par u et l'endomorphisme w induit par u sur G vérifie 1. On refait de même avec w. On a une base orthonormée (e'_3, e'_4) de G dans laquelle ma matrice de w est $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$. Puisque F et G sont des supplémentaires orthogonaux, la base $\mathcal{B}'' = (e'_1, \dots, e'_4)$ est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est celle proposée.