

- On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.
- Une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite définie positive.
- Pour  $A \in M_3(\mathbb{R})$ , on note  $\mathcal{E}(A)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3, \|Ax\| = 1\}.$$

1/ Soit  $P$  dans  $M_3(\mathbb{R})$ . On suppose que  $P$  est orthogonale. Déterminer  $\mathcal{E}(P)$ .

2/ Soit  $A$  dans  $M_3(\mathbb{R})$  inversible.

a/ Justifier que  ${}^tAA$  est symétrique définie positive.

b/ En déduire qu'il existe une matrice diagonale  $D$ , avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale  $P$  telles que

$${}^tAA = {}^tPD^2P.$$

c/ On pose  $S = {}^tPDP$ . Montrer que  $S$  est symétrique définie positive.

d/ Montrer alors qu'il existe une matrice orthogonale  $Q$  telle que  $A = QS$ .

e/ Démontrer que  $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$ .

3/ Soient  $S$  et  $S'$  deux matrices symétriques définies positives telles que  $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$ .

a/ Soit  $v$  un vecteur non nul. En considérant  $v / \|S(v)\|$  démontrer que  $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$ .

b/ En déduire que, pour tout  $v, w \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle S(v), S(w) \rangle = \langle S'(v), S'(w) \rangle.$$

c/ En déduire que  $S^2 = S'^2$ .

d/ Soit  $\alpha$  une valeur propre de  $S$ . Montrer que  $\ker(S - \alpha \text{Id}) = \ker(S^2 - \alpha^2 \text{Id})$ .

e/ Démontrer que  $S = S'$ .

4/ Soient  $A$  et  $A'$  dans  $GL_3(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$  si et seulement si il existe une matrice orthogonale  $V$  telle que  $A = VA'$ .

Soit  $\sum (-1)^n u_n$  une série alternée avec

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ,
- la suite  $(u_n)$  converge en décroissant vers 0,
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$ .

Soit  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$ .

1/ Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|R_n| + |R_{n+1}| = u_n$ .

2/ Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+1+p})$ . En déduire la monotonie de  $(|R_n|)$ .

3/ Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$ .

4/ En déduire que  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}$ .

5/ Application : déterminer un équivalent de  $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité  $D$  et le cercle unité  $C$  :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}.$$

1/ On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de  $f$ .

- a/ Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b/ Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$ .
- c/ Démontrer que les points où les deux dérivées s'annulent sont exactement  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .
- d/ Le point de coordonnées  $(1, 0)$  est-il un extremum local de  $f$ ? idem pour  $(-1, 0)$ ?
- e/ Quels sont les extrema locaux de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ ?

2/ Désormais  $g$  est la restriction de  $f$  au disque  $D$ .

- a/ Justifier que  $g$  admet un maximum  $A$  et un minimum  $a$  sur  $D$ .
- b/ Démontrer que  $A$  ne peut être atteint que sur le cercle  $C$ .
- c/ Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g(\cos t \sin t) = 2 \cos t(2 \cos^2 t - 3)$ . En déduire la valeur de  $A$  et les points sur lesquels ce maximum est atteint.
- d/ Déterminer  $a$  et les points sur lesquels ce minimum est atteint.

On étudie dans cet exercice des équations de la forme

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : M^2 + pM + qI_n = 0$$

où l'inconnue  $M$  est une matrice carrée de taille  $n$  à coefficients réels,  $p$  et  $q$  sont deux paramètres réels et  $I_n$  désigne la matrice identité de taille  $n$ .

1/ Pour une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on note

$$E(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

Démontrer que si  $M$  est solution de  $(\mathcal{E}_{p,q})$  alors toute matrice  $M' \in E(M)$  est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions des équations  $(\mathcal{E}_{p,q})$  pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles  $E(A)$

2/ On considère dans cette question l'équation  $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$  :

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$$

avec  $a$  et  $b$  deux réels distincts.

a/ Démontrer que toute solution  $M$  de l'équation est diagonalisable.

b/ Déterminer les solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$ .

3/ On considère dans cette question l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  (c'est-à-dire  $M^2 = 0$ ).

a/ On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $M$ . Démontrer que  $\text{Im } f \subset \ker f$ .

b/ Énoncer précisément le théorème du rang.

c/ Démontrer que  $\text{rg } f \leq \frac{n}{2}$ .

d/ On pose  $p = \text{rg } f$ . Démontrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  soit de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

e/ En déduire les solutions de  $(\mathcal{E}_{0,0})$ .

4/ On considère dans cette question l'équation  $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$  :

$$M^2 - 2aM + a^2I_n = 0$$

avec  $a$  réel.

a/ Démontrer que toute solution peut s'écrire  $M = N + aI_n$  avec  $N^2 = 0$ .

b/ En déduire les solutions de  $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$ .

5/ Démontrer que si  $n$  est impair, l'équation  $M^2 + I_n$  n'a pas de solution dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

6/ On considère l'équation  $(\mathcal{E}_{0,1})$ , c'est-à-dire  $M^2 + I_n = 0$ . On suppose que  $n$  est pair et on note  $n = 2p$ .

a/ Démontrer que la matrice  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

b/ Démontrer qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}MP = \left( \begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

c/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,1})$ .

7/ Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_{p,q})$  lorsque  $p^2 - 4q < 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ Soit  $J$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1.

- a/ Exprimer  $J^2$  en fonction de  $J$ .
- b/ En déduire un polynôme annulateur du second degré pour  $A$ .
- c/ Montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

2/ a/ Montrer qu'il existe  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice  $D$  diagonale telles que

$$A = QDQ^{-1}.$$

b/ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ . En déduire la matrice  $D$ .

3/ Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices  $U \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  ${}^tUA = AU$ .

- a/ Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ .
- b/ Pour toute matrice  $U \in \mathcal{E}$ , on pose  $V = {}^tQUQ$ . Montrer que

$${}^tVD = DV.$$

c/ Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^tVD = DV$ . On admet que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F}$ .

d/ En déduire la dimension de l'espace  $\mathcal{E}$ .

4/ On appelle  $\varphi$  l'application de  $(\mathbb{R}^n)^2$  définie par  $\varphi(x, y) = {}^tXAY$  où  $X$  et  $Y$  désignent les matrices colonnes formées par les coordonnées de  $x$  et  $y$ .

- a/ Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .
- b/ À chaque matrice  $U$  de  $\mathcal{E}$ , on associe l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  soit  $U$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire  $\varphi$ .
- c/ En déduire que pour toute matrice  $U \in \mathcal{E}$ , il existe une matrice  $B \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $\Delta$  diagonale telles que

$$U = B\Delta B^{-1} \text{ et } {}^tBAB = I_n.$$

On considère les fonctions définies par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} dt.$$

1/ Pour  $x > 0$ , justifier la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$  puis calculer la valeur de cette intégrale.

2/ Démontrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et étudier sa parité.

3/ Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

4/ Déterminer un encadrement de  $F(x)$  utilisant  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$ .

5/ En déduire un équivalent simple de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0, ainsi que la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

6/ Étudier les variations de  $F$  puis représenter graphiquement  $F$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

7/ Démontrer que  $G$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

8/ Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , établir la convergence de  $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin t e^{-\alpha t} dt$  et calculer sa valeur

9/ Démontrer que, pour tout  $t > 0$  et  $x > 0$  :

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin t) e^{-2nxt}.$$

10/ En déduire une relation entre  $F$  et  $G$ .

Dans tout l'exercice  $\alpha$  désigne un réel strictement supérieur à 1.

1/ Soit un entier  $n$  strictement positif.

a/ Justifier l'existence de l'intégrale notée  $I_n$  égale à  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$ .

b/ En effectuant le changement de variable  $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$  dans l'intégrale  $I_n$ , montrer que l'application  $u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et exprimer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} du$  en fonction de l'intégrale  $I_n$ .

c/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geq 0, \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u.$$

2/ Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$  pour  $u \geq 0$ .

3/ Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la suite  $(v_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} du.$$

a/ Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini est égale à  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  où  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$ .

b/ En déduire un équivalent de l'intégrale  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini.

4/ a/ Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$  où  $I_n$  est la suite définie à la question 1).

b/ Pour  $x \in \mathbb{R}$  tel que :  $|x| < R$ , on note  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$ . Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha-x} dt \quad \text{pour } |x| < R.$$

Pour tout  $x$  réel dans l'intervalle ouvert  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on pose :  $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ . La dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  en  $x$  est ici notée  $f^{(n)}(x)$ , avec la convention  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

1/ a/ Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme  $P_n$  tel que :  $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$ .

b/ Donner une relation entre  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  et  $P'_n$ .

c/ Préciser  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

d/ Déterminer le monôme de plus haut degré de  $P_n$ .

e/ Examiner la parité du polynôme  $P_n$ .

2/ a/ Montrer que les coefficients du polynôme  $P_n$  sont des entiers positifs ou nuls.

b/ Que vaut  $P_n(1)$ ?

3/ On pose  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ ,  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ . Pour tout  $x \in I$ , justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du.$$

4/ Prouver que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{\pi}{2}$

5/ a/ Pour tous  $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$ , prouver que :  $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$ .

b/ Prouver également que :  $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$ .

6/ En déduire que, pour tout  $x \in I$ , on a :  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$ .

7/ a/ Démontrer que la suite  $(a_{2k})$  tend vers 0.

b/ Pour tout  $\varepsilon \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , montrer l'existence d'une constante  $M_\varepsilon > 0$  telle que :

$$0 \leq a_{2k} \leq M_\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{-2k}.$$

c/ Montrer que la suite  $(a_{2k} 2^k)$  est bornée.

d/ On donne la formule suivante :  $a_{2k} = \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$ . Démontrer les relations  $\frac{1}{3^k} \leq a_{2k} \leq \frac{1}{2^k}$  [on pourra éventuellement s'aider d'une calculatrice].

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ , l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $2n$ ; il est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).

- Soit  $\Delta : E \longrightarrow E$  défini par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

- 1/ a/ Soit  $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$  et  $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  supplémentaires et orthogonaux. Préciser la dimension de  $F$  et de  $G$ .
- b/ Vérifier que  $\Delta$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel  $E$ .
- c/ En considérant la matrice de  $\Delta$  relativement à la base canonique  $(1, X, \dots, X^{2n})$ , déterminer les valeurs propres de  $\Delta$ . Préciser si  $\Delta$  est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.
- d/ Soit  $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ . On pose  $\lambda_k = k(k+1)$ . Justifier l'existence d'un unique vecteur propre  $P_k$  de  $\Delta$  associé à  $\lambda_k$ , tel que  $P_k$  soit de degré  $k$  et admette 1 comme coefficient de  $X^k$ .
- e/ Montrer que pour tout  $P, Q$  dans  $E$ , on a :  $\langle \Delta(P), Q \rangle = \langle P, \Delta(Q) \rangle$ . En déduire que pour tout  $(k, h) \in \llbracket 0; 2n \rrbracket^2$  tel que  $k \neq h$ , on a :  $\langle P_k, P_h \rangle = 0$ . Que peut-on en déduire pour  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_{2n})$  ?
- f/ Montrer que  $(P_0, P_2, \dots, P_{2n})$  est une base de  $F$  et  $(P_1, P_3, \dots, P_{2n-1})$  est une base de  $G$ .
- 2/ On prend ici  $n = 1$  et l'espace euclidien  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , toujours muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

- a/ Expliciter  $P_0, P_1, P_2$  définis en 1. , et en déduire une base orthonormale de  $E$  formée de vecteurs propres pour  $\Delta$ .
- b/ Soit  $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$ . Calculer la distance euclidienne de  $A = X + 1$  au sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$ .
- c/ Montrer que  $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$  est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de  $\Delta$  et de  $h \in C$  dans la base  $(P_0, P_1, P_2)$ .
- d/ Déterminer tous les endomorphismes  $g$  de  $E$  tels que  $g \circ g = \Delta$ . On les donnera par leur matrice dans la base  $(P_0, P_1, P_2)$ .

- Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.
- $\mathbb{R}$  est le corps des nombres réels,  $\mathbb{C}$  celui des nombres complexes et  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- On note  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .  $0$  est la matrice nulle de  $E$ ,  $I$  est la matrice identité de  $E$ . Pour  $M$  élément de  $E$ ,  ${}^tM$  et  $\text{tr}(M)$  désignent respectivement la matrice transposée de  $M$  et la trace de  $M$ .
- On note  $F$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et une colonne et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Pour  $Y$  élément de  $F$ ,  ${}^tY$  désigne la matrice transposée de  $Y$ .
- Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $E$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\forall M \in E, f(M) = AM - MB.$$

## Première partie

Dans cette partie,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

1/ On suppose que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune notée  $\lambda$ .

a/ Justifier l'existence de  $Y$  et  $Z$  éléments non nuls de  $F$  vérifiant :

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

b/ Prouver que  $Y {}^tZ$  est un élément non nul de  $E$ . Calculer  $f(Y {}^tZ)$ .

2/ On suppose qu'il existe  $M_0$  élément non nul de  $E$  tel que :  $f(M_0) = 0$ .

a/ Pour  $k$  entier naturel, prouver que :  $A^k M_0 = M_0 B^k$ . En déduire que pour tout polynôme  $P$  à coefficients complexes on a :

$$P(A)M_0 = M_0 P(B).$$

b/ Soit  $P_A$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Que peut-on dire de  $P_A(A)$  ? En déduire que  $P_A(B)$  n'est pas inversible dans  $E$ , et ensuite que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune.

3/ Démontrer que  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $E$  si et seulement si  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre en commun.

4/ En déduire que  $\mu$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement s'il existe  $\alpha$  valeur propre de  $A$  et  $\beta$  valeur propre de  $B$  telles que :  $\mu = \alpha - \beta$ .

## Deuxième partie

Dans cette partie,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

1/ Pour  $M$  et  $N$  appartenant à  $E$ , on pose :  $\langle M, N \rangle = \text{tr}({}^tMN)$ . Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

Dans la suite de l'exercice,  $E$  est muni de ce produit scalaire.

2/ Justifier qu'il existe un unique endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que, pour tout  $M, N \in E$ ,  $\langle M, f(N) \rangle = \langle g(M), N \rangle$  et que :

$$\forall M \in E, g(M) = {}^tAM - M {}^tB.$$

3/ a/ Soit  $D$  appartenant à  $E$  vérifiant :  $\forall M \in E, DM = MD$ . Prouver qu'il existe  $a$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :  $D = aI$ .

b/ En déduire que  $f$  est l'application nulle si et seulement s'il existe  $a$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$A = B = aI.$$

c/ Démontrer que l'endomorphisme  $f$  est symétrique si et seulement si les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques.

4/ a/ On suppose que  $B$  est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que  $n$  est un entier pair.

b/ On suppose de plus que  $A$  est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme  $\frac{1}{\sqrt{2}}f$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$ .

5/ On considère le cas particulier :  $n = 2$ . On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $b$  de  $E$ , où  $b = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ . Vérifier les résultats démontrés aux questions 3.b), 3.c) et 4.b).

- $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels et  $n$  et  $n_0$  sont des entiers naturels.
- Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
- Soit  $(\alpha_n)$  une suite réelle. On rappelle que la relation  $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$  signifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 0$ .

### Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel  $\lambda$  vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- 1/ Prouver que si  $\lambda < 0$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge.
- 2/ Soit  $\beta$  un réel quelconque et  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ . Montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  où  $\mu$  est un réel, indépendant de  $n$ , à déterminer.
- 3/ On suppose que  $\lambda > 1$ . On se propose de démontrer que la série  $\sum u_n$  converge. On choisit  $\beta$  tel que  $\lambda > \beta > 1$ .
  - a/ Justifier l'existence d'un entier naturel  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ , on ait  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .
  - b/ Déterminer un réel positif  $K$ , indépendant de  $n$ , tel que pour  $n \geq N$ , on ait  $u_n \leq K v_n$ .
  - c/ Prouver que la série  $\sum u_n$  converge.
- 4/ On suppose que  $0 \leq \lambda < 1$ . Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série  $\sum u_n$  diverge (on choisira  $\beta$  de manière à ce que la série  $\sum v_n$  diverge et que ceci implique la divergence de la série  $\sum u_n$ ).
- 5/ Pour  $n \geq 2$ , on pose  $x_n = \frac{1}{n}$  et  $y_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$ . Déterminer la nature des séries  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  et en déduire que le cas  $\lambda = 1$  est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

### Partie B : applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

- 1/ Pour  $n \geq 2$ , on pose  $w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ . Déterminer la nature de la série  $\sum w_n$ .

- 2/ Pour  $n \geq 1$ , on considère l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}$ .

- a/ Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note  $I_n$  sa valeur.
- b/ Établir que  $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$ .
- c/ En déduire la nature de la série  $\sum I_n$ .

- 3/ Soit  $\alpha$  un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 ; \forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} ; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- a/ Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$ , et pour  $x \in ]-R, R[$ , la valeur de  $S(x)$ .
- b/ Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série  $\sum a_n$  est absolument convergente si et seulement si  $\alpha > 0$ .
- c/ Montrer que si  $\alpha > 0$ ,  $S$  est continue sur  $[-R, R]$  et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0.$$

- d/ Montrer que si  $\alpha < -1$ , la série  $\sum a_n$  diverge.

- e/ On suppose que  $-1 < \alpha < 0$ .

- i) Prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$ .
- ii) Montrer que la série  $\sum a_n$  converge.
- iii) Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

- Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $(G, \times)$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ .
- On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que,  $\forall X \in G$ ,  $X^p = I_n$  où  $I_n$  désigne la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- Soit  $E = \text{Vect}(G)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  engendré par la partie  $G$ .
- Une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite **nilpotente** s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^k = O_n$ .

1/ Quelle est le spectre d'une matrice nilpotente?

2/ Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables?

3/ Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

a/ Déterminer deux nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ .

b/ Prouver l'équivalence

$$A \text{ nilpotente si et seulement si } \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 0.$$

On admettra dans toute la suite de l'exercice que cette propriété se généralise pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, c'est à dire que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$A \text{ nilpotente si et seulement si } \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$$

4/ a/ Vérifier que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie.

b/ Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{N}^*$  et une famille  $(M_1, \dots, M_r)$  d'éléments de  $G$  qui soit une base de  $E$ . On ne cherchera pas à calculer  $r$  ni à déterminer les matrices  $M_j$ .

5/ On note  $U_p$  l'ensemble des racines  $p$ -ièmes de l'unité.

a/ Préciser le cardinal de  $U_p$  et expliciter ses éléments.

b/ Soit  $X$  une matrice élément de  $G$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $X$ . Montrer que  $\lambda \in U_p$ .

6/ Prouver que tout élément de  $G$  est diagonalisable.

7/ Prouver que l'ensemble  $\mathcal{S} = \{\text{tr}(X), X \in G\}$  est fini. Donner un majorant du cardinal de  $\mathcal{S}$ .

On considère alors l'application

$$\varphi : X \in G \mapsto \varphi(X) = (\text{tr}(XM_1), \dots, \text{tr}(XM_r)) \in \mathbb{C}^r$$

8/ Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $G$  tels que  $\varphi(A) = \varphi(B)$ . On note  $N = AB^{-1} - I_n$ .

a/ Justifier que  $AB^{-1} \in G$ . En déduire que  $N$  est diagonalisable.

b/ Montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \text{tr}(AM_i) = \text{tr}(BM_i)$$

En déduire que

$$\forall X \in E, \text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$$

c/ Soit  $k \in \mathbb{N}$ . En écrivant que  $(AB^{-1})^k = AB^{-1} \dots AB^{-1}$  ( $k$  facteurs) et en utilisant la question précédente, montrer que

$$\text{tr}((AB^{-1})^k) = n$$

d/ Calculer alors  $\text{tr}(N)$ ,  $\text{tr}(N^2)$ ,  $\dots$ ,  $\text{tr}(N^n)$ . Que peut-on dire de la matrice  $N$ ?

e/ Montrer que  $\varphi$  est injective.

9/ Montrer que  $\varphi(G) \subset \mathcal{S}^r$ .

10/ Que peut-on en déduire pour  $G$ ?

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans tout l'exercice, on identifie un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  et sa matrice colonne associée d'une part et un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  avec sa matrice canoniquement associée, d'autre part.
- $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ .
- Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{C}^n$ . On considère  $\mathcal{N}$  la norme subordonnée à  $\|\cdot\|$ , c'est à dire telle que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|$$

On rappelle que l'on a  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$ .

1/ Démontrer que l'on a  $\forall X \in \mathbb{C}^n, \|AX\| \leq \mathcal{N}(A)\|X\|$ .

2/ Prouver qu'il existe  $X_0 \in \mathbb{C}^n, X_0 \neq 0$ , tel que l'on a  $\mathcal{N}(A) = \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$ .

3/ Vérifier l'égalité  $\mathcal{N}(I_n) = 1$ .

On rappelle que la norme  $\mathcal{N}_\infty$  est définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par

$$\mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

4/ Justifier, sans le calculer, l'existence de deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que l'on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \alpha \mathcal{N}_\infty(A) \leq \mathcal{N}(A) \leq \beta \mathcal{N}_\infty(A)$$

Soit  $\mathcal{G}$  un sous-groupe du groupe multiplicatif  $GL_n(\mathbb{C})$  qui possède la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{G}, \mathcal{N}(A - I_n) \leq 1$$

ce que l'on peut traduire par :  $\mathcal{G}$  est inclus dans la boule fermée de centre  $I_n$  et de rayon 1 pour la norme  $\mathcal{N}$ .

5/ Montrer que l'ensemble  $\mathcal{G}$  est borné pour la norme  $\mathcal{N}$ .

6/ Soient  $A \in \mathcal{G}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

a/ Justifier que  $A^k \in \mathcal{G}$ .

b/ Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé. Justifier que  $\lambda$  est non nul et déterminer  $A^k X$ .

c/ Montrer que l'on a  $\|(A^k - I_n)X\| \leq \|X\|$ . En déduire les inégalités  $|\lambda^k - 1| \leq 1$  puis  $||\lambda^k| - 1| \leq 1$ .

d/ Démontrer que  $|\lambda| = 1$ . On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et distinguer les cas  $|\lambda| > 1$  et  $|\lambda| < 1$ .

On pose dans la suite de cette question  $\lambda = e^{i\theta}$  où  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

e/ Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $|\cos(k\theta) - 1| \leq 1$ , puis  $\cos(k\theta) \geq 0$ .

f/ Montrer alors successivement que l'on a  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$  puis  $\forall q \in \mathbb{N}, \theta \in [-\pi/2^q, \pi/2^q]$ .

g/ En déduire  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ .

7/ Dans toute cette question, on étudie le cas  $n = 2$ . Soit  $A$  une matrice non diagonalisable de  $\mathcal{G}$ .

a/ Montrer que  $A$  est semblable à une matrice du type  $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  où  $a$  est un complexe non nul.

b/ Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $T^m$  puis  $\mathcal{N}_\infty(T^m)$ .

c/ Démontrer  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$ , puis  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$ .

d/ En déduire que toute matrice de  $\mathcal{G}$  est diagonalisable.

e/ Décrire alors l'ensemble  $\mathcal{G}$ .

On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$(E) \quad y' - y = -\frac{1}{e} \frac{1}{1+x}.$$

1/ Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \geq 1$  et  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

- a/ Rappeler le développement en série entière de la fonction  $u \in ]-1, 1[ \mapsto -\frac{1}{e} \frac{1}{1+x}$ , et préciser sur quel intervalle ce développement est valable.  
 b/ Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients  $a_n$  pour que la somme  $S$  soit solution de (E) sur  $] -1, 1[$ .  
 c/ On suppose la condition précédente satisfaite, démontrer qu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!$$

d/ Démontrer que la suite  $(a_n)$  est bornée et justifier la relation  $R \geq 1$ .

2/ Démontrer que pour  $x > -1$ , la fonction

$$F: \begin{cases} [1, +\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^{-t}}{x+t} \end{cases}$$

est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

On définit la fonction  $f$  sur  $] -1, +\infty[$  en posant :

$$\forall x > -1, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

3/ Démontrer que  $f$  admet un développement en série entière en 0 de la forme :

$$\forall x \in ]-1, 1[ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

et expliciter les coefficients  $b_n$  à l'aide des intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^p} dt$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .

4/ Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et calculer  $f'(x) - f(x)$  pour  $x > -1$ .

5/ En déduire une expression de  $\sum_{k=0}^n (-1)^k k!$  à l'aide des intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^p} dt$ .

- Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $E_n = M_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B} = ((E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2})$  sa base canonique.
- On dira qu'une matrice  $M$  de  $E_n$  est **nilpotente** s'il existe un entier naturel  $r$  non nul tel que :  $M^r = O_n$ .
- On dira qu'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  est **stable pour une matrice**  $A$  de  $E_n$  si :  $\forall X \in V, AX \in V$ .

Soit  $H$  un hyperplan de  $E_n$ . On veut montrer que  $H$  contient au moins une matrice inversible de  $E_n$ .

- 1/ Déterminer, pour tout  $(r, t, u, v) \in \llbracket 1;n \rrbracket^4$ ,  $E_{r,t} \times E_{u,v}$
- 2/ Soit  $T$  une matrice n'appartenant pas à  $H$ . Redémontrer que l'on a :  $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$ .
- 3/ Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique  $\mathcal{B}$ .
- 4/ Soient  $N$  une matrice nilpotente,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X$  un vecteur colonne non nul tel que  $NX = \lambda X$ . Montrer que  $\lambda = 0$ .
- 5/ On note  $U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E_{i,j} + E_{j,i})$ . Démontrer que  $U$  est inversible.
- 6/ On suppose dans cette question que  $H$  ne contient pas de matrice inversible. Soit  $N$  une matrice nilpotente de  $E_n$ 
  - a/ Justifier l'existence d'une matrice  $A \in H$  et d'un scalaire  $\alpha$  tels que :  $N = A + \alpha I_n$ .
  - b/ Justifier qu'il existe  $X$  un vecteur colonne non nul tel que  $AX = 0$  et prouver que  $N \in H$ .
  - c/ En déduire une contradiction.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que  $H$  est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que :

$$\forall (A, B) \in H^2, \quad AB \in H$$

- 7/ On prend  $n = 2$ . Exhiber un hyperplan de  $E_2$  stable pour la multiplication des matrices.
- 8/ On se propose de montrer que  $I_n \in H$  et on raisonne par l'absurde en supposant que  $I_n \notin H$ .
  - a/ On note  $p$  la projection sur  $\text{Vect}(I_n)$  parallèlement à  $H$ . Prouver que l'on a :  $\forall (M, N) \in E_n^2, p(MN) = p(M)p(N)$ .
  - b/ Démontrer l'implication suivante :  $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$ .
  - c/ Prouver alors que :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, E_{i,j} \in H$ .
  - d/ Conclure.

On se propose maintenant de démontrer que  $n = 2$ , c'est-à-dire de démontrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de  $M_n(\mathbb{R})$  stable pour la multiplication pour  $n \geq 3$

- 9/ Justifier que l'application

$$\varphi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto \text{tr}(A^T B) \end{cases}$$

définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ . On notera  $\varphi(A, B) = \langle A, B \rangle$ .

- 10/ Soit  $A$  un élément non nul de l'orthogonal de  $H$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
  - a/ Que peut-on dire sur  $H^\perp$  ?
  - b/ Justifier que pour tout  $B \in H$ ,  $AB^T$  est dans  $H^\perp$ . En déduire que  $BA^T$  est colinéaire à  $A^T$ .
  - c/ Montrer que la matrice  $A^T$  n'est pas inversible.
  - d/ Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  défini par :  $W = \text{Im}(A^T)$ . Montrer que pour toute matrice  $B \in H$ ,  $W$  est stable pour  $B$ .
  - e/ Soient :
    - $p$  le rang de la matrice  $A^T$ ,
    - $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\text{Im}(A^T)$ , complétée en une base  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ ,
    - $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  à la base  $\mathcal{B}_1$ .
 Montrer que l'application  $\varphi_P : M \in E_n \mapsto P^{-1}MP \in E_n$  est un automorphisme de  $E_n$ .
  - f/ En déduire que l'on a :  $\dim(H) \leq n^2 - p(n - p)$ .
- 11/ Conclure.

$E$  est un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  muni du produit scalaire  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ . On rappelle qu'un automorphisme de  $E$  est un endomorphisme **bijectif** de  $E$ . On considère un automorphisme  $u$  de  $E$  qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E \times E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

1/ Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $A$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

a/ Étant donnés deux entiers  $i, j$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $a_{i,j}$  le  $(i, j)$ -ème coefficient de  $A$ . Justifier :

$$a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle.$$

b/ En déduire l'égalité :  ${}^t A = -A$ .

2/ Montrer que l'entier  $n$  est un nombre pair (Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice  $A$ ).

3/ On appelle  $v$  l'automorphisme égal à  $u \circ u$ . Montrer que  $v$  est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de  $E$ .

4/ Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $v$ , montrer que  $\lambda$  est strictement négative.

5/ On note  $x$  un vecteur propre de l'automorphisme  $v$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $x$  et  $u(x)$ .

a/ Montrer que la dimension de  $F$  est égale à 2.

b/ Montrer que  $F$  est stable par l'automorphisme  $u$ , en déduire que l'orthogonal  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ . On notera  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  les applications induites par l'automorphisme  $u$  sur les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $F^\perp$ .

c/ Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $v$ , on pose  $a = \sqrt{-\lambda}$ . Montrer qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $F$  telle que la matrice de  $u_F$  dans la base  $\mathcal{B}'$  soit égale à  $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$  (Indication : On pourra considérer les vecteurs  $e'_1 = \frac{1}{\|x\|} x$  et  $e'_2 = \frac{1}{a\|x\|} u(x)$ ).

d/ Montrer que l'endomorphisme  $u_{F^\perp}$  est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6/ On suppose dans cette question que l'espace euclidien  $E$  est de dimension 4. Soit  $u$  un automorphisme de  $E$  vérifiant la relation (1).

Montrer qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}''$  de  $E$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  non nuls tels que la matrice de l'automorphisme  $u$  dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

# Corrections

- 1/ Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a  $\|Px\| = \|x\|$ . Ainsi  $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ , c'est-à-dire la sphère unité.
- 2/ a/ Soit  $B = {}^tAA$ . On a  $B \in M_n(\mathbb{R})$  et  ${}^tB = {}^{tt}AA = {}^tAA = B$ . La matrice est symétrique réelle. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$  et  $x$  un vecteur non nul tel que  $Bx = \lambda x = {}^tAAx$ . On en déduit

$${}^t_x Bx = \lambda {}^t_x x = \lambda \|x\|^2 = {}^t_x {}^tAAx = {}^t(Ax)(Ax) = \|Ax\|^2$$

Puisque  $A$  est inversible et  $x \neq 0$ , on a  $Ax \neq 0$  et ainsi  $\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} > 0$ . La matrice  $B$  est symétrique définie positive.

- b/ Il existe  $P$  orthogonale et  $C$  diagonale à éléments diagonaux strictement positifs telles que  ${}^tAA = P^{-1}CP = {}^tPCP$ . Si on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les éléments diagonaux de  $C$ , on peut poser  $D$  la matrice diagonale de diagonale  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ . On a alors  $D^C = C$  et  ${}^tAA = {}^tPD^2P$ .
- c/ On note  $S = {}^tPDP$ . Cette matrice est semblable à  $D$  donc ses valeurs propres sont strictement positives. De plus  ${}^tS = {}^tP{}^tD{}^tP = S$  puisque  ${}^tD = D$ . On a donc  $S$  symétrique définie positive.
- d/ Puisque les valeurs propres de  $S$  sont strictement positives,  $S$  est inversible. On note  $Q = AS^{-1}$ . On a  ${}^tQQ = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1}$ . Or  ${}^tSS = {}^tP{}^tD{}^tP{}^tPDP = {}^tPD^2P = {}^tAA$ . Cela donne  ${}^tQQ = {}^tS^{-1}{}^tSSS^{-1} = {}^t(SS^{-1}) = I_3$ . La matrice  $Q$  est orthogonale et  $A = QS$ .
- e/ Si  $\|Ax\| = 1$  alors  $\|QSx\| = 1 = \|Sx\|$  donc  $\|Sx\| = 1$ . Réciproquement si  $\|Sx\| = 1$ , alors  $\|QSx\| = 1$  et  $\|Ax\| = 1$ . On a donc  $\|Ax\| = 1$  si et seulement si  $\|Sx\| = 1$  et ainsi  $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$ .
- 3/ Soient  $S$  et  $S'$  deux matrices symétriques définies positives telles que  $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$ .

- a/ Soit  $u = v / \|S(v)\|$  (possible puisque  $Sv \neq 0$ ). On a  $\|u\| = \frac{\|S(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$  donc  $u \in \mathcal{E}(S)$ . On en déduit que  $u \in \mathcal{E}(S')$  et  $\|S'(u)\| = \frac{\|S'(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$ . Ainsi  $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$ .
- b/ Avec les formules de polarisation, pour tout  $v, w \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \langle S(v), S(w) \rangle &= \frac{1}{2} (\|S(v+w)\|^2 - \|S(v)\|^2 - \|S(w)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|S'(v+w)\|^2 - \|S'(v)\|^2 - \|S'(w)\|^2) = \langle S'(v), S'(w) \rangle. \end{aligned}$$

- c/ Puisque  $\langle S(v), S(w) \rangle = \langle S^*S(v), w \rangle = \langle S^2(v), w \rangle$ , on a pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $\langle S^2(v), w \rangle = \langle S'^2(v), w \rangle$ . On en déduit que  $S^2 = S'^2$  : si  $v \in \mathbb{R}^3$ , pour tout  $w \in \mathbb{R}^3$ , on a  $\langle (S^2 - S'^2)(v), w \rangle$  donc  $(S^2 - S'^2)(v) = 0$ .
- d/ Si  $\alpha$  est une valeur propre de  $S$  alors  $\alpha > 0$  et, par le lemme des noyaux puisque  $S - \alpha$  et  $S + \alpha$  sont premiers entre eux,

$$\ker(S^2 - \alpha^2 \text{Id}) = \ker(S - \alpha \text{Id}) \oplus \ker(S + \alpha \text{Id}).$$

Puisque  $S$  est symétrique définie positive,  $-\alpha$  n'est pas une valeur propre de  $S$  donc  $\ker(S + \alpha \text{Id}) = \{0\}$  et  $\ker(S - \alpha \text{Id}) = \ker(S^2 - \alpha^2 \text{Id})$ .

- e/ Si  $\alpha$  est une valeurs propre de  $S$ , alors  $\ker(S - \alpha \text{Id}) = \ker(S^2 - \alpha^2 \text{Id}) = \ker(S'^2 - \alpha^2 \text{Id})$  et pour les mêmes raisons, avec  $\alpha > 0$  quelconque, on a  $\ker(S' - \alpha \text{Id}) = \ker(S'^2 - \alpha^2 \text{Id})$ . Ainsi  $\ker(S - \alpha \text{Id}) = \ker(S' - \alpha \text{Id})$ . On en déduit que  $S$  et  $S'$  coïncident sur l'espace propre  $E_\alpha(S)$ . Puisque les sous-espaces propres de  $S$  sont supplémentaires,  $S$  et  $S'$  coïncident sur tout l'espace donc  $S = S'$ .
- 4/ On décompose  $A = QS$  et  $A' = Q'S'$  avec  $S, S'$  symétriques définies positives et  $Q$  et  $Q'$  orthogonales. On a  $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A') = \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$ . La question précédente donne  $S = S'$ . On a donc  $S = Q^{-1}A = Q'^{-1}A'$  et  $A = QQ'^{-1}A' = VA'$  avec  $V = QQ'^{-1} \in I_3(\mathbb{R})$ . Réciproquement si  $A = VA'$  avec  $V'$  orthogonale, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|VA'x\| = \|A'x\| = \|Ax\|$ . On a donc  $\|Ax\| = 1$  si et seulement si  $\|A'x\| = 1$  et  $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$ .

- 1/ La série  $\sum (-1)^n u_n$  vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées. On sait donc que  $R_n$  est du signe de son premier terme, à savoir  $(-1)^n$ . On a donc

$$|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^n R_n + (-1)^{n+1} R_{n+1} = (-1)^n (R_n - R_{n+1}) = (-1)^n ((-1)^n u_n) = u_n$$

- 2/ Avec un changement d'indice dans chacune des sommes, on a

$$\begin{aligned} |R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n (R_n + R_{n+1}) = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + (-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+n} u_{n+p} + (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+n+1} u_{n+p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p} + (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} u_{n+p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1}) \end{aligned}$$

Si on note  $v_p = u_{n+p} - u_{n+p+1}$ , on a  $v_{p+1} - v_p = -u_{n+p+2} + 2u_{n+p+1} - u_{n+p} \leq 0$  d'après la propriété de  $u_n$ . De plus  $\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = 0$ .

On est dans le cas du théorème sur les séries alternées, donc la somme obtenue est du signe de son premier terme donc positive. La suite  $(|R_n|)$  est donc décroissante.

- 3/ On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2|R_{n+1}| \leq |R_n| + |R_{n+1}| \leq 2|R_n|$ , d'où  $2|R_{n+1}| \leq u_n \leq 2|R_n|$ . Cela donne, pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$ .

- 4/ Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = 1$  et  $1 \leq \frac{2|R_n|}{u_n} \leq \frac{u_{n-1}}{u_n}$ , par encadrement, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2|R_n|}{u_n} = 1$ . Puisque  $R_n = (-1)^n |R_n|$ , cela donne bien  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}$ .

- 5/ on vérifie les hypothèses, à partir d'un certain rang au moins, avec  $u_n = \frac{\ln n}{n}$  : si les propriétés sont vraies à partir d'un certain rang, il suffit de considérer la suite translatée et constater que  $u_{n_0+k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} u_k$  (ou alors changer les premiers termes pour que la suite vérifie les propriétés à partir du rang 0) : on note  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  et  $u_n = f(n)$ .

- pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n > 0$ ,
- $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$  et  $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ,
- $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  et  $f$  est décroissante sur  $[e, +\infty[$  donc  $(u_n)_{n \geq 3}$  est décroissante - elle tend vers 0 par croissances comparées.
- $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  et  $f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2\frac{\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$  et  $f''(x) \geq 0$  si  $x \geq e^{3/2}$  donc  $f$  est décroissante et convexe sur  $[5, +\infty[$ . Notamment, pour  $n \geq 5$ , on a  $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}(n+2) = n+1$  et  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n+2}$  ce qui donne la dernière relation.

On en déduit que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln n}{2n}$

- 1/ a/ les fonctions coordonnées  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Par produits et sommes, les fonctions polynomiales en  $x$  et  $y$  sont également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

b/ Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3(1 + y^2) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy$$

c/ On a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Si  $x = 0$  alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$  ne s'annule pas. Il reste  $y = 0$ . Dans ce cas  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$  si et seulement si  $x^2 = 1$ . On a donc deux points critiques  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

d/ On étudie la matrice hessienne de  $f$  en l'un de ces points. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$

Les deux matrices  $Hf(1, 0)$  et  $Hf(-1, 0)$  sont diagonales avec des valeurs propres non nulles de signe opposé. Elles ne sont donc pas symétrique définie positive ou négative. Les points ne sont donc pas des extrema locaux.

e/ Si on a un extremum local sur  $\mathbb{R}^2$ , alors, puisque  $\mathbb{R}^2$  est ouvert, cet extremum est en un point critique donc l'un des 2 points précédents. Il n'y a pas d'extremum local sur  $\mathbb{R}^2$ .

2/  $D$  est compact (fermé et borné) puisque c'est la boule unité fermée. L'application continue  $g$  admet donc un maximum et un minimum sur  $D$  (et ils sont atteints).

3/ si le maximum  $A$  était atteint en un point à l'intérieur de  $D$  alors ce point serait un point critique. Or  $g$  n'a pas de points critiques dans  $B(0, 1)$ . Les extrema sont donc atteints au bord du domaine.

4/ pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$g(\cos t, \sin t) = \cos t (\cos^2 t - 3 - 3 \sin^2 t) = \cos t (\cos^2 t - 3 - 3 + 3 \cos^2 t) = 2 \cos t (2 \cos^2 t - 3)$$

5/ la fonction  $g$  est de période  $2\pi$  et paire. On peut l'étudier sur  $[0, \pi]$  (on peut aussi constater que  $g(\pi - x) = -g(x)$  ce qui permet de l'étudier sur  $[0, \pi/2]$  seulement). On a  $g'(t) = -6 \sin t (2 \cos^2 t - 1)$ . Un tableau de variation nous donne un maximum  $5/2$  en  $2\pi/3$  et un minimum  $-5/2$  en  $\pi/3$ . Le maximum vaut  $5/2$  et il est atteint en deux points :  $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

6/ Le minimum vaut  $-5/2$  et il est atteint en deux points  $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

1/ Si  $M$  est solution de l'équation, on pose  $N = PMP^{-1}$ . On a alors  $N^2 = PM^2P^{-1}$  et

$$N^2 + pN + qI_n = P(M^2 + pM + qI_n)P^{-1} = 0$$

donc  $PMP^{-1}$  est bien solution.

2/ a/ la matrice  $M$  est solution si et seulement si le polynôme  $(X - a)(X - b)$  est annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples donc  $M$  est diagonalisable, semblable à une matrice diagonale  $A_k$  de diagonale  $(a, \dots, a, b, \dots, b)$  (avec  $k$  termes  $a$  et  $n - k$  termes  $b$ ). Réciproquement les matrices semblables à  $A_k$  sont solutions puisqu'elles sont diagonalisables avec comme seules valeurs propres  $a$  et  $b$  (éventuellement une seule des deux) donc annulées par  $(X - a)(X - b)$ .

b/ On a finalement  $\mathcal{E}_{-(a+b), ab} = \bigcup_{k=0}^n E(A_k)$ .

3/ a/ On a  $f^2 = 0$ . Soit  $y \in \text{Im } f$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  puis  $f(y) = f^2(x) = 0$  donc  $y \in \ker f$ . On a bien  $\text{Im } f \subset \ker f$ .

b/ Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On a alors

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f.$$

c/ Avec l'inclusion  $\text{Im } f \subset \ker f$ , on a  $\text{rg } f \leq \dim \ker f$  et ainsi  $\dim E \geq 2 \text{rg } f$ .

d/ On cherche à construire une base  $(e_1, \dots, e_n)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme voulue. On veut donc

$$f(e_1) = e_{n-p+1}, \dots, f(e_p) = e_n, f(e_{p+1}) = 0 = \dots = f(e_n).$$

- première version : puisque  $\text{Im } f \subset \ker f$ , il est plus facile de compléter une base de  $\text{Im } f$  en une base de  $\ker f$  plutôt que de commencer avec une base de  $\ker f$  (dans laquelle on pourrait n'avoir aucun vecteur de  $\text{Im } f$ ). Soit  $p$  vecteurs  $e_{n-p+1}, \dots, e_n$  qui forment une base de  $\text{Im } f$  avec des antécédents  $e_1, \dots, e_p$  (on a  $p \leq n - p$  donc  $p < n - p + 1$ ); on a  $f(e_k) = e_{n-p+k}$  pour  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ . On complète la famille libre  $(e_{n-p+1}, \dots, e_n)$  de  $\ker f$  en une base  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $\ker f$ . On a alors une famille de  $n$  vecteurs qui vérifieront les conditions imposées. Il reste à prouver que c'est une base. Si

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

on obtient en appliquant  $f$ ,

$$\lambda_1 e_{n-p+1} + \dots + \lambda_p e_n + 0 = 0,$$

et ainsi  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$  puisque la famille de vecteurs  $(e_{n-p+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $\text{Im } f$ . Il reste alors

$$\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

et tous les scalaires sont nuls (base de  $\ker f$ ). Finalement la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre; c'est une base de  $E$  et la matrice de  $f$  dans cette base est la matrice  $J_p$  de l'énoncé.

- seconde version : même principe en un peu plus rapide avec l'isomorphisme du rang. Soit  $H$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$  et  $\tilde{f}$  l'isomorphisme  $x \in H \mapsto f(x) \in \text{Im } f$ . On construit une base de  $\ker f$  obtenue en complétant une base de  $\text{Im } f$  :  $(e_{p+1}, \dots, e_{n-p+1}, \dots, e_n)$  (les  $p$  derniers forment une base de  $\text{Im } f$ . Par isomorphisme, il existe un unique antécédent  $e_k \in H$  de  $e_{n-p+k}$  pour  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ . La famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $H$ . Puisque  $H$  et  $\ker f$  sont supplémentaires, on a créé une base de  $E$  avec la propriété voulue.

e/ Si  $M$  est solution alors il existe  $p \leq n/2$  telle que  $M \in E(J_k)$ . Réciproquement les matrices  $J_k$  vérifient bien  $J_k^2 = 0$  (on a  $\text{Im } J_k \subset \ker J_k$  si  $k \leq n/2$ ).

4/ a/  $M$  vérifie l'équation si et seulement si  $0 = M^2 - 2aM + a^2 I_n = (M - aI_n)^2$  donc si et seulement si  $N = M - aI_n$  vérifie  $N^2 = 0$ .

b/ Les solutions sont toutes les matrices  $aI_n + N$  où  $N$  est une solution de  $\mathcal{E}_{0,0}$ .

5/ Si une solution existe alors  $M^2 = -I_n$  ce qui donne  $\det(M^2) = (\det M)^2 = (-1)^n \geq 0$ . On a donc  $n$  pair. Par contraposée, si  $n$  est impair, alors il n'y a pas de solution.

6/ a/ Le polynôme  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et annulateur de  $M$ . Ainsi  $M$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

b/ On propose deux versions :

- On diagonalise sur  $\mathbb{C}$ . La matrice est semblable à une matrice diagonale avec  $n_1$  termes  $i$  et  $n_2$  termes  $-i$ . La trace de  $M$  étant réelle, on obtient que  $n_1 = n_2 = p$  (et  $\text{tr } M = 0$ ). Chaque espace propre  $E_i$  et  $E_{-i}$  est de dimension  $p$ . Soit  $X_1, \dots, X_p$  une base de vecteurs propres de  $M$  pour la valeur propre  $i$  : pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $MX_k = iX_k$ . Par conjugaison ( $M$  est réelle), on obtient  $M\overline{X_k} = -i\overline{X_k}$ . La famille  $(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_p})$  est une base de  $E_{-i}(M)$ . On écrit  $X_k = Y_k + iZ_k$  (où  $Y_k$  et  $Z_k$  sont des vecteurs colonnes réels). On a

$$MX_k = MY_k + iMZ_k = iX_k = -Z_k + iY_k$$

ainsi  $MY_k = -Z_k$  et  $MZ_k = Y_k$ . On considère alors la famille  $(Z_1, \dots, Z_p, Y_1, \dots, Y_p)$ . Si on prouve que cette famille est une base de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors avec  $P$  la matrice de ces vecteurs, on a  $P^{-1}MP$  qui sera sous la forme voulue. On prouve que la famille est libre (dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ) :

$$\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_p Z_p + \mu_1 Y_1 + \dots + \mu_p Y_p = 0$$

On a  $X_k = Y_k + iZ_k$  donc  $Y_k = \frac{X_k + \overline{X_k}}{2}$  et  $Z_k = \frac{X_k - \overline{X_k}}{2i}$ . Cela donne

$$\left(\frac{1}{2i}\lambda_1 + \frac{1}{2}\mu_1\right)X_1 + \dots + \left(\frac{1}{2i}\lambda_p + \frac{1}{2}\mu_p\right)X_p + \left(-\frac{1}{2i}\lambda_1 + \frac{1}{2}\mu_1\right)\overline{X_1} + \dots + \left(-\frac{1}{2i}\lambda_p + \frac{1}{2}\mu_p\right)\overline{X_p} = 0$$

Puisque  $(X_1, \dots, X_p)$  est une base de  $E_i$  et  $(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_p})$  une base de  $E_{-i}$ , les deux bases concaténées forment une base de l'espace complet et chaque scalaire est nul. Cela donne des relations  $\frac{1}{2i}\lambda_k + \frac{1}{2}\mu_k = 0$  et  $-\frac{1}{2i}\lambda_k + \frac{1}{2}\mu_k = 0$  qui entraînent  $\lambda_k = \mu_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ . La famille est libre et cela termine la démonstration.

- On construit une base avec les contraintes souhaitées (et avec pas mal de marge) : soit  $g$  canoniquement associé à  $M$ . On considère une famille de  $\mathbb{R}^n$  de  $p$  vecteurs linéairement indépendants  $(e_1, \dots, e_p)$ . On pose  $e_{k+p} = f(e_k)$  pour  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ . On aura  $f(e_{k+p}) = f^2(e_k) = -e_k$ . Il suffit de vérifier qu'on a une base :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_1 e_{p+1} + \dots + \mu_p e_{2p} = 0,$$

on applique  $f$  et cela ne donne rien... en effet si on choisit mal, rien n'oblige à ce qu'on ait une base (par exemple si on a pris  $e_2 = f(e_1)$  au début, on se retrouve avec  $e_{p+1} = e_2$  et  $e_{p+2} = -e_1$ ). Il faut donc mieux construire la famille de vecteurs. On les construit de proche en proche.

- Soit  $e_1 \neq 0$ . On pose  $e_{p+1} = f(e_1)$ . Ce vecteur n'est pas colinéaire à  $e_1$  (pas de valeurs propres réelles) donc  $F_1 = \text{Vect}(e_1, f(e_1))$  est un plan stable par  $f$  (car  $f(e_{p+1}) = -e_1$ ).
- Si  $p = 1$ , c'est fini. Sinon  $F_1 \neq E$  donc il existe  $e_2 \notin F_1$ . On vérifie que  $F_2 = \text{Vect}(e_2, f(e_2))$  est un plan stable par  $f$  et que  $F_1$  et  $F_2$  sont en somme directe : si

$$\lambda e_1 + \mu_1 e_{p+1} + \lambda_2 e_2 + \mu_2 e_{p+2} = 0,$$

alors, en appliquant  $f$  :

$$\lambda e_{p+1} - \mu_1 e_1 + \lambda_2 e_{p+2} - \mu_2 e_2 = 0,$$

en effectuant  $\lambda_2 L_1 - \mu_2 L_2$ , on obtient  $(\lambda_2^2 + \mu_2^2)e_2$  combinaison de  $e_1$  et  $e_{p+1}$  donc dans  $F_1$ . Cela n'est possible que si  $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ . Cela donne alors  $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ .

- On continue : on a construit  $e_1, \dots, e_k$  tels que  $F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_k$  sous le principe précédent. Si  $k < p$ , alors il existe  $e_{k+1} \notin F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_k$ . On vérifie de même que  $F_{k+1}$  est en somme directe avec  $F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_k$ .
- On s'arrête lorsque  $k = p$ . Cela donne  $E = F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_p$  avec  $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{p+k})$  avec  $e_{p+k} = f(e_k)$ . La famille  $(e_1, \dots, e_{2p})$  est une base de  $E$  dans laquelle la matrice est sous la forme voulue.

c/ On a montré que si  $M$  est solution alors elle est semblable à la matrice donnée en 6/b. Réciproquement cette matrice convient et toutes les matrices semblables également.

7/ On a  $M^2 + pM + qI_n = \left(M + \frac{p}{2}I_n\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)I_n$ . On pose  $\Delta = p^2 - 4q < 0$  et  $\delta$  tel que  $\delta^2 = -\Delta$ , ce qui donne  $\left(M + \frac{p}{2}I_n\right)^2 + \frac{\delta^2}{4}I_n = 0$  où encore  $\left(\frac{2}{\delta}\left(M - \frac{p}{2}I_n\right)\right)^2 + I_n = 0$ . La matrice  $M$  est solution si et seulement si  $\frac{2}{\delta}\left(M - \frac{p}{2}I_n\right)$  est solution de  $X^2 + I_n = 0$ . Cela donne toutes les matrices  $M$  possibles.

- 1/ Pour  $x > 0$ , la fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \frac{1}{t^2}$ . On en déduit que  $h$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt = \left[ \frac{1}{2x} \arctan(2tx) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4x}$$

puisque  $x > 0$  et ainsi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2tx = +\infty$ .

- 2/ La fonction  $F$  n'est pas définie en 0 (la série de terme général 1 diverge). Si  $x \neq 0$ , alors  $\frac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \frac{1}{n^2}$  et la série converge (comparaison des termes généraux de séries à termes positifs). On a immédiatement, pour tout  $x \neq 0$ ,  $F(-x) = F(x)$ .
- 3/ Soit  $u_n : x \mapsto \frac{1}{1+4n^2x^2}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chaque fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x > 0$ ,

$$u'_n(x) = \frac{-8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}.$$

Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ , on a

$$|u'_n(x)| \leq \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2} = v_n$$

et  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{8bn^2}{16n^4a^4} = \frac{b}{2a^4n^2}$ . La série  $\sum v_n$  converge et ainsi la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement et uniformément sur  $[a, b]$ . On en déduit que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+^*$  et donc sur leur réunion, c'est-à-dire sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- 4/ La fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc

$$\frac{1}{1+4(n+1)^2x^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt \leq \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

En sommant ces inégalités pour  $n$  allant de 0 à  $+\infty$  (les séries convergent, l'intégrale également), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

ce qui donne

$$F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt \leq F(x) + 1$$

Cela donne finalement l'encadrement, pour  $x > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt - 1 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$

- 5/ On utilise l'encadrement avec la valeurs de l'intégrale calculée précédemment :

$$\forall x > 0, \frac{1}{4x} - 1 \leq F(x) \leq \frac{1}{4x}.$$

Ainsi  $1 - 4x \leq 4xF(x) \leq 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4xF(x) = 1$ . Cela donne  $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4x}$ .

On a alors, pour tout  $x > 0$ ,  $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{4x}$  et par encadrement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .

- 6/ On a déterminé  $F'$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x > 0$ ,  $F'(x) \leq 0$ . La fonction est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- 7/ Soit  $x > 0$  et  $g(t) = \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ . On a

- $g$  continue sur  $]0, +\infty[$ ,
- $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2xt} = \frac{1}{2x}$  donc  $g$  admet une limite finie en  $+\infty$ ,
- $|g(t)| \leq \frac{1}{e^{2xt} - 1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

Ainsi  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- 8/ Soit  $h(x, t) = \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ .

- pour tout  $x > 0$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,
- pour tout  $t > 0$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$

Soit  $a > 0$ . Si  $t > 0$  et  $x \geq a$ , on a  $e^{2xt} - 1 \geq e^{2at} - 1 > 0$  donc  $|h(x, t)| \leq \frac{|\sin t|}{e^{2at} - 1} = |h(a, t)|$ . La fonction  $t \mapsto h(a, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (question précédente) donc le théorème de continuité s'applique et  $G$  est continue sur tout  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$  donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

9/ Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $|\sin(t)e^{-\alpha t}| \leq e^{-\alpha t}$  et cette dernière expression est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit l'existence de  $I_\alpha$ . En intégrant par parties de fois de suite (toutes les intégrales existent), on trouve

$$I_\alpha = [-\cos te^{-\alpha t}]_0^{+\infty} - \alpha \int_0^{+\infty} \cos te^{-\alpha t} dt = 1 - \alpha \left( [\sin te^{-\alpha t}]_0^{+\infty} + \alpha I_\alpha \right)$$

Finalement  $(1 + \alpha^2)I_\alpha = 1$  et  $I_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha^2}$ .

10/ On décompose  $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$  en somme de série de fonctions. Pour  $x > 0$  et  $t > 0$ ,

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \frac{\sin(t)e^{-2xt}}{1 - e^{-2xt}} = (\sin t)e^{-2xt} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2xt})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin t)e^{-2nxt}$$

puisque  $0 < e^{-2xt} < 1$  (série géométrique). On note  $f_n(t) = \sin te^{-2nxt}$ . Chaque fonction  $f_n$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  et, pour tout  $t > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = g(t)$ . La fonction est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On essaie alors d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme puisqu'il donnerait

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (2nx)^2},$$

sauf que l'hypothèse manquante ne vient pas facilement :

$$\int_0^{+\infty} |\sin te^{-2nxt}| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2nxt} dt = \frac{1}{2nx}$$

ce qui n'est pas le terme général d'une série convergente. On utilise les sommes partielles :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N \sin te^{-2nxt} dt = \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} \sin te^{-2nxt} dt = \sum_{n=1}^N \frac{1}{1 + (2nx)^2},$$

or

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N (\sin t)e^{-2nxt} dt = \int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-2xt} \frac{1 - e^{-2Nxt}}{1 - e^{-2xt}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} (1 - e^{-2Nxt}) dt = G(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} e^{-2Nxt} dt$$

Il reste à étudier la limite de la dernière intégrale, par exemple avec un théorème de convergence dominée (ou avec une simple majoration si on la voit). On note  $b_N(t) = \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} e^{-2Nxt}$  pour  $t > 0$ . La suite converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$

(et cette fonction est continue). Pour tout  $N \geq 1$  et  $t > 0$ ,  $|b_N(t)| \leq \left| \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} \right| = \varphi(t)$  et  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On peut appliquer

le théorème de convergence dominée, obtenir  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} b_N(t) dt = 0$  et enfin  $F(x) = G(x)$ .

- 1/ a/ Soit  $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ . La fonction est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha n}}$ . Or  $\alpha n > 1$  donc  $f_n$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et donc sur  $\mathbb{R}^+$ .
- b/ L'application  $u \mapsto \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur lui-même. Cela permet d'effectuer le changement de variable et donne l'existence de la nouvelle intégrale (et la fonction qui apparaît est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ ) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du$$

c/ soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \geq 0$ , on développe par la formule du binôme

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{u}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^k \geq 1 + n \frac{u}{n} = 1 + u.$$

2/ Soit  $u \geq 0$ . On a

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right)\right),$$

on a  $n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{u}{n} = u$  (même lorsque  $u = 0$ ) et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u$ .

- 3/ a/ Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit  $g_n : u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n}$ .

- chaque fonction  $g_n$  est continue sur  $]0, +\infty[$ ,
- soit  $u > 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} = g(u)$  et la fonction  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$ ,
- Pour tout  $u > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq g_n(u) \leq \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u} = \varphi(u)$ .
- La fonction  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . On a  $\varphi(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}}$  et puisque  $1 - \frac{1}{\alpha} < 1$ ,  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . On a  $\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}$  et puisque  $\alpha > 1$ ,  $2 - \frac{1}{\alpha} > 1$ . Ainsi  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et finalement sur  $]0, +\infty[$ .

Le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

b/ Puisque  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \neq 0$ , on obtient  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}}$

- 4/ a/ Puisque  $I_n$  est non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on peut appliquer le critère de d'Alembert. On obtient, avec l'équivalent précédent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$  et la série entière à un rayon de convergence égal à 1.
- b/ Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n dt$$

On cherche à permuter somme et intégrale, ce qui donnerait

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha} \frac{1}{1 - \frac{x}{1+t^\alpha}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x} dt$$

On note  $f_n(t) = \left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n$ . La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  puisque  $\left|\frac{x}{1+t^\alpha}\right| \leq |x| < 1$  (série géométrique) et la fonction somme est  $t \mapsto \frac{x}{1+t^\alpha - x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ . On a alors

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |x|^n I_n$$

et la série  $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$  converge (on a l'existence des intégrales d'après ce qui est fait avant). On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et obtenir le résultat.

1/

a/ On le prouve par récurrence sur  $n$ . La propriété est vérifiée pour  $n = 0$  avec  $P_0 = 1$ . S'il elle est vraie pour un certain entier  $n \in \mathbb{N}$ , alors, pour tout  $x \in I$ ,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos(x)P'_n(\sin x)(\cos x)^{n+1} + (n+1)(\sin x)(\cos x)^n P_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}} = \frac{\cos(x)P'_n(\sin x)(\cos x) + (n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

$$\text{d'où } f^{(n+1)}(x) = \frac{(1 - \sin^2 x)P'_n(\sin x) + (n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \text{ avec}$$

$$P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n.$$

b/ fait avant :  $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n$

c/  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et  $P_2 = (1 - X^2) + 2X^2 = X^2 + 1$

d/ Visiblement  $P_n$  est de degré  $n$ . On le prouve par récurrence. On a  $P_n = a_n X^n + Q_n$  avec  $\deg Q_n < n$ , ce qui donne  $P_{n+1} = (n+1)a_n X^{n+1} - na_n X^2 X^{n-1} + \dots = a_n X^{n+1} + \dots$  (les  $\dots$  étant des termes de degré au plus  $n$ ). Par récurrence  $P_n$  est de degré  $n$  et unitaire.

e/  $P_0$  et  $P_2$  sont pairs,  $P_1$  est impair. On devrait avoir  $P_n$  de même parité que  $n$ . Pour le faire en une seule fois, on prouve par récurrence que  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ . C'est vérifié pour  $n = 0, 1$  et  $2$ . Si la propriété est vraie pour un entier  $n$  alors  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$  et, en dérivant,  $-P'_n(-X) = (-1)^n P'_n(X)$ . On a alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}(-X) &= (1 - (-X)^2)P'_n(-X) + (n+1)(-X)P_n(-X) = -(-1)^n(1 - X^2)P'_n(X) - (n+1)(-1)^n X P_n(X) \\ &= (-1)^{n+1}((1 - X^2)P'_n(X) + (n+1)X P_n(X)) \\ &= (-1)^{n+1}P_{n+1}(X). \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer de  $f^{(n)}$  est de même parité que  $n$ , ce qui donne, pour tout  $x \in I$ ,  $P_n(\sin(-x)) = (-1)^n P_n(\sin x)$  et ainsi, pour tout  $u \in ]-1, 1[$ ,  $P_n(-u) = (-1)^n P_n(u)$ . Puisque  $] -1, 1[$  est un ensemble infini, on a  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ .

2/

a/ On le prouve par récurrence : on suppose que  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_k \in \mathbb{N}$ . On a alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} - \sum_{k=1}^n k a_k X^{k+1} + \sum_{k=0}^n (n+1) a_k X^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} + (n+1) a_0 X + \sum_{k=1}^n (n+1-k) a_k X^{k+1}. \end{aligned}$$

et tous les coefficients sont des entiers positifs.

b/ D'après la relation de récurrence,  $P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$ . On montre par récurrence que  $P_n(1) = n!$ .

3/ La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ , donc, pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) = S_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

On effectue le changement de variable «  $t = x(1-u)$  », avec  $u \in [0, 1] \mapsto x(1-u) \in [0, x]$ ,  $\mathcal{C}^1$  et bijective si  $x \neq 0$ . Cela donne, pour  $x \neq 0$ ,

$$f(x) = S_n(x) + \frac{1}{n!} \int_1^0 (xu)^n f^{(n+1)}(x(1-u)) (-du) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du.$$

4/ On s'intéresse à la série  $\sum a_n x^n$  pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$  (afin d'avoir des termes toujours positifs). On a  $x(1-u) \in [0, x] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$ . Donc  $\sin(x(1-u)) \geq 0$  et, puisque  $P_n$  est à coefficients positifs,  $P_n(t) \geq 0$  si  $t \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $f^{(n+1)}(x(1-u)) \geq 0$  et par conséquent  $R_n(x) \geq 0$ . On peut en déduire que  $S_n(x) = f(x) - R_n(x) \leq f(x)$  si  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . La série  $\sum a_n x^n$  est à termes positifs donc la suite  $S_n(x)$  est croissante majorée donc converge.

5/

a/ On a, pour  $x \in [0, \pi/2[$ ,  $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du$ . On veut montrer que cette quantité est croissante par rapport à  $x$ . La dérivée de  $f^{(n+1)}$  est  $f^{(n+2)}$  qui est positive sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . Si  $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ , alors, pour tout  $u \in [0, 1]$ , on a  $x(1-u) \leq y(1-u)$  et  $u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) \leq u^n f^{(n+1)}(y(1-u))$ . En intégrant, on obtient  $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$  et ainsi  $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$ .

La relation est également vraie si  $x = 0$  puisque le reste  $R_n(0)$  est toujours nul.

b/ Puisque  $S_n(y) \geq 0$  et  $f(y) = S_n(y) + R_n(y)$ , on a bien  $R_n(y) \leq f(y)$ .

6/ Par parité, on a  $a_{2k+1} = 0$  si  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in [0, \pi/2[$ , on a  $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ . On fixe  $x \in [0, \pi/2[$ . Il existe  $y$  tel que  $x < y < \frac{\pi}{2}$ . On a alors  $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$  et cette dernière suite tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ , si bien que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$ . Puisque  $f$  est paire et que la somme de la série entière aussi, les deux coïncident sur  $I$ .

7/

a/ Par propriété sur les séries entières, si  $|x| < \frac{\pi}{2}$ , alors  $a_{2k} x^{2k}$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . C'est le cas pour  $x = 1$ .

b/ De même, puisque  $0 \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , on a  $\left(a_{2k} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{2k}\right)$  bornée

c/ On a  $0 \leq \sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$ .

d/

- 1/ a/ On détermine une base de  $F$  : soit  $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ . On a  $P(-X) = P(X)$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $(-1)^k a_k = a_k$  ce qui équivaut à  $a_{2p+1} = 0$  pour tout  $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . On en déduit que  $P \in \text{Vect}(1, X^2, X^4, \dots, X^{2n})$ . Réciproquement les polynômes de cet espace vectoriel sont pairs. On a donc  $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4, \dots, X^{2n})$  (et en plus est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ ). De même  $G = \text{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2n-1})$ . Les sous-espaces vectoriels sont respectivement de dimension  $n+1$  et  $n$ . Pour l'orthogonalité : soient  $P \in F$  et  $Q \in G$ , avec le changement de variable linéaire «  $u = -t$  », on a

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = \int_1^{-1} P(-u)Q(-u)(-du) = -\langle P, Q \rangle$$

ainsi  $\langle P, Q \rangle = 0$  (on peut aussi simplement dire que  $t \mapsto P(t)Q(t)$  est impaire). Les espaces sont orthogonaux, donc en somme directe et les bases de  $F$  et  $G$  proposées forment une base de  $E$  donc  $E = F \oplus G$ .

- b/ Si  $\deg P \leq 2n$  alors d'une part  $\Delta P$  est encore un polynôme;  $\deg P' \leq 2n-1$ ,  $\deg P'' \leq 2n-2$  et  $\deg \Delta(P) \leq 2n$  donc  $\Delta(P) \in E$ . On vérifie la linéarité :

$$\Delta(P + \lambda Q) = (X^2 - 1)(P + \lambda Q)'' + 2X(P + \lambda Q)' = \Delta(P) + \lambda \Delta(Q).$$

- c/ On calcule l'image de  $\Delta(X^k)$ . On sépare les cas  $k=0$  et  $k=1$  car la dérivée seconde est nulle :  $\Delta(1) = 0$ ,  $\Delta(X) = 2X$  et pour  $k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket$ ,  $\Delta(X^k) = (X^2 - 1)k(k-1)X^{k-2} + 2kX.X^{k-1} = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ . La matrice de  $\Delta$  dans la base canonique est triangulaire supérieure. La diagonale est formée des  $2n+1$  réels deux à deux distincts  $k(k+1)$  pour  $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$  (la suite est strictement croissante). Le polynôme caractéristique de  $\Delta$  est  $\prod_{k=0}^{2n} (X - k(k+1))$  est scindé à racines simples donc  $\Delta$  est diagonalisable, admet  $2n+1$  valeurs propres distinctes et simple et chaque espace propre est de dimension 1.

- d/ Chaque espace propre est de dimension 1 et, quitte à diviser par le coefficient dominant, sera engendré par un unique polynôme unitaire. Il reste à prouver que  $P_k$  est de degré  $k$ . Si on note  $P_k = \sum_{i=0}^d a_i X^i$  avec  $a_d \neq 0$  (ou même  $a_d = 1$ ), l'égalité des termes de plus haut degré dans la relation  $\Delta(P_k) = k(k+1)P_k$  donne  $d(d+1) = k(k+1)$ . Par croissance stricte de la suite  $(n(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ , on en déduit que  $d = k$  (ou on factorise :  $d(d+1) - k(k+1) = (d-k)(d+k+1) = 0$  donc  $d = k$ ).

- e/ On intègre par parties pour faire apparaître la symétrie, en remarquant que  $(X^2 - 1)P'' + 2XP' + ((X^2 - 1)P')'$  :

$$\langle \Delta P, Q \rangle = [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt$$

Par symétrie, on a la même relation avec  $\langle P, \Delta Q \rangle$ . L'endomorphisme est donc symétrique, ses espaces propres sont donc deux à deux orthogonaux et les polynômes  $P_k$  sont forment donc une base orthogonale de  $E$ .

- f/ La difficulté est de justifier que les polynômes  $P_{2k}$  sont dans  $F$  et  $P_{2k+1}$  dans  $G$ .

- on passe par les coefficients - c'est un peu long. On note  $P_k = \sum_{i=0}^k a_i X^i$  et on écrit  $\Delta(P_k) = k(k+1)P_k$ . Le terme de degré  $k$  ne donne rien de particulier, celui de degré  $k-1$  donne  $a_{k-1} = 0$ . On obtient alors une relation de récurrence entre  $a_i$  et  $a_{i+2}$  (à écrire proprement pour justifier qu'on peut diviser par le terme qui se retrouve devant  $a_i$ ) pour obtenir que les coefficients  $a_{k-(2j+1)}$  sont tous nuls (il ne reste que des termes de même parité que  $k$ ).
- on a  $(X^2 - 1)P_k'' + 2XP_k' = k(k+1)P_k$ . On note  $Q_k = P_k(-X)$ . On a  $Q_k'(X) = -P_k'(-X)$  et  $Q_k''(X) = P_k''(X)$ . On en déduit que  $Q_k$  vérifie également  $\Delta Q_k = k(k+1)Q_k$ . Le polynôme  $P_k$  est dans l'espace propre associé à la valeur propre  $k(k+1)$  donc est colinéaire à  $P_k$ . Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $P_k(-X) = \alpha P_k(X)$ . Le coefficient dominant donne  $\alpha = (-1)^k$ . On a donc  $P_k$  de même parité que  $k$ . La famille  $(P_0, P_2, \dots, P_{2n})$  est donc une famille libre de  $n+1$  polynômes de  $F$  donc une base. On a de même avec  $G$ .







1/ Soit  $X \in \mathbb{C}^n$  non nul. Le vecteur  $\frac{X}{\|X\|}$  est unitaire donc

$$\left\| A \frac{X}{\|X\|} \right\| = \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \mathcal{N}(A).$$

Cela donne  $\|AX\| \leq \mathcal{N}(A) \|X\|$ . L'inégalité est évidemment vraie si  $X = 0$ .

2/ La boule unité fermée est un fermé borné donc compact. Prouver qu'il existe  $X_0 \in \mathbb{C}^n$ ,  $X_0 \neq 0$ , tel que l'on a  $\mathcal{N}(A) = \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$ .

3/ Pour tout  $X \in \mathbb{C}^n$ ,  $I_n X = X$ . Ainsi  $\mathcal{N}(I_n) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|X\| = 1$ .

4/ Les deux normes  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}_\infty$  sont équivalentes puisque l'espace vectoriel est de dimension finie. Il existe donc deux réels **strictement** positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que l'on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \alpha \mathcal{N}_\infty(A) \leq \mathcal{N}(A) \leq \beta \mathcal{N}_\infty(A)$$

5/ Si  $A \in \mathcal{G}$ , alors  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A - I_n + I_n) \leq \mathcal{N}(A - I_n) + \mathcal{N}(I_n) \leq 2$ . La partie  $A$  est bornée pour  $\mathcal{N}$ .

6/ Soient  $A \in \mathcal{G}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

a/ Par récurrence, on prouve que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k \in \mathcal{G}$  : c'est vrai pour  $k = 0$  et  $k = 1$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  pour lequel  $A^k \in \mathcal{G}$ , alors  $A^{k+1} = A^k \cdot A \in \mathcal{G}$  puisque  $\mathcal{G}, \times$ ) est un groupe. De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le symétrique de  $A^k$  est encore dans  $\mathcal{G}$ . Ainsi,  $A^{-k} \in \mathcal{G}$  si  $k \in \mathbb{N}$ . Finalement, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k \in \mathcal{G}$ .

b/ Si  $\lambda$  est nul alors  $A$  n'est pas inversible donc n'est pas dans  $GL(\mathbb{C})$ . On a  $AX = \lambda X$ . Par récurrence, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p X = \lambda^p X$ . On également  $X = \lambda A^{-1} X$  ou encore  $A^{-1} X = \lambda^{-1} X$ . De nouveau, par récurrence,  $A^{-p} X = \lambda^{-p} X$  si  $p \in \mathbb{N}$ . Finalement, pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $A^p X = \lambda^p X$ .

c/ Puisque  $A^k \in \mathcal{G}$ , on a  $\mathcal{N}(A^k - I_n) \leq 1$ . Ainsi  $\|(A^k - I_n)X\| \leq \mathcal{N}(A^k - I_n) \|X\|$  ce qui donne bien  $\|(A^k - I_n)X\| \leq \|X\|$ . Puisque  $(A^k - I_n)X = A^k X - X = \lambda^k X - X = (\lambda^k - 1)X$ , on a  $\|(A^k - I_n)X\| = |\lambda^k - 1| \|X\| \leq \|X\|$ . Puisque  $\|X\| > 0$ , on obtient  $|\lambda^k - 1| \leq 1$ . Par inégalité triangulaire,  $|\lambda^k| - 1 \leq |\lambda^k - 1| \leq 1$ .

d/ Si  $|\lambda| > 1$  alors la suite  $(|\lambda|^p)_{p \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  ce qui contredit  $|\lambda^p| - 1 \leq 1$ . De même si  $|\lambda| < 1$ , la suite  $(|\lambda|^{-p})_{p \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ . On a donc  $|\lambda| = 1$ .

e/ On doit avoir  $|e^{ik\theta} - 1| \leq 1$ . Notamment,  $|\operatorname{Re}(e^{ik\theta} - 1)| \leq 1$ , ce qui donne  $|\cos(k\theta) - 1| \leq 1$ . Ainsi  $\cos(k\theta) \in [0, 2]$  et, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\cos(k\theta) \geq 0$ .

f/ Puisqu'on a choisi  $\theta \in [-\pi, \pi]$  et que  $\cos(\theta) \geq 0$ , on a  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . On a alors  $2\theta \in [-\pi, \pi]$  et  $\cos(2\theta) \geq 0$  donc  $2\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ , c'est-à-dire  $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ . Par récurrence, on montre que  $\forall q \in \mathbb{N}$ ,  $\theta \in [-\pi/2^q, \pi/2^q]$ . En effet la propriété est vraie pour  $q = 0, 1$  ou  $2$ . Si elle est vraie pour un certain entier  $q$ , alors on a  $2^q \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  et  $\cos(2^q \theta) \geq 0$ , donc  $2^q \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  et ainsi  $\theta \in [-\pi/2^{q+1}, \pi/2^{q+1}]$ .

g/ Par encadrement et passage à la limite, on a donc  $\theta = 0$  et  $\lambda = 1$ . La seule valeur propre possible est donc 1. Puisque  $\operatorname{ch}_A^i$  admet au moins une racine sur  $\mathbb{C}$ , on a bien  $\operatorname{Sp}(A) = \{1\}$ .

7/ a/ La matrice est trigonalisable avec 1 comme seule valeur propre. Elle est donc semblable à une matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $a \neq 0$  sinon elle serait diagonalisable (et même égale à  $I_2$ ).

b/ On a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + aJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $J$  vérifie  $J^2 = 0$  et commute avec  $A$ . Ainsi, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , avec la formule du binôme de Newton, on a

$T^m = I_2 + maJ = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (on peut évidemment le montrer par récurrence en conjecturant l'expression avec les premières puissances). Puisque  $\lim_{m \rightarrow +\infty} |ma| = +\infty$ , il existe un rang  $m_0$  à partir duquel  $\mathcal{N}_\infty(T^m) = m|a|$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}_\infty^f(T^m) = +\infty$ .

c/ Par équivalence des normes,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$ . Pour  $X \neq 0$  dans  $\mathbb{C}^n$ , et  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $n$ , on a  $\|ABX\| \leq \mathcal{N}(A) \|BX\| \leq \mathcal{N}(A) \mathcal{N}(B) \|X\|$ . Ainsi  $\mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A) \mathcal{N}(B)$ . Enfin il existe  $T \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $T = PAP^{-1}$ . On a  $T^m = PA^m P^{-1}$  puis  $\mathcal{N}(T^m) \leq \mathcal{N}(P) \mathcal{N}(A^m) \mathcal{N}(P^{-1})$ . Cela minore  $\mathcal{N}(A^m)$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$ .

d/ Puisque  $\mathcal{G}$  est borné, on obtient une contradiction. Toutes les matrices de  $\mathcal{G}$  sont donc diagonalisables.

e/ Les matrices de  $\mathcal{G}$  sont diagonalisables et la seule valeur propre possible est 1... donc  $\mathcal{G} = \{1\}$ .

1/ a/ Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$  et

$$\forall x \in ]-1, 1[, -\frac{1}{e} \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e} x^n.$$

b/ On a, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$  et

$$S'(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n$$

Par unicité du DSE sur  $] -1, 1[$ ,  $S$  est solution sur  $] -1, 1[$  si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n+1) a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{e}$$

c/ On a  $a_1 - a_0 = -\frac{1}{e}$  ce qui correspond à la formule au rang  $n = 1$ . Si la relation est vérifiée jusqu'au rang  $n$ , alors

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{e(n+1)} = \left( \frac{a_0}{(n+1)!} - \frac{1}{e(n+1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{e(n+1)}$$

et le dernier terme s'écrit également  $-\frac{1}{e(n+1)!} (-1)^n n!$ , soit le terme d'indice  $n$  dans la somme. Par récurrence, le résultat est prouvé.

d/ On majore brutalement en espérant que cela soit suffisant :

$$|a_n| \leq \frac{|a_0|}{n!} + \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} k! \leq |a_0| + \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)! = |a_0| + \frac{1}{en!} n(n-1)! \leq |a_0| + \frac{1}{e}.$$

La suite  $(a_n)$  est bornée. Il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n| \leq M$  et  $|a_n x^n| \leq M|x|^n$ . La série  $\sum a_n x^n$  converge absolument lorsque  $|x| < 1$  donc son rayon de convergence est au moins 1.

2/  $F$  est continue sur  $[1, +\infty[$  (car  $x > -1$  et  $x+t > -1+1 > 0$ ). On a  $F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t})$  et par comparaison  $F$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

3/ Pour tout  $t \geq 1$ ,  $F(t) = \frac{e^{-t}}{t} \frac{1}{1+\frac{x}{t}}$ . Si  $|x| < 1$  alors  $\left| \frac{x}{t} \right| < 1$  (car  $t \geq 1$ ) et ainsi,

$$\forall t \geq 1, F(t) = \frac{e^{-t}}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{t^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} x^n.$$

Il ne reste plus qu'à permuter somme et intégrale. On note, pour  $x$  fixé dans  $] -1, 1[$ ,  $f_n(t) = (-1)^n \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} x^n$ . La série de fonction  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[1, +\infty[$  et sa somme est  $S$  (c'est le début de la question) avec  $S$  continue sur  $[1, +\infty[$ . Chacune des fonctions  $f_n$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (se fait facilement) et

$$\int_1^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} |x|^n dt \leq \left( \int_1^{+\infty} e^{-t} dt \right) |x|^n$$

La série  $\sum \int_1^{+\infty} |f_n(t)| dt$  et on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Cela donne,

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \right) x^n$$

On a bien obtenu un développement en série entière sur  $] -1, 1[$  avec  $b_n = (-1)^n \left( \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \right)$ .

4/ On a deux possibilités pour vérifier que  $f$  est solution de l'équation différentielle de départ :

- avec le DSE mais cela ne répond pas à la question car il n'est valable que sur  $] -1, 1[$  : on calcule  $(n+1)b_{n+1} - b_n$  :

$$\begin{aligned} (n+1)b_{n+1} &= (-1)^{n+1} \left( \int_1^{+\infty} e^{-t} \frac{n+1}{t^{n+2}} dt \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left( \left[ -e^{-t} \frac{1}{t^{n+1}} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{t^{n+1}} dt \right) \\ &= (-1)^{n+1} e^{-1} + (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \\ &= b_n + \frac{(-1)^{n+1}}{e}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{e}$ , ce qui caractérise les solutions de (E) qui sont somme d'une série entière de rayon de convergence 1.

- avec le théorème de dérivation sous le signe somme : soit  $h(x, t) = \frac{e^{-t}}{t+x}$  pour  $x > -1$  et  $t \geq 1$ . La fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[ \times [1, +\infty[$  (on récupère ainsi toutes les hypothèses de régularité par rapport à chaque variable), pour tout  $x > -1$ ,  $h(x, \cdot)$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$$

et si  $a > -1$ , pour  $x \geq a$  et  $t \geq 1$ , on a  $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-t}}{(t+a)^2} = \varphi(t)$ . La fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (même chose que  $F$ ). On a donc  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$  avec

$$\forall x > -1, f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t+x)^2} dt.$$

On a alors, pour  $x > -1$ , par intégration par parties,

$$f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t+x)^2} dt = \left[ e^{-t} \frac{1}{t+x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt = f(x) - \frac{e^{-1}}{x+1}.$$

On a donc pour tout  $x > -1$ ,  $f'(x) - f(x) = -\frac{1}{e(x+1)}$ .

- On a ainsi,  $b_{n+1} = \frac{b_0}{(n+1)!} - \frac{1}{e(n+1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k k!$  avec  $b_p = (-1)^p \left( \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{p+1}} dt \right)$ . On obtient

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k! = eb_0 - e(n+1)!b_{n+1} = eI_1 + (-1)^n e(n+1)!I_{p+2}$$

si on note  $I_p = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^p} dt$ .

- 1/ On a  $E_{r,t} \times E_{u,v} = \delta_{t,u} E_{r,v}$ . En effet, tous les termes en ligne différente de  $r$  et colonne différente de  $v$  sont directement nuls. Il reste le coefficient en position  $(r, v)$ . Il vaut

$$\sum_{k=1}^n E_{rt}[r, k] E_{uv}[k, v] = \sum_{k=1}^n \delta_{kt} \delta_{kv}.$$

Il est différent de 0 si et seulement si  $k = t$  et  $k = v$ , ce qui n'est possible que si  $t = v$ , et dans ce cas il vaut 1.

- 2/  $H$  étant un hyperplan, toute matrice qui n'est pas dans  $H$  permet de définir une droite supplémentaire :  $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$ . En effet, la somme est bien directe car si  $M \in H \oplus \text{Vect}(T)$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $M = \lambda T$  et  $M \in H$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $T = \frac{1}{\lambda} M \in H$  ce qui donne une contradiction. On a alors  $\dim(H \oplus \text{Vect}(T)) = \dim H + \dim T = n^2 - 1 + 1 = \dim E_n$ . Puisque  $H \oplus \text{Vect}(T) \subset E_n$ , on a l'égalité entre les deux espaces vectoriels.
- 3/ On a  $E_{ij}^2 = E_{ij} E_{ij} = \delta_{ij} E_{ij}$ . Si  $i \neq j$  alors  $E_{ij}^2 = 0$  donc la matrice est nilpotente. Si  $i = j$ , alors  $E_{ii}^2 = E_{ii}$  et par récurrence simple,  $E_{ii}^p = E_{ii}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ . La matrice  $E_{ij}$  est nilpotente si et seulement si  $i \neq j$ .
- 4/ Si  $N$  est une matrice nilpotente d'indice  $r$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X$  un vecteur colonne non nul tel que  $NX = \lambda X$ , alors  $N^2 X = N(NX) = N(\lambda X) = \lambda^2 X$  et par récurrence,  $N^r X = \lambda^r X$ . Or  $N^r = 0$  donc  $\lambda^r = 0$  et  $\lambda = 0$ .
- 5/ On écrit la matrice  $U$  :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a plusieurs méthode pour prouver que  $U$  est inversible :

- On calcule son déterminant : on ajoute les colonnes en première colonne, cela permet de factoriser par  $n-1$  et obtenir une colonne de 1 qu'on peut soustraire aux autres colonnes et obtenir une matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & \ddots & (1) & \vdots \\ n-1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}$$

- On résout le système  $UX = 0$  pour déterminer le noyau de  $U$ . On note  $x_1, \dots, x_n$  les coefficients de  $X$ . En soustrayant les lignes deux à deux :  $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$  pour  $i$  allant de 2 à  $n$ , on obtient  $x_1 = \dots = x_n$ . En remplace dans la première équation pour obtenir  $(n-1)x_1 = 0$  et ainsi  $X = 0$ .
  - On a  $U^2 = (n-2)U + (n-1)I_n$ . Cela donne  $U^2 - (n-2)U = (n-1)I_n$  et  $U \left( \frac{1}{n-1} (U - (n-2)I_n) \right) = I_n$ . On en déduit que  $U$  est inversible (on a même son inverse).
- 6/ a/ Puisque  $I_n \notin H$ , on a  $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$ . Si  $N \in E_n$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A \in H$  tels que  $N = A + \alpha I_n$ .
- b/ La matrice  $A$  est dans  $H$  donc est non inversible. Il existe donc  $X \neq 0$  tel que  $AX = 0$ . On a alors  $NX = \alpha X$  et d'après une question précédente, cela donne  $\alpha = 0$ . On a donc  $N = A$  et  $N$  est dans  $H$ .
- c/ Notamment toutes les matrices  $E_{ij}$  pour  $i \neq j$  sont dans  $H$ . Puisque  $H$  est un sous-espace vectoriel, la matrice  $U$  est dans  $H$ . Cette matrice étant inversible, on obtient une contradiction.
- 7/ Pour  $n = 2$ , l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un espace vectoriel de dimension 3 et stable par produit. C'est donc un hyperplan de matrices stable par produit.
- 8/ a/ Si  $M \in E_n$ , on peut écrire  $M = A + \alpha I_n$  avec  $A \in H$  et alors  $p(M) = \alpha I_n$ . On note alors  $\alpha_M$  le scalaire tel que  $p(M) = \alpha_M I_n$ . Si  $M = A + p(M)$  et  $N = B + p(N)$ . On a  $MN = (A + \alpha_M I_n)(B + \alpha_N I_n) = (AB + \alpha_M B + \alpha_N A) + (\alpha_N \alpha_M) I_n$ . Puisque  $H$  est stable par produit  $AB \in H$ . Puisque  $H$  est un sous-espace vectoriel,  $AB + \alpha_M B + \alpha_N A \in H$ . On a donc la décomposition de  $MN$  dans  $H \oplus \text{Vect}(I_n)$ . Ainsi  $p(MN) = (\alpha_N \alpha_M) I_n = p(M)p(N)$ .
- b/ On a  $M \in H$  si et seulement si  $p(M) = 0_E$ . Si  $M^2 \in H$  alors  $p(M^2) = 0 = p(M)^2$ . Si  $p(M) = \alpha_M I_n$ , on a donc  $\alpha_M^2 = 0$  et  $\alpha = 0$ . On a donc  $p(M) = 0$  et  $M \in H$ .
- c/ Si  $i \neq j$ , alors  $E_{ij}^2 = 0 \in H$  donc  $E_{ij} \in H$ . On a alors  $E_{ii} = E_{ij} E_{ji} \in H$  puisque  $H$  est stable par produit. Finalement, pour tout  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $E_{ij} \in H$ .
- d/  $H$  contient une base de  $E_n$  et finalement  $H = E_n$  n'est pas un hyperplan. On en déduit que  $I_n \in H$ .
- 9/ a/ On sait que  $H^\perp$  est un sous-espace vectoriel. De plus  $E_n$  étant de dimension finie, on a  $H \oplus H^\perp = E_n$  et  $\dim H^\perp = 1$ .
- b/ Pour tout  $M \in H$ ,  $(AB^T | M) = \text{tr}(BA^T M) = \text{tr}(A^T MB) = (A | MB) = 0$  puisque  $MB$  est encore dans  $H$  et  $A$  dans  $H^\perp$ . On a bien  $AB^T \in H^\perp$ . Puisque  $H^\perp$  est une droite vectorielle dirigée par  $A$ , la matrice  $AB^T$  est colinéaire à  $A$ . Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $AB^T = \lambda A$  et ainsi  $BA^T = \lambda A^T$ .

- c/ Supposons que la matrice  $A^T$  soit inversible. Pour  $B \in H$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $BA^T = \lambda A^T$  donc  $B = \lambda I_n$ . Cela signifierait que toute matrice de  $H$  est colinéaire à  $I_n$  donc  $H \subset \text{Vect}(I_n)$  et  $\dim H \leq 1$ , ce qui est faux.
- d/ Soit  $Y \in W$ . Il existe  $X \in E_n$  tel que  $Y = A^T X$ . Pour  $B \in W$ , on a  $BY = BA^T X$ . Or il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $BA^T = \lambda A^T$ . On a donc  $BY = A^T(\lambda X) \in \text{Im } A^T$ . Le sous-espace  $W$  est stable par tous les éléments de  $H$ .
- e/ D'une part l'application  $\varphi_P$  est linéaire puisque  $\varphi_P(M + \lambda N) = P(M + \lambda N)P^{-1} = PMP^{-1} + \lambda PNP^{-1}$  et ainsi  $\varphi_P(M + \lambda N) = \varphi_P(M) + \lambda \varphi_P(N)$ . De plus elle est bijective car  $\varphi_P(M) = 0 = PMP^{-1}$  équivaut, puisqu'on peut multiplier par les matrices inversibles  $P$  et  $P^{-1}$ , à  $M = 0$ . Ainsi  $\varphi_P$  est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc est bijective (on peut aussi montrer que  $\varphi_P \circ \varphi_{P^{-1}} = \varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P = \text{Id}_{E_n}$ ).
- f/ Si  $u$  est l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice  $B \in H$ , alors  $\varphi_P(B)$  est la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ . Puisque  $W$  est stable par  $B$ , alors  $\varphi_P(B)$  est sous la forme

$$\varphi_P(B) = \begin{pmatrix} C_p & D \\ 0_{n-p,p} & E \end{pmatrix}$$

avec  $C_p \in M_p(\mathbb{R})$ ,  $D \in M_{p,n-p}(\mathbb{R})$  et  $E \in M_{n-p}$ . On a  $\varphi_P(H)$  qui est donc dans l'ensemble des matrices de cette forme, qui est un espace vectoriel de dimension  $n^2 - p(n-p)$  (on a  $p(n-p)$  coefficients à 0). On en déduit que  $\dim \varphi_P(H) \leq n^2 - p(n-p)$ . Puisque  $\varphi_P$  est un automorphisme,  $\dim \varphi_P(H) = \dim H$ . On obtient le résultat demandé.

- 10/  $p(n-p)$  s'annule pour  $p = 0$  ou  $n$  et est supérieur à  $n-1$  si  $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  (fonction du second degré). Puisque  $A^T$  est non inversible et non nulle, son rang  $p$  est dans  $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ . On a donc  $\dim H \leq n^2 - n + 1$ . Si  $n \geq 3$ , on a  $\dim H \leq n^2 - 2$  donc  $H$  n'est pas un hyperplan.

- 1/ a/ Le terme  $a_{ij}$  est la composante du vecteur  $u(e_j)$  sur le vecteur  $e_i$  : on a  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ . Puisque la base est orthonormée, on a  $\langle u(e_j), e_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_k, e_i \rangle = a_{ij}$ .
- b/ En utilisant (1), on a  $\langle u(e_j), e_j \rangle = -\langle e_j, u(e_i) \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$ , c'est-à-dire  $a_{ij} = -a_{ji}$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On a donc  $A^T = -A$ .
- 2/ De la relation  $A^T = -A$ , on obtient  $\det(A^T) = \det(-A)$ . Puisque  $\det(A^T) = \det(A)$  et  $\det(-A) = (-1)^n \det A$ , il vient  $\det(A) = (-1)^n \det A$ . La matrice  $A$  est inversible car  $u$  est un automorphisme et ainsi  $(-1)^n = 1$ . On a donc  $n$  pair.
- 3/ On peut le faire matriciellement ou à partir des produits scalaires :
- On note  $B$  la matrice de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a  $B = A^2$  et ainsi  $B^T = (A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2 = B$ . La matrice  $B$  est symétrique, l'endomorphisme  $v$  est symétrique donc il est diagonalisable dans une base orthonormée
  - pour tout  $x, y \in E$ ,  $\langle v(x), y \rangle = \langle u(u(x)), y \rangle = -\langle u(x), u(y) \rangle = (-1)^2 \langle x, u^2(y) \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ . L'endomorphisme  $v$  est autoadjoint donc diagonalisable dans une base orthonormée.
- 4/ Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $v$  et  $x$  un vecteur propre associé (donc  $x \neq 0$ ). On a alors

$$v(x) = \lambda x \text{ et } \langle v(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \langle u^2(x), x \rangle = -\langle u(x), u(x) \rangle$$

ce qui donne  $\lambda \|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$ . Puisque  $u$  est inversible,  $u(x)$  est non nul donc  $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} < 0$ .

- 5/ a/ On a  $F = \text{Vect}(x, u(x))$  de dimension 1 ou 2. Si  $(x, u(x))$  est liée, alors, puisque  $x \neq 0$ , on aurait un réel  $\alpha$  tel que  $u(x) = \alpha x$  puis  $u^2(x) = \alpha^2 x$  donc  $\alpha^2$  serait une valeur propre positive ou nulle de  $v$  ce qui est impossible. L'espace  $F$  est donc un plan vectoriel et  $\dim F = 2$ .
- b/ L'image de  $x$  et  $u(x) \in F$  et celle de  $u(x)$  est  $u^2(x) = v(x) = \lambda x \in F$ . Par combinaison linéaire, l'image de tout vecteur de  $F$  est dans  $F$ . L'espace  $F$  est stable par  $u$  donc  $F^\perp$  est stable par  $u^* = -u$  donc par  $u$ .
- c/ • Les vecteurs  $e'_1$  et  $e'_2$  sont dans  $F$ .
- Le vecteur  $e'_1$  est unitaire et on a  $u(e'_1) = \frac{1}{\|x\|} u(x) = a e'_2$ .
  - Le vecteur  $e'_2$  est également unitaire :

$$\|e'_2\|^2 = \langle e'_2, e'_2 \rangle = \frac{1}{a^2 \|x\|^2} \langle u(x), u(x) \rangle = -\frac{1}{a^2 \|x\|^2} \langle u^2(x), x \rangle = \frac{1}{\lambda \|x\|^2} \langle \lambda x, x \rangle = 1$$

$$\text{De plus } u(e'_2) = \frac{1}{a \|x\|} u^2(x) = \frac{\lambda}{a \|x\|} x = -\frac{a^2}{a \|x\|} x = -a e'_1.$$

- les vecteurs sont orthogonaux :

$$\langle e'_1, e'_2 \rangle = \frac{1}{a \|x\|^2} \langle x, u(x) \rangle$$

$$\text{Or } \langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle \text{ donc } \langle u(x), x \rangle = 0$$

On a donc une base orthonormée de  $F$ ,  $u(e'_1) = a e'_2$ ,  $u(e'_2) = -a e'_1$  donc la matrice de  $u_F$  dans cette base orthonormée est  $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ .

- d/ pour tout  $x, y \in E$ , on a  $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$  donc la relation est vraie pour  $x, y \in F^\perp$  et alors  $u(x) = u_{F^\perp}(x)$  et de même pour  $y$ . Enfin si  $x \in \ker u_{F^\perp}$  alors  $u_{F^\perp}(x) = u(x) = 0$  donc  $x \in \ker u$  et  $x = 0$ . On peut en conclure que  $u_{F^\perp}$  est un automorphisme de  $F^\perp$  qui vérifie la relation (1).

- 6/ On se donne  $u$  vérifiant 1. On considère  $v^2$  qui admet une valeur propre strictement négative et on fait la construction de la question précédente. On a un plan  $F$  et une base orthonormée  $(e'_1, e'_2)$  de  $F$  dans laquelle l'endomorphisme induit a une matrice antisymétrique  $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$  pour un certain réel  $\alpha$ . On note  $G = F^\perp$ . L'espace vectoriel  $G$  est de dimension 2, stable par  $u$  et l'endomorphisme  $w$  induit par  $u$  sur  $G$  vérifie 1. On refait de même avec  $w$ . On a une base orthonormée  $(e'_3, e'_4)$  de  $G$  dans laquelle ma matrice de  $w$  est  $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$  pour un certain  $\beta \in \mathbb{R}$ . Puisque  $F$  et  $G$  sont des supplémentaires orthogonaux, la base  $\mathcal{B}'' = (e'_1, \dots, e'_4)$  est une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est celle proposée.