CCP 2025 - I - Exercice 1 - Corrigé *(Connexité, fonctions vectorielles)*

1/ Soit une application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier que $f'(]-1,1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

2/ On considère l'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si} \quad t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \in]0,1[\end{cases}$$

On note pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

a/ Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $]-1,1[$. Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in]-1,0]$ et pour tout $t \in]0,1[$.

b/ Démontrer que $\forall t \in]0,1[, \left\|f'(t)\right\|_2 \geqslant 1$ et en déduire que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
On pourra tracer la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ et on acceptera un dessin pertinent comme preuve.

CCP 2025 - I - Exercice 2 *(Extremum d'une fonction de deux variables)*

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2$. On se propose de déterminer le réel $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ par deux méthodes différentes.

1/ Déterminer le seul point critique de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer à l'aide d'une matrice Hessienne que f admet en ce point un minimum local. En admettant que ce minimum est global, donner la valeur du $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

2/ Sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, on note le produit scalaire canonique par $\langle\ ,\ \rangle$ et sa norme associée par $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
On note $a = (2,1,1)$, $u = (1,1,2)$, $v = (1,0,1)$ et $F = \text{Vect}\{u,v\}$.
On note $b \in F$ le projeté orthogonal du vecteur a sur le sous-espace vectoriel F. Justifier que $\langle a-b,u\rangle = \langle a-b,v\rangle = 0$ et en déduire le vecteur b. Déterminer la valeur de $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

CCP 2025 - II - Exercice 1 - Corrigé *(Matrices symétriques positives)*

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On se donne des réels strictement positifs notés $x_1, \ldots, x_n$ et on pose :

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

On désigne par $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre n.

1/ Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$$

2/ En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

3/ Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4/ Dans cette question B désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer l'inégalité :

$$(\det(B))^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{tr}(B)$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si, $B \in \text{Vect}(I_n)$.
Désormais $A = \left(a_{i,j}\right)$ désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

5/ Démontrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ on a : $a_{i,i} > 0$.

6/ On pose $D = \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ et $B = DAD$. Démontrer que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et en déduire que :

$$\det(A) \leqslant a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n},$$

avec égalité si, et seulement si, A est diagonale.

CCP 2025 - II - Exercice 2 - Corrigé *(Produit scalaire, intégration, trigonométrie)*

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1, P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1/ Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

2/ Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

3/ Justifier la convergence de cette intégrale.

4/ Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

5/ Calculer pour n et m entiers naturels, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta$.

6/ Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

CCP 2024 - I - Exercice 1 - corrigé *(Probabilités)*

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

1/ Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k-1)$ et de $P(X > k)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel $k, P(X \leq k)$, puis donner la loi de X.

3/ Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la Q1., déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

CCP 2024 - I - Exercice 2 - corrigé *(Équations différentielles, séries entières)*

On considère les équations différentielles :

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right)y = 1$$
$$(H) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right)y = 0$$

On note $I =]0,+\infty[, S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur / et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

1/ Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

2/ Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur / développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $x \in I, f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.

3/ On note pour $x \in I, g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x^2}$. On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$. Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

4/ Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

CCP 2024 - II - Exercice 1 - corrigé *(Réduction)*

1/ Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2/ Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

CCP 2024 - II - Exercice 2 - corrigé *(Série de fonctions, intégration)*

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ de la variable réelle et on note f sa somme.

1/ Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2/ Démontrer que f est continue sur D.

3/ Calculer la limite de f en $+\infty$.

4/ Démontrer que, pour tout $x \in D$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

5/ En déduire un équivalent de f au voisinage de 0 .

CCP 2023 - I - Exercice 1 - corrigé *(Norme, norme subordonnée, matrices)*

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. Pour toute matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$

1/ Démontrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. On munit l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, par :

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

On note S la sphère unité définie par : $S = \left\{x \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|x\|_\infty = 1\right\}$.

2/ Démontrer que $\forall X \in S, \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A)$. En déduire, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\sup_{X\in S} \|AX\|_\infty$. On pose alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |||A||| = \sup_{X\in S} \|AX\|_\infty$.

3/ Démontrer que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant |||A||| \, \|X\|_\infty$.

4/ Démontrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |||A||| = N(A)$.

5/ Application. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $|||A|||$.

CCP 2023 - I - Exercice 2 - corrigé *(Extrema, réduction)*

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1/ Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2/ Démontrer que f possède un unique point critique $\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$.

3/ À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en $\left(x_0, y_0\right)$. Est-ce un minimum ou un maximum ?

CCP 2023 - II - Exercice 1 - corrigé *(Espaces préhilbertiens (projection, distance))*

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Dans cet exercice on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n!$.

1/ Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P,Q) de polynômes de E

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

2/ Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F\left(X^2\right)$.

3/ Justifier que $\left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(x^2 - ax - b\right)^2 e^{-x}\mathrm{d}x$$

CCP 2023 - II - Exercice 2 - corrigé *(Probabilités)*

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1-p$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$.

1/ Pour tout couple (m,n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z=m)\cap(T=n))$ en distinguant trois cas : $m>n, m<n$ et $m=n$.

2/ En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

CCP 2022 - II - Exercice 1 *(Déterminants, polynômes)*

Pour n entier, $n \geq 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ par :

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}\left(x_j - x_i\right)$.

1/ Calculer $V(x_1,x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

2/ On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que $V(x_1,x_2\ldots,x_n) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}\left(x_j - x_i\right)$.

3/ Première application : calculer le déterminant de la matrice $A = \left(i^j\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1,2,\ldots,n)$.

4/ Deuxième application : donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.

Soit n nombre complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle. On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

CCP 2022 - II - Exercice 2 *(EVN, différentiabilité)*

Dans cet exercice, $\|\cdot\|$ désigne une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A,B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

1/ Démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.

2/ Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3/ Si $H \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r>0$, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers 0. En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0. On précisera sa différentielle en 0.

CCP 2021 - I - Exercice 1 - corrigé *(intégration terme à terme)*

On note f la fonction définie sur $]\,0,1[$ par :

$$f(t)=\frac{\ln t}{t^2-1}$$

1/ Soit $k\in\mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k=\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t$$

2/ Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1\,[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

CCP 2021 - I - exercice 2 - corrigé *(convexité, extrema)*

1/ Justifier que la fonction ln est concave sur $]\,0,+\infty\,[$ et en déduire que :

$$\forall(a,b,c)\in]0,+\infty\left[^3,\quad \sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}.\right.$$

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty\left[^2\right.$ par :

$$f(x;y)=x+y+\frac{1}{xy}.$$

2/ Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty\left[^2\right.$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

CCP 2020 - II - Exercice 1 - corrigé *(réduction)*

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

1/ Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P\in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A=PDP^{-1}$.

2/ Déterminer une matrice B de $M_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2=A$.

3/ Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P.

4/ Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

CCP 2020 - II - Exercice 2 - corrigé *(réduction, topologie)*

On considère l'espace vectoriel normé $m_n(\mathbb{R})$. On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{m}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $m_n(\mathbb{R})$.

1/ L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $M_n(\mathbb{R})$?

2/ Démontrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.

3/ Soit M un élément de $M_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

4/ Application Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique. À l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

5/ Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

CCP 2019 - I - Exercice 1 *(intégration terme à terme)*

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$.

Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

CCP 2019 - I - Exercice 2 - corrigé *(probabilités)*

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1/ Démontrer que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E\left(t^X\right)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

2/ Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0 , deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[, G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

CCP 2019 - II - Exercice 2 - corrigé *(espaces euclidiens)*

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ On note $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

1/ Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur $x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2/ Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, \left\langle u(x), y \right\rangle = \left\langle x, v(y) \right\rangle$. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a/ $u \circ v = v \circ u$

b/ $\forall (x, y) \in E^2, \left\langle u(x), u(y) \right\rangle = \left\langle v(x), v(y) \right\rangle$

c/ $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications : a ⇒ b, b ⇒ c, c ⇒ b et b ⇒ a.

CCP 2018 - II - Exercice 1 - corrigé *(espaces préhilbertiens)*

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

1/ Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

2/ On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$, déterminer une base orthonormée de F.

3/ Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \mathrm{d}t\right].$$

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

CCP 2018 - II - Exercice 2 *(probabilités)*

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

1/ Question préliminaire : soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda}{n}$. Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}\right] = 1$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0{,}01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

2/ Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP n candidats tous nés en 1998 . On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

3/ Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0,6}$.

CCP 2017 - I - Exercice 1 - corrigé *(plusieurs variables)*

On définit deux fonctions :

- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \sin\left(x^2 - y^2\right)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1/ Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x,y).

2/ Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f\circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

 a/ en calculant $f \circ g$;

 b/ en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

CCP 2017 - I - Exercice 2 - corrigé *(Familles sommables)*

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1/ Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

2/ Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

CCP 2016 - *(Équations différentielles)*

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + \left(x^2 - x\right) y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[\,(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

CCP 2016 - *(probabilités)*

1/ Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

2/ Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}\left(X = i, Y = j\right) = \mathbb{P}\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

a/ Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

b/ Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

c/ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

CCP 2016 - *(réduction)*

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Dans cet exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1/ Démontrer que les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.

2/ Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3/ Démontrer que si A est inversible alors $\det(A) = 1$.

CCP 2015 - *(Probabilités)*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance

---

CCP 2015 - - corrigé *(Intégration)*

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1/ Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$?

2/ Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

3/ Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty}\left|f_n(x)\right|\mathrm{d}x\right)$.

CCP 2015 - *(Produits scalaires)*

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $(A \mid B) = \mathrm{trace}\left({}^tAB\right)$.

1/ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $\left(A \mid A'\right)$?

2/ On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.

3/ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.

CCP 2014 - I - Exercice 2 - corrigé *(Équations différentielles)*

---

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E) : x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $J = \mathbb{R}_-^*$. Le but de l'exercice est d'étudier la dimension de S, espace vectoriel des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

1/ Donner la dimension des espaces vectoriels S^+ et S^-.

2/ On note φ l'application de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J la restriction de f à J. Donner le noyau de l'application φ. Justifier que φ est linéaire et montrer que $\dim S \leqslant 4$.

3/ Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : x^2 y'' + x y' = 0.$$

Déterminer S^+ et S^-.. Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S.

4/ Dans cette question $(E) : x^2 y'' - 6x y' + 12 y = 0$. Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme x^α (α réel). En déduire $S+$ et S^-. Déterminer S et donner sa dimension.

5/ En s'inspirant de la question précédente, donner une équation pour laquelle $\dim S = 0$ (sans justifier tout le raisonnement).

CCP 2014 - II - Exercice 1 - corrigé *(Suites, réduction)*

Soit les suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{rclclcl} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1).$$

1/ a/ Justifier sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

b/ Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c/ Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser la calculatrice.

2/ Expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de n.

CCP 2014 - II - Exercice 2 - corrigé *(Algèbre linéaire, réduction)*

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

1/ Soit p un projecteur de E.

a/ Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E.

b/ En déduire que la trace de p (notée $\operatorname{tr}(p)$) est égale au rang de p (noté $\operatorname{rg}(p)$).

c/ Un endomorphisme u de E vérifiant $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{rg}(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

2/ Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

3/ Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a/ Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

b/ Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

c/ On suppose que $\mathrm{tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

d/ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

CCP 2013 - I - Exercice 2 - corrigé *(Équations différentielles)*

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1/ . On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente. En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice e^{tA}.

2/ En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

CCP 2013 - *(Produits scalaires)*

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $(A \mid B) = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$.

1/ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $\left(A \mid A'\right)$?

2/ On note $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.

3/ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.

CCP 2012 - *(Normes)*

On note E l'espace vectoriel des applications de classe C^1 définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$$

1/ Démontrer que $\|\,\|$ définit une norme sur E. De même, $\|\,\|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.

2/ a/ Donner la définition de deux normes équivalentes.

b/ Démontrer que les deux normes $\|\,\|$ et $\|\,\|'$ sont équivalentes sur E.

3/ Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\,\|$?

CCP 2012 - *(Intégrale à paramètre)*

1/ Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J.

On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$.

Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I.

2/ On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Démontrer que la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.

3/ On pose, pour tout $x \in \left[0,+\infty\right[$, $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-xt}\mathrm{d}t$. Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$. La fonction f_2 est-elle continue sur $[0,+\infty[$? Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

CCP 2012 - *(Arithmétique)*

1/ Déterminer le plus petit entier naturel non nul p tel que $3^p \equiv 1$ modulo 11 .

2/ En utilisant des congruences modulo 11, démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

CCP 2011 - *(Séries entières)*

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.

1/ Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2/ On note S la fonction somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R,R[$.

3/ Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

CCP 2012 - *(Équation différentielle)*

On considère l'équation différentielle (E) $\quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1/ Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.

2/ Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

CCP 2011 - II - Exercice 1 - Corrigé *(Matrices)*

Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\right\}$ le commutant de la matrice A.

1/ Démontrer que pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un espace vectoriel.

2/ Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P.

3/ Déterminer le commutant $C(T)$ de la matrice T. Déterminer sa dimension.

4/ Démontrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire pour la dimension de $C(A)$?

5/ a/ Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?

b/ Démontrer alors que $C(A) = \text{Vect}\{I_3, A, A^2\}$.

c/ En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A. Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

CCP 2011 - *(Plusieurs variables)*

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1/ Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ que l'on déterminera.

2/ Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

CCP 2011 - *(Topologie)*

1/ Rappeler la définition (par les suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2/ Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application continue de E dans F. Si A est une partie compacte de E, démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F. L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E ?

Corrections

CCP 2025 - I - Exercice 1 Solution

1/ la fonction f' est continue sur $]-1,1[$ et $]-1,1[$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ donc son image par f' est connexe par arcs.

2/ a/ Pour $t \neq 0$, on a
$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \left(t\sin\frac{1}{t}, t\cos\frac{1}{t}\right)$$
et par majoration en valeur absolue par $|t|$, chaque composante tend vers 0 lorsque t tend vers 0. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = (0,0)$.
Pour $t \neq 0$, on peut dériver f par les règles usuelles de calcul algébrique :
$$f'(t) = \left(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}, 2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\right)$$

b/ On calcule la norme au carrée :
$$\left\|f'(t)\right\|^2 = 4t^2\left(\cos^2\frac{1}{t} + \sin^2\frac{1}{t}\right) + \left(\cos^2\frac{1}{t} + \sin^2\frac{1}{t}\right) = 1 + 4t^2 \geqslant 1$$
les « doubles produits » se simplifiant. Le calcul est identique pour $t \in]-1,0[$.
Si $f'(]-1,1[)$ était connexe par arcs, alors il existerait un chemin continue dans $f'(]-1,1[)$ qui relierait $f'(0) = (0,0)$ à $f'(\frac{1}{2})$ (par exemple). Par continuité de l'application norme, $\left\|f'\right\|(]-1,1[)$ serait aussi un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et devrait contenir tout le segment $[0, \left\|f'(1/2)\right\|]$ donc notamment $[0,1]$. C'est impossible car il n'y a aucun point de $]-1,1[$ pour lequel $\left\|f'\right\|(t) = \frac{1}{2}$.

CCP 2025 - I - Exercice 2 Solution

CCP 2025 - II - Exercice 1 Solution

1/ On utilise la concavité du logarithme pour justifier que, pour tout $t > 0$, $\ln t \leqslant t-1$ (tangente à la courbe en $t = 1$). Ainsi, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \frac{x_k}{m} - 1$, puis on somme ces relations.

2/ Cette inégalité revient à montrer, en composant par le logarithme, fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln x_k \leqslant \ln m$$
ou encore $\sum_{k=1}^{n}\ln x_k \leqslant n\ln m$, qui revient à $\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x_k}{m} \leqslant 0$. L'inégalité de la question précédente donne
$$\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x_k}{m} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k - n = \frac{nm}{m} - n = 0$$
ce qui donne le résultat. Le cas d'égalité revient à dire que $\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x_k}{m} = 0$. Comme tous les termes de la somme sont négatifs, cela revient à dire qu'ils sont tous nuls donc que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\frac{x_k}{m} = 1$ soit $x_k = m$. Les termes sont donc tous égaux. Réciproquement, si tous les x_k sont égaux à un réel x, chaque terme de l'inégalité vaut x et on se retrouve dans un cas d'égalité.

3/ On note $x_1,\dots,x_n$ des réels strictement positifs et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $B = PDP^T$ avec D diagonale de diagonale $x_1?\dots,x_n$. On a $(\det B)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^n$ et $\frac{1}{n}\operatorname{tr}B = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$. L'inégalité demandée est donc vérifiée. De plus on a égalité si et seulement si tous les termes x_k sont égaux donc s'il existe $m > 0$ tel que $D = mI_n$. On a alors $B = PDP^T = mI_n$. Donc on a égalité si et seulemetn si $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$ (toujours avec $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

4/ On a $a_{ii} = E_i^T A E_i$ si E_i est le vecteur de la base canonique avec un 1 en ligne i (et des 0 ailleurs). Puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $a_{ii} > 0$ ($E_i \neq 0$).

5/ On a facilement que $B^T = B$. Si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est non nul, alors
$$X^T BX = (DX)^T A(DX) > 0$$
car A est symétrique définie positive et $Y = DX$ est non nul (D est inversible, $X \neq 0$). Ainsi $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Le terme général de B est $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}$. Notamment $b_{ii} = 1$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. On applique l'inégalité sur trace et déterminant de B, qui donne $\det B_l eqslant t1$. Puisque $\underset{=}{B}\frac{\det A}{(\det D)^2}$, on a $\det A \leqslant (\det D)^2 = \prod_{i=1}^{n}a_{ii}$. Le cas d'égalité a lieu lorsque $\det B = 1$, c'est-à-dire lorsque B est dans le cas d'égalité de l'inégalité des premières questions. Cela donne $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$. Sachant que ses termes diagonaux valent 1, cela donne $B = I_n$ et finalement $A = (D^{-1})^2$: A est une matrice diagonale (on peut toujours dire que réciproquement, si A est diagonale alors $\det A$ est le produit de ses éléments diagonaux).

1/ On a $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$. On conjecture que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1}, sauf si $n = 0$. On montre cette propriété par récurrence sur $n \geqslant 1$. La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Soit $n \geqslant 2$ pour lequel, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k est de degré k, et de terme dominant 2^{k-1}. Alors $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$. Le polynôme P_{n-1} est de degré $n-1$ et $2XP_n$ de degré $n+1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$. Puisque $P_n = 2^{n-1}X^n + Q_n$ avec $\deg Q_n < n$, on a $2XP_n = 2^n X^{n+1} + \tilde{Q}$ avec $\deg \tilde{Q} < n+1$ et $P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R$ avec $\deg R \leqslant n$. Ainsi le terme dominant est bien 2^n.

2/ La propriété « $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ » est immédiate pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel elle est vraie jusqu'à l'entier n, alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos(n-1)\theta = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta).$$

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3/ On se donne P et Q. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue est bornée sur $[-1,1]$ et il existe M tel que, pour tout $t \in [-1,1]$, $|PQ(t)| \leqslant$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, majorée par $\dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}$.
- on a $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1+t}\sqrt{1-t} \underset{t\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-t}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-t)^{1/2}}$. Puisque $\frac{1}{2} > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$ est intégrable sur $[0,1[$ et il en est de même pour $t \mapsto \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}$.
- De même $\dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to -1^+}{\sim} \dfrac{M/\sqrt{2}}{(1+t)^{1/2}}$ est intégrable sur $]-1,0]$.

On en déduit par comparaison l'existence de l'intégrale demandée.

Remarque : par linéarité, on peut justifier l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ça évite la majoration).

4/ L'existence vient d'être prouvée et l'application est à valeurs réelles. On a la linéarité à gauche par linéarité de l'intégrale (et l'existence de toutes les intégrales qui apparaissent). La symétrie est immédiate. Pour $P \in \mathbb{R}_k[X]$, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \geqslant 0$$

et, puisque la fonction intégrée est continue et positive sur $]-1,1[$, si $\langle P,P\rangle = 0$ alors, pour tout $t \in]-1,1[$, $\dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$. Ainsi $P(t)$ est nul pour tout $t \in]-1,1[$ et $P = 0$ puisqu'il admet une infinité de racines.
On a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$

5/ on distingue plusieurs cas :

- si $m = n = 0$ alors l'intégrale vaut π.
- si $m = n \geqslant 1$,
$$\int_0^{\pi} \cos^2(nt)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2nt)}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_0^{p} i = \frac{\pi}{2}$$
- si $m \neq n$, alors par linéarisation,

$$\int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)t}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0$$

6/ l'application $u \in [0,\pi] \mapsto \cos u \in [-1,1]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective. On peut donc effecteur le changement de variables pour obtenir
$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(nu)\cos(mu)}{\sqrt{1-\cos^2 u}}(-\sin u)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(mu)\mathrm{d}u$$
Lorsque $m \neq n$, le produit scalaire est nul. La famille $(P_0,\ldots,P_k)$ est donc une famille orthogonale de cet espace vectoriel qui comporte $k+1$ polynômes ; c'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$. On normalise ces vecteurs pour avoir une base orthonormée : avec $Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $Q_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}P_n$ si $n \in [\![1;k]\!]$, on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

CCP 2024 - I - Exercice 1 Solution

1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque X est à valeurs entières, l'événement $(X > k-1)$ est également l'événement $(X \geqslant k)$. Cet événement est la réunion disjointe de $(X = k)$ et $(X > k)$. On a donc $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$ ou encore

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$$

On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X>k)$$

Dans la dernière formule, on est passé de k commençant à 1 à k commençant à 0 puisque le terme pour $k=0$ est nul. Cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1-k)\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)$$

Pour finir, il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X>n)=0$. Pour cela, on écrit

$$0 \leqslant n\mathbb{P}(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

On a un reste de série convergente et il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on a la résultat souhaité.

2/ On note $Y_1,\ldots,Y_p$ les variables aléatoires donnant la valeur du numéro tiré au tirage i. On a $(X\leqslant k)=\bigcap_{i=1}^{p}(Y_i\leqslant k)$. Les tirages étant indépendants (et les Y_i de même loi), on a donc $\mathbb{P}(X\leqslant k)=(\mathbb{P}(Y_1\leqslant k))^p$. Or $\mathbb{P}(Y_i\leqslant k)=\dfrac{k}{n}$ si $k\in[\![0\,;n]\!]$ et $\mathbb{P}(Y_i\leqslant k)=1$ si $k>n$. Les valeurs prises par X sont dans $[\![1\,;n]\!]$, et, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X\leqslant k)=\left(\frac{k}{n}\right)^p \text{ et } \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\leqslant k)-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^p-\left(\frac{k-1}{n}\right)^p$$

3/ On a une somme de Riemann associée à la fonction $x\mapsto x^p$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$

On Calcule alors l'espérance

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)-n\mathbb{P}(X>n)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k=0}^{n-1}1-\mathbb{P}(X\leqslant k)=n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p=n\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)$$

Le terme entre parenthèses tend vers $1-\dfrac{1}{p+1}=\dfrac{p}{p+1}\neq 0$ donc $\mathbb{E}(X)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{np}{p+1}$.

CCP 2024 - I - Exercice 2 Solution

1/ Les fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto 4x$ et $x\mapsto(2-x^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et le terme x^2 (devant y'') ne s'annule pas sur I. On est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz (on a une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2) et $S_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

2/ On cherche une telle solution sous la forme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ (ou peut la supposer de rayon $+\infty$ ou simplement de rayon $R>0$).

On alors,

$$\forall x\in]-R,R[,\, y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},\, y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

et pour tout $x\in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}x^2y''(x)+4xy'(x)+(2-x^2)y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}4na_nx^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)+4n+2)a_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n\\ &= 2a_0+6a_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left((n^2+3n+2)a_n-a_{n-2}\right)x^n\end{aligned}$$

Par unicité, la fonction y est solution si et seulement si $a_0=1/2$, $a_1=0$ et, pour tout $n\geqslant 2$, $(n^2+3n+2)a_n=a_{n-2}$ ou encore $a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-2}$ (car $(n+1)(n+2)$ ne s'annule pas).

- par récurrence, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_{2p+1}=0$,
- pour $p\in\mathbb{N}^*$, on a $a_{2p}=\dfrac{1}{(2p+2)(2p+1)}a_{2p-2}$ et par récurrence, $a_{2p}=a_0\dfrac{2\times 1}{(2p+2)!}=\dfrac{1}{(2p+2)!}$.

On a démontré qu'il y a au plus une solution DSE sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ avec les coefficients précédents vérifie l'équation sur $]-R,R[$ où R est son rayon de convergence. On le calcule : puisque les coefficients a_{2n} sont non nuls, on peut appliquer un critère de d'Alembert avec $u_n = a_{2n}x^{2n}$. On a $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}x^2$ de limite nulle. La série $\sum u_n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $R = +\infty$. Il y a donc une unique solution DSE en 0 sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \sum_{n=0} +\infty \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n} =$$

Pour $x \neq 0$, on a $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n-2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.

3/ L'ensemble des solutions est obtenu en ajoutant à une solution particulière, toute solution de l'équation homogène; les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension 2. La fonction h en est une et par exemple $f-g$ en est une autre (oui il faut bien lire pour g c'est $S_I(E)$). On a $f(x) - g(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{x^2}$. Les fonctions ch et sh sont linéairement indépendantes. Ainsi y est solution si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}{x^2}$$

4/ Les solutions de H sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}{x^2}$. Si y est une solution de (H) sur $\mathbb{R}$, elle est entre autre une solution de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc de la forme précédente. Elle est également continue en 0 donc doit avoir une limite finie en 0 à droite. Si $a \neq 0$, alors $\lim_{x\to 0^+} a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x = a \neq 0$ et $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \pm\infty$. On doit avoir $a = 0$. Si $b \neq 0$, alors $y(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} b\frac{x}{x^2} = \frac{b}{x}$ et de nouveau la limite en 0 est infinie. Il n'y a donc pas de solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

CCP 2024 - II - Exercice 1 Solution

1/ On calcul le polynôme caractéristique. On obtient $\chi_A = (X-1)(X+2)^2$. On détermine alors les espaces propres. On trouve

$$\ker(A + 2I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \mathrm{I}_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est 3, donc A est diagonalisable. On a alors une matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

formés des vecteurs propres précédents. On a alors,

$$P^{-1}AP = D\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$; $X_n = PY_n$ donne $PY_{n+1} = APY_n$ ou encore $Y_{n+1} = P^{-1}APY_n = DY_n$. On a trois relations de récurrence séparées $\alpha_{n+1} = -2\alpha_n; \beta_{n+1} = -2\beta_n; \gamma_{n+1} = \gamma_n$. Cela donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = (-2)^n\alpha_0, \beta_n = (-1)^n\beta_0$ et $\gamma_n = \gamma_0$. Puisque $X_n = PY_n$ et $Y_n = P^{-1}X_n$, la suite (X_n) converge si et seulement si la suite (Y_n) converge (par continuité de l'application linéaire $X \mapsto MX$ sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$). La convergence d'une suite de vecteurs équivaut à celle de ses composantes. Il faut et il suffit que chacune des trois suite α, β et γ convergent. Cela n'est possible que si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$. Puisque $X_0 = PY_0$, cela équivaut à avoir $X_0 = \lambda\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$ (troisième colonne de P) pour un certain réel λ.

Le vecteur X_0 est alors un vecteur propre pour la matrice A pour la valeur propre 1. On a $AX_0 = X_0$ et par récurrence $A^nX_0 = X_0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0$.

CCP 2024 - II - Exercice 2 Solution

1/ si $x \leqslant 0$, la série diverge grossièrement. Soit $x > 0$. On a

$$n^2e^{-x\sqrt{n}} = \exp(2\ln n - x\sqrt{n})$$

par croissance comparées, $2\ln n - x\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -x\sqrt{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2e^{-x\sqrt{n}} = 0$. On a donc $e^{-x\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge lorsque $x > 0$. On en déduit que $D = \mathbb{R}_+^*$.

2/ On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Chaque fonction est continue sur D. Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$. Puisque la série $\sum f_n(a)$ converge, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. La fonction f est donc continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ et donc sur leur réunion D.

3/ En utilisant la convergence normale sur $[1, +\infty[$ et le fait que, pour tout $n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, on peut permuter somme et limite et obtenir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

4/ On effectue une comparaison série-intégrale. Soit $x > 0$. La fonction $g : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$$

En sommant ces relations pour $k \in \mathbb{N}$ (les séries convergent, l'intégrale également (*)), on obtient

$$f(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant f(x)$$

ce qui donne l'encadrement proposé pour $f(x)$.
remarque $(*)$: la fonction g est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. Elle est intégrable

- parce que $g(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$,
- parce que $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ - cette primitive est croissante et majorée donc admet une limite en $+\infty$.

5/ On calcule l'intégrale. On commence par le changement de variable « $u = x\sqrt{t}$ », ou encore « $t = \frac{u^2}{x^2}$ ». L'application $t \mapsto x\sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u} \mathrm{d}u.$$

Par intégration par parties, l'intégrale restante vaut 1. Cela donne l'encadrement

$$\forall x > 0, \frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 2$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

CCP 2023 - I - Exercice 1 Solution

1/
- On a facilement l'existence et la positivité de $N(A)$ (maximum d'un ensemble fini de réels positifs).
- Si $N(A) = 0$ alors pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = 0$. Les termes étant tous positifs dans la somme, ils sont tous nuls. On a donc, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $a_{ij} = 0$. La matrice A est nulle.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda\right|\left|a_{i,j}\right| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = |\lambda| N(A)$ car $|\lambda| \geqslant 0$.
- Soient A et B deux matrices. Pour $i \in [\![1; n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|b_{i,j}\right| \leqslant N(A) + N(B)$$

  On en déduit que $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$.

2/ Soit $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$|(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.\right) \|x\|_\infty \leqslant N(A).\|X\|_\infty.$$

Ainsi $\|AX\|_\infty \leqslant N(A)\|X\|_\infty$. Pour $X \in S$, on a donc $\|AX\|_\infty \leqslant N(A)$. L'ensemble $\{\|AX\|_\infty, X \in S\}$ est non vide et majoré donc admet une borne supérieure.

3/ Si $X \neq 0$ alors $Z = \frac{X}{\|X\|_\infty}$ est de norme 1 donc dans S. Par conséquent,$\|Z\|_\infty \leqslant |||A|||$. Cela donne $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant |||A|||$ puis $\|AX\|_\infty \leqslant |||A|||\,\|X\|_\infty$. Si $X = 0$ alors l'inégalité est immédiate.

4/
- Pour tout $X \in S$, on a $\|AX\|_\infty \leqslant N(A)$. On en déduit que $|||A||| \leqslant N(A)$.
- Soit $i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $N(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$. On considère le vecteur X de coordonnées x_j où x_j vaut 1 si $a_{i_0,j} \geqslant 0$ et -1 sinon.

  On a alors $(AX)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = N(A)$ avec $\|X\|_\infty = 1$. Alors $\|AX\|_\infty \geqslant N(A)$. On a donc $|||A||| \geqslant N(A)$

Finalement $|||A||| = N(A)$.

5/ On cherche $N(A)$, c'est-à-dire la plus grande norme 1 des colonnes. Elle est obtenue pour la première colonne et vaut 10.

CCP 2023 - I - Exercice 2 Solution

1/ Soit $f(x) = x - e^{-x}$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$. La fonction est strictement croissante. On a $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. la fonction admet une unique racine sur $\mathbb{R}$ (et elle est strictement positive (on a également $f(1) = 1 - e^{-1} > 0$ donc la racine est entre 0 et 1. L'unique racine de f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $e^{-x} = x$.

2/ On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y$. On cherche les zéros communs à ces deux équations;

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y-e^{-x} & = & 0 \\ -2x+4y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-x-e^{-x} & = & 0 \\ x & = & 2y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & e^{-x} \\ x & = & 2y \end{array}\right.$$

On a donc un seul point critique $(\alpha, \alpha/2)$ où α est l'unique réel tel que $x = e^{-x}$.

3/ On calcule les coefficients de la matrice Hessienne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$$

Cela donne la matrice Hessienne en $(\alpha, \alpha/2)$ (on peut remplacer $e^{-\alpha}$ par α) :

$$\begin{pmatrix} 2+\alpha & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est $8 + 4\alpha - 4 = 4 + 4œ\alpha > 0$ donc les deux valeurs propres de la matrice sont de même signe. Leur somme est la trace, soit $6 + \alpha > 0$. Les deux valeurs propres sont donc strictement positives et f admet ainsi un minimum local en ce point critique.

CCP 2023 - II - Exercice 1 Solution

1/ on vérifie les différents points :

- existence : la fonction $f : x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par croissances comparées $x^2 f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ donc $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$,
- symétrie : on a de façon immédiate $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$,
- linéarité à gauche : par linéarité de l'intégrale (elles existent toutes), $\langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle = \langle P_1, Q\rangle + \lambda \langle P_2, Q\rangle$
- si $P \in E$ alors $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\mathrm{d}x \geqslant 0$. Puisque $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, l'intégrale précédente est nulle si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $P^2(x)e^{-x} = 0$ soit $P(x) = 0$. Le polynôme admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul

On a bien un produit scalaire

2/ On peut le faire en orthonormalisant la base $(1, X)$ ou bien en écrivant que $Q = P_F(X^2) = aX + b$ et que $X^2 - Q$ est orthogonal à F, ce qui se ramène à $X^2 - Q$ orthogonal à 1 et X. On obtient $\langle aX + b, 1\rangle = \left\langle X^2, 1\right\rangle = 2$ et $\langle aX + b, X\rangle = \left\langle X^2, X\right\rangle = 6$. On a les deux équations $a + b = 2$ et $2a + b = 6$. Cela donne $a = 4$ et $b = -2$. On a donc $P_F(X^2) = 4X - 2$.

3/ Les polynômes $X^2 - P_F(X^2)$ et $P_F(X^2)$ sont respectivement dans $F^\perp$ et F donc sont orthogonaux. La formule de Pythagore donne

$$\left\|X^2\right\|^2 = \left\|X^2 - P_F(X^2) + P_F(X^2)\right\|^2 = \left\|X^2 - P_F(X^2)\right\|^2 + \left\|P_F(X^2)\right\|^2$$

cela s'écrit également $\left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$.

On cherche alors $\alpha = \inf\limits_{R\in F} \left\|X^2 - R\right\|^2$. On sait qu'elle est atteinte pour le projeté orthogonal de X^2 sur F donc avec $Q = 4X - 2$. On a alors

$$\alpha = \left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \|4X - 2\|^2$$

On a $\left\|X^2\right\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\mathrm{d}x = 4! = 24$ et $\|4X - 2\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (16X^2 - 16X + 4)e^{-x}\mathrm{d}x = 32 - 16 + 4 = 20$. On a donc $\alpha = 4$.

CCP 2023 - II - Exercice 2 Solution

1/ on envisage les trois cas :

- si $m < n$ alors l'événement $(Z = m) \cap (T = n)$ est vide donc de probabilité nulle
- si $m = n$: on a, par indépendance

$$\mathbb{P}\left((Z = m) \cap (T = m)\right) = \mathbb{P}\left((X = m) \cap (Y = m)\right) = \mathbb{P}\left(X = m\right)\mathbb{P}\left(Y = m\right) = p^2 q^{2m}$$

- si $m > n$, alors

$$\mathbb{P}((Z=m)\cap(T=m)) = \mathbb{P}(((X=m)\cap(Y=n))\uplus((X=n)\cap(Y=m))) = 2\mathbb{P}(X=m)\mathbb{P}(Y=n) = 2p^2q^{m+n}$$

2/ Puisque la famille $((T=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=m) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=m\cap T=n) = \sum_{n=0}^{m}\mathbb{P}(Z=m\cap T=n)\\
&= p^2q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1}2p^2q^{m+n} = p^2q^{2m} + 2p^2q^m\frac{1-q^m}{1-q}\\
&= p^2q^{2m} + 2pq^m(1-q^m) = pq^m\left(pq^m + 2 - 2q^m\right)\\
&= pq^m\left(2-(1+q)q^m\right)
\end{aligned}$$

CCP 2021 - I - Exercice 1 Solution

1/ La fonction $t\mapsto t^{2k}\ln t$ est continue sur $]0,1]$. Si $k=0$, alors $f(t) = \ln t = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0,1]$. Si $k\in\mathbb{N}^*$, f se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 donc est également intégrable sur $]0,1]$. On a

$$I_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}[t\ln t - t]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} -1-\varepsilon\ln\varepsilon = -1$$

Si $k\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\int_\varepsilon^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1}}{2k+1}\ln\varepsilon - \left[\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_\varepsilon^1$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient $\boxed{I_k = -\frac{1}{(2k+1)^2}}$.

2/ Pour tout $t\in]0,1[$, on a $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}t^{2k}$ et ainsi $f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty}t^{2k}\ln t$. On note $f_n(t) = t^{2k}\ln t$ pour $t\in]0,1[$.

- la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,1[$,
- la fonction somme est $f : t\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}f_k(t) = f(t)$ et f est continue sur $]0,1[$,
- pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction f_k est intégrable sur $]0,1[$, $\int_0^1|f_k(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)}$ et la série $\sum\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge

On a donc l'intégrabilité de f sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = S.$$

On remarque que, puisque toutes les séries qui apparaissent convergent

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

ce qui donne $S = (1-\frac{1}{4})\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

CCP 2021 - I - exercice 2 Solution

1/ Soit f la fonction logarithme. Elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, et on a, pour tout $x>0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}\leqslant 0$. La fonction est donc concave. Si x,y,z sont strictement positifs, on a (puisque $3\frac{1}{3}=1$),

$$\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geqslant \frac{1}{3}\left(\ln x + \ln y + \ln z\right) = \ln(xyz)^{1/3}$$

Par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient $\frac{x+y+z}{3}\geqslant (xyz)^{1/3}$.

2/ La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ par opérations générales (avec xy qui ne s'annule pas). On cherche les points critiques de f. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1-\frac{1}{x^2y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1-\frac{1}{xy^2}$. On résout pour avoir ces deux dérivées partielles nulles, ce qui donne

$$\left(x^2y = 1 \text{ et } y^2x = 1\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{y}{x} = 1 \text{ et } x^2y = 1\right) \Longleftrightarrow \left(y = x \text{ et } x^3 = 1\right)$$

Le seul point critique est donc $(1,1)$. En ce point $f(1,1)=3$. En utilisant la question précédente avec $a=x$, $b=y$ et $c=\frac{1}{xy}$, on a $abc=1$ et ainsi

$$\forall x,y>0, 1\leqslant \frac{1}{3}\left(x+y+\frac{1}{xy}\right)$$

ce qui donne $f(x,y)\geqslant 3$. On en déduit donc que f atteint son minimum global en $(1,1)$ (et qu'il vaut 3).

CCP 2020 - II - Exercice 1 Solution

1/ La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. On peut déterminer de plusieurs manières différentes les éléments propres :

- $A=I_3+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et on s'intéresse aux éléments propres de cette nouvelle matrice (pas terrible ici)
- $A^2=\begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix}=5A-4I_4$, ainsi $X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$ est annulateur. Les valeurs propres sont 1 et 4 (la matrice étant non scalaire et diagonalisable, elle ne peut pas avoir une seule valeur propre)
- on détermine le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-4&-1&-1\\\lambda-4&\lambda-2&-1\\\lambda-4&-1&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-4)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{pmatrix}$$

puis

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-4)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&\lambda-1&0\\1&0&\lambda-1\end{pmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

On cherche alors les espaces propres associés. De nouveau, plusieurs possibilités :

- on résout les systèmes linéaires associés aux valeurs propres
- Pour la valeur propre simple 4, il est de dimension 1 et on voit que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ convient. Pour la valeur propre 1, l'espace propre est de dimension 2 et est orthogonal à $E_4(A)$. C'est donc le plan d'équation $x+y+z=0$.

$$\text{avec } P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}, \text{ on a } P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2/ On note $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B=PCP^{-1}$. Elle vérifie bien $B^2=PC^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$. Il ne reste plus qu'à calculer... on trouve

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix} \text{ et } B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

3/ On calcule PD^nP^{-1}... si si, faut le faire

$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2&4^n-1&4^n-1\\4^n-1&4^n+2&4^n-1\\4^n-1&4^n-1&4^n+2\end{pmatrix}$$

4/ Soit on a déjà déterminé le polynôme minimal $(X-1)(X-4)$, soit on obtient que $\mu_A=(X-1)(X-4)$ puisque A est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 4. On effectue la division euclidienne de X^n par ce polynôme :

$$X^n=(X-1)(X-4)Q+a_nX+b_n$$

et en évaluant en 1 et 4, on obtient $a_n+b_n=1$ et $4a_n+b_n=4^n$, soit $a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ et $b_n=\frac{1}{3}(4-4^n)$. Finalement

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=\frac{4^n-1}{3}A+\frac{4-4^n}{3}I_3.$$

(on peut vérifier au minimum que la relation est correcte pour $n=0$, $n=1$ et même $n=2$).

CCP 2020 - II - Exercice 2 Solution

1/ La suite de matrices inversible $\left(\frac{1}{p}I_n\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle qui n'est pas inversible. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

2/ L'application $M \mapsto \det M$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ (polynomiale en tous les coefficients de M). On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque par une application continue d'un ouvert. C'est donc un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

3/ L'application $\varphi : \lambda \mapsto \det(M-\lambda I_n) = (-1)^n \chi_M(\lambda)$ est polynomiale de degré n. Elle n'admet qu'un nombre fini de racines réelles. On note $\rho = \min\{r, r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \varphi(r) = 0\}$ (et $\rho > 0$ quelconque si toutes les racines de M sont nulles). Alors $\rho > 0$ et pour tout $\lambda \in]0,\rho[$, $\det(M-\lambda I_n) \neq 0$, c'est-à-dire $M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note alors $M_p = M - \frac{\rho}{p+2}I_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{\rho}{p+2} < \rho$ et M_p est inversible. De plus $M - M_p = \frac{\rho}{p+2}I_n$ est de limite nulle lorsque p tend vers $+\infty$. La suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers M. Tout élément de $M_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles d'où la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

4/ On le fait en deux étapes :

- si A est inversible : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(A(\lambda A^{-1} - B)) = \det\left((\lambda A^{-1} - B)A\right) = \det(\lambda I_n - BA)$$

  ce qui donne $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que l'application $M \mapsto \det(\lambda I_n - MB)$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. En effet $M \mapsto MB$ est linéaire donc continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Puis, par opération générales, $M \mapsto \lambda I_n - MA$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Par composition avec l'application déterminant, continue sur $M_n(\mathbb{R})$, on a bien $M \mapsto \det(\lambda I_n - MB)$ continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De la même manière $M \mapsto \det(\lambda I_n - BM)$ continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Les deux applications sont continues et coïncident sur une partie dense de $M_(\mathbb{R})$. Elles sont donc égales sur $M_n(\mathbb{R})$. On a donc démontré que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour toutes matrices A et B, $\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$. Les matrices AB et BA ont donc même polynôme caractéristique.
  remarque : on peut aussi démontrer que l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ M & \mapsto & \chi_{MB} \end{array}\right.$$

  est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ (et de même avec χ_{BM}).

On a $AB = \begin{pmatrix} =0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les polynômes caractéristiques sont tous les deux X^2. Pour la première le polynôme minimal est X (la matrice est nulle), pour la seconde X n'est pas annulateur donc le polynôme minimal est X^2.

5/ L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est encore connexe par arcs. Or l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par l'application déterminant est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. Il est peut-être bon de justifier que l'image est bien $\mathbb{R}^*$, par exemple en considérant la matrice de diagonale $(x, 1, \ldots, 1)$ de déterminant x.

CCP 2019 - I - Exercice 2 Solution

1/ Pour tout $t \in [-1,1]$, $|p_n t^n| \leqslant p_n$. Puisque X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. On en déduit la convergence absolue de $\sum p_n t^n$ pour $t \in [-1,1]$ (et donc pour $t \in]-1,1[$ comme demandé).

2/

- On a $G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{+_infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\, t^n$ et $G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+_infty} \mathbb{P}(X_2 = n)\, t^n$. Les deux séries convergent absolument lorsque $t \in [-1,1]$. On peut effectuer leur produit de Cauchy qui donne

$$G_{X_1}(t()G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \text{ où } c_n =_d sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k)\,\mathbb{P}(X_2 = n-k).$$

  On a enfin pour $n \in \mathbb{N}$, par indépendance de X_1 et X_2,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n \cap X_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n-k \cap X_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n-k)\,\mathbb{P}(\cap X_1 = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_2 =$$

  Ainsi $G_X(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$ pour tout $t \in]-1,1[$.
- Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, pour tout $t \in]-1,1[$, t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes (t^X a bien un sens car X est à valeurs entières). On a donc

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \mathbb{E}\left(t^{X_1}.t^{X_2}\right) = \mathbb{E}\left(t^{X_1}\right)\mathbb{E}\left(t^{X_2}\right) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t).$$

3/ On note X_i le résultat du tirage i. Ces variables aléatoires sont distinctes et suivent toutes la même loi. On a notamment $G_{X_i}(t) = \frac{1}{4}(1+2t+t^2) = \frac{1}{4}(1+t)^2$. On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$,- à valeurs dans $[\![0;2n]\!]$ - ainsi

$$\forall t \in]-1,1[, G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{k}$

CCP 2019 - II - Exercice 2 Solution

1/ En dimension 2, une rotation d'angle $\pi/2$ vérifie cette propriété. En dimension quelconque, on peut noter A la matrice de u dans une base orthonormée $\mathscr{B}$. On a alors, avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$,

$$\langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = {}^tXAX = {}^t(AX)X = {}^tX^tAX$$

notamment si A est antisymétrique, alors ${}^tXAX = 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

2/ On suit les conseils de l'énoncé (l'implication iii. vers i. est en fait moins évidente).

- $i \Rightarrow ii$: pour tout $x, y \in E$,

$$\big\langle u(x), u(y)\big\rangle = \big\langle x, v(u(y))\big\rangle = \big\langle x, u(v(y))\big\rangle = \big\langle u(v(y)), x\big\rangle = \big\langle v(y), v(x)\big\rangle = \big\langle v(x), v(y)\big\rangle.$$

- $ii \Rightarrow iii$: il suffit de prendre $x = y$
- $iii \Rightarrow ii$: on utilise les formules de polarisation. On a, pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\big\langle u(x), u(y)\big\rangle &= \frac{1}{4}\left(\big\|u(x)+u(y)\big\|^2 - \big\|u(x)-u(y)\big\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\big\|u(x+y)\big\|^2 - \big\|u(x-y)\big\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\big\|v(x+y)\big\|^2 - \big\|v(x-y)\big\|^2\right) = \big\langle v(x), v(y)\big\rangle\end{aligned}$$

- $ii \Rightarrow i$: pour démontrer l'égalité entre deux endormorphismes à l'aide de propriétés sur le produit scalaire, on cherche à montrer que, pour tout $x \in E$, $(u\circ v)(x) = (v\circ u)(x)$ et pour cela, que pour tout $y \in E$,

$$\big\langle (u\circ v)(x), y\big\rangle = \big\langle (v\circ u)(x), y\big\rangle$$

  On a en effet

$$\big\langle (u\circ v)(x), y\big\rangle = \big\langle v(x), v(y)\big\rangle = \big\langle u(x), u(y)\big\rangle = \big\langle (v\circ u)(x), y\big\rangle$$

  ce qui donne le résultat.

CCP 2018 - II - Exercice 1 Solution

1/ voir cours

2/ On normalise u en $u_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ avec $\|u\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2$. On a $u_1 : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On calcule $\langle u, v\rangle$ pour trouver 0. La famille (u, v) est donc orthogonale. On normalise v avec $\big\|v^2\big\| = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$. Ainsi, avec $v_1(t) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,t$, on obtient une base orthonormée (u_1, v_1) de F.

3/ Puisque (u_1, v_1) est une base orthonormée de F, le projeté orthogonal de w sur E est

$$p(w) = \langle u_1, w\rangle\, u_1 + \langle v_1, w\rangle\, v_1.$$

On trouve $\langle u_1, w\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\,1 = \sqrt{2}\mathrm{sh}\,1$ et $\langle u_1, w\rangle = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\displaystyle\int_{-1}^{1} te^t\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{2}}\left[(t-1)e^t\right]_{-1}^{1} = \sqrt{6}e^{-1}$. D'après les résultats sur les distances à des sous-espaces vectoriels, le réel cherché, qu'on notera d, est $\big\|w - p(w)\big\|^2$. Par le théorème de Pythagore, on a $\|w\|^2 = \big\|p(w)\big\|^2 + \big\|w - p(w)\big\|^2$ et ainsi $d = \|w\|^2 - \big\|p(w)\big\|^2$. On a $\|w\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2t}\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\,2$ et $\big\|p(w)\big\|^2 = \langle u_1, w\rangle^2 + \langle v_1, w\rangle^2 = 2\mathrm{sh}^2 1 + 6e^{-2}$, ce qui donne

$$d = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - 2\left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2 - 6e^{-2} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{e^2 - 2 + e^{-2}}{2} - 6e^{-2} = 1 - 7e^{-2}$$

CCP 2017 - I - Exercice 1 Solution

On définit deux fonctions :

- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1/ La fonction $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. La fonction sinus est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc différentiable en tout point. De même pour chacune des deux applications $(x,y)\mapsto x+y$ et $(x,y)\mapsto x-y$. On a

$$J_f((x,y)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2)\end{pmatrix}$$

ainsi que, en notant $g_1(x,y)=x+y$ et $g_2(x,y)=x-y$,

$$J_g((x,y)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2/

a/ On a $(f\circ g)(x,y)=\sin((x+y)^2-(x-y)^2)=\sin(4xy)$. On a alors, en notant $h=f\circ g$,

$$\big(dh((x,y))\big)(u,v) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)u + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)v = (4\cos(xy))(yu+xv).$$

b/ On calcule $Jf_{g(x,y)}.Jg(x,y)$: on a $Jf_{g(x,y)} = \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & 2(y-x)\cos(4xy)\end{pmatrix}$ et

$$Jf_{g(x,y)}.Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy)\end{pmatrix}$$

et ainsi $dh((x,y))(u,v)=4y\cos(xy)u+4x\cos(xy)v$.

1/ On note, pour $(p,q)\in A$, $u_{p,q}=\dfrac{1}{p^2q^2}$. On a bien une famille de réels positifs. Deux rédactions possibles :

a/ *version famille sommable* : on considère, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $I_k=\{k\}\times\mathbb{N}^*$. On a

$$\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*} I_k = A.$$

La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_k}$ est la famille $(\frac{1}{k^2}\frac{1}{q^2})_{q\in\mathbb{N}^*}$. Cette famille est sommable puisque la série $\sum \dfrac{1}{q^2}$ converge. De plus $s_k=\displaystyle\sum_{(p,q)\in I_k} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2q^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\pi^2}{6}$. Pour les mêmes raisons, la famille $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = \frac{\pi^4}{36}$. Finalement, la famille de départ est sommable et $\displaystyle\sum_{(p,q)\in A} u_{p,q} = \frac{\pi^4}{36}$.

b/ *version famille double* : à $p\in\mathbb{N}^*$ fixé, la série $\sum \dfrac{1}{p^2q^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{p^2}$. De plus ce dernier terme est le terme général d'une série convergente : $\displaystyle\sum\left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge. On en déduit que la famille est sommable et que, de plus,

$$\sum_{(p,q)\in A} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \frac{\pi^4}{36}.$$

2/ on propose deux versions également :

a/ *minoration* : on a, pour $(p,q)\in A$, $(p+q)^2=p^2+q^2+2pq\geqslant p^2+q^2$. On a donc

$$\frac{1}{p^2+q^2}\geqslant\frac{1}{(p+q)^2}.$$

On s'intéresse à la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in A}$. On considère le sous-ensemble fini $J_k=\{(p,q)\in A, p+q=k\}$. On a de nouveau

$$\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*} J_k = A.$$

On note $t_k=\displaystyle\sum_{(p,q)\in J_k}\frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{(p,q)\in J_k}\frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2}$ (l'ensemble J_k possède $k-1$ éléments). La série $\sum t_k$ diverge donc la famille n'est pas sommable. Par minoration, la famille de départ ne l'est pas non plus.

b/ *comparaison série - intégrale* : on effectue la même sommation que dans la première question :

$$\sum_{(p,q)\in I_k} \frac{1}{p^2+q^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+q^2}.$$

La somme existe bien car $\dfrac{1}{k^2+q^2} \underset{q\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{q^2}$. Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{k^2+x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{k^2+x^2} \leqslant \frac{1}{k^2+n^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+q^2} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{k^2+x^2} \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k}\left[\arctan\frac{x}{k}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2k}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge donc la famille de départ n'est pas sommable.

CCP 2015 - Solution

1/ La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions $x \mapsto e^{-ax}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ dès que $a>0$. La fonction f_n est somme de deux telles fonctions donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour $a>0$ et $X>0$,

$$\int_0^X e^{-at}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^X = \frac{1-e^{-aX}}{a} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$$

On en déduit, puisque chaque intégrale existe,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\mathrm{d}t - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - 2\frac{1}{2n} = 0.$$

2/ Soit $x>0$, les séries géométriques $\sum (e^{-x})^n$ et $\sum (e^{-2x})^n$ ont une raison dans $]0,1[$ donc convergent. On obtient alors

$$\forall x>0, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 2\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$$

La fonction S est continue sur $]0,+\infty[$. Puisque $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ et S est intégrable en $+infty$. On cherche un équivalent de S en 0. On peut par exemple réduire au même dénominateur :

$$S(x) = \frac{e^{-x}-e^{-3x}-2e^{-2x}+2e^{-3x}}{(1-e^{-x})(1-e^{-2x})} = \frac{e^{-x}+e^{-3x}-2e^{-2x}}{(1-e^{-x})(1-e^{-2x})}$$

x On a

$$e^{-x}+e^{-3x}-2e^{-2x} = (1-x+\frac{1}{2}x^2)+(1-3x+\frac{9}{2}x^2)-2(1-2x+\frac{4}{2}x^2)+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2) = x^2+\mathrm{o}(x^2)$$

On a donc $S(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{x(2x)} = \dfrac{1}{2}$. La fonction S admet donc une limite finie en 0 et elle est finalement intégrable sur l'intervalle I.

Remarque : on peut aussi écrire $S(x) = \dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{2}{e^{2x}-1}$ et réduire cette expression au même dénominateur pour retrouver un peu plus rapidement la limite en 0.

Il reste à calculer l'intégrale. Chaque terme est sous la forme « $\dfrac{u'}{u}$ »mais séparément, les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ et $x \mapsto 2\dfrac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$ ne sont pas intégrable en 0. Soit $0<a<b$, on a

$$\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-2x}}\right)\right]_a^b = \left[\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}\right)\right]_a^b = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_a^b$$

La limite lorsque $a\to0$ et $b\to+\infty$ vaut $\ln 2$. On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \ln 2$.

3/ Si la série proposée était convergente, on aurait toutes les hypothèses pour permuter somme et intégrale et cela donnerait une contradiction 0 pour la somme des intégrale qui serait égale à $\ln 2$ pour l'intégrale de la somme. On n'a donc pas la convergence de la série.

CCP 2014 - I - Exercice 2 Solution

1/ D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces espaces vectoriels sont de dimension 2.

2/ On a $\varphi(f+\lambda g)=((f+\lambda g)_I,(f+\lambda g)_J)=(f_I+\lambda g_I, f_J+\lambda g_J)=(f_I,f_J)+\lambda(g_I,g_J)$ donc φ est linéaire de S dans $S^+\times S^-$. Ce dernier espace est de dimension 4. On montre que φ est injective. Si $\varphi(f)=0$ alors f est nulle sur I et sur J et par continuité sur $\mathbb{R}$. L'application est injective et $\dim S \leqslant \dim S^+ + \dim S^-$.

3/

4/ Dans cette question (E) : $x^2y''-6xy'+12y=0$. Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme x^α (α réel). En déduire $S+$ et S^-. Déterminer S et donner sa dimension. La fonction $x\mapsto x^\alpha$ est solution sur I si et seulement si, pour tout $x>0$,

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha-6\alpha x^\alpha+12x^\alpha=(\alpha^2-7\alpha+12)x^\alpha=0$$

donc si et seulement si $\alpha^2-7\alpha+12=(\alpha-3)(\alpha-4)=0$. Les fonctions $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto x^4$ sont donc deux solutions sur I non proportionnelles. On vérifie qu'elles sont solutions sur J également (on reporte dans l'équation). Les solutions sur I sont les fonctions $x\mapsto Ax^3+Bx^4$ et celles sur J, les fonctions $x\mapsto Cx^3+Dx^4$. Quelles que soient les valeurs de A,B,C,D, la fonction nulle en 0, valant Ax^3+Bx^4 sur I et Cx^3+Dx^4 sur J est de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ (dérivée et dérivée seconde de limite nulle à droite et à gauche de 0). On en déduit que φ est surjective et $\dim S=4$.

5/ il suffit d'avoir le même type d'équation mais avec des solutions qui ne se racordent pas en 0 : par exemple $x^2y''+8xy+12y=0$ avec une équation en α qui est $\alpha^2+7\alpha+12=0$ et des solutions $x\mapsto x^{-3}$ et $x\mapsto x^{-4}$.

CCP 2014 - II - Exercice 2 Solution

1/

a/ L'endomorphisme p est annulé par le polynôme $X^2-X=X(X-1)$ et X et $X-1$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux, $E=\ker p\oplus\ker(p-\mathrm{Id})$. On montre alors que $\operatorname{Im} p=\ker(p-\mathrm{Id})$: si $x\in\operatorname{Im}(p)$, alors il existe $y\in E$ tel que $x=p(y)$, donc $p(x)=p\circ p(y)=p(y)=x$. Réciproquement si $x=p(x)$, alors $x\in\operatorname{Im}(p)$.

b/ Notons $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\operatorname{Im}(p)$, où $r=\operatorname{rg}(p)$ et $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(p)$. Alors $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et d'après le lemme, la matrice de p dans la base e se décompose par blocs selon $\operatorname{mat}(p,e)=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r}\end{pmatrix}$, où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes. Ainsi $\operatorname{Tr}(p)=\operatorname{Tr}(\operatorname{mat}(p,e))=r=\operatorname{rg}(p)$.

c/ Prenons f une base de E et considérons l'endomorphisme u de E défini par :

$$\operatorname{mat}(u,f)=M=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 0 & -1 & 0_{2,n-2}\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{n-2,2}} & 0_{n-2,n-2}\end{array}\right)\text{ (on a bien } n\geqslant 2)$$

Alors $\operatorname{Tr}(u)=2=\operatorname{rg}(u)$, mais $M^2\neq M$, donc u n'est pas un projecteur. Ainsi un endomorphisme u de E vérifiant $\operatorname{Tr}(u)=\operatorname{rg}(u)$ n'est pas nécessairement un projecteur de E.

2/ $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable, et son rang vaut 1. Posons $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Ainsi B est aussi de rang 1. Si B était diagonalisable, comme $\chi_B=X^3$, B serait semblable à la matrice nulle, donc on aurait $B=0$ ce qui est faux. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

3/

a/ D'après la formule du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(u))=n-1$, donc il existe une base de $\operatorname{Ker}(u)$ de la forme $(e_1,\cdots,e_{n-1})$. On peut la compléter en une base $\beta=(e_1,\cdots,e_n)$ de E. Pour tout $i\in\{1,\dots,n-1\}$, $u(e_i)=0$, donc en posant $u(e_n)=\sum_{i=1}^n a_ie_i$, on a bien

$$\operatorname{Mat}_\beta(u)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&0&a_2\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}.$$

b/ Supposons d'abord que $\operatorname{Tr}(u)=0$. Alors $a_n=0$ et la matrice de u étant triangulaire supérieure, $\chi_u(X)=X^n$, donc $\operatorname{Sp}(u)=\{0\}$. Alors si u était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de u serait nulle, ce qui est faux car $rg(u)=1$. Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Supposons maintenant que $\operatorname{Tr}(u)\neq 0$. Alors $a_n\neq 0$ et $\chi_u(X)=X^{n-1}(X-a_n)$, donc il existe un vecteur propre f_n associé à a_n. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on sait alors que $(e_1,\dots,e_{n-1},f_n)$ est une base de vecteurs propres de E, donc u est diagonalisable.

c/ Avec les notations de la question précédente, $a_n=1\neq 0$ et

$$\operatorname{mat}(u,(e_1,\dots,e_{n-1},f_n))=\left(\begin{array}{ccc|c}0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\\ \hline 0&\cdots&0&1\end{array}\right)=M.$$

On a $M^2=M$, donc u est un projecteur.

d/ Les trois colonnes de A étant 2 à 2 colinéaires et non nulles, $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{Im}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. De plus $\text{Tr}(A) = 1$, donc d'après la question précédente, A est une matrice de projecteur. Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$, or on vérifie que A annule les deux vecteurs indépendants $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

CCP 2013 - I - Exercice 2 Solution

1/ On vérifie que $\chi_A = (X-2)^2$. Ce polynôme est annulateur donc $(A-2I_2)^2 = 0$, soit $B^2 = 0$ avec $B = A - 2I_2$. On peut alors écrire $A = 2I_2 + B$ et $tA = 2tI_2 + tB$. Les matrices $2tI_2$ et tB commutent donc

$$\exp(tA) = \exp(2tI_2)\exp(tB) = \left(e^{2t}I_2\right)(I_2 + tB + 0) = e^{2t}(I_2 + tB)$$

2/ Avec $X_0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, l'unique solution de $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ est la fonction $t \mapsto \exp(tA)X_0 = e^{2t}(I_2 + tB)X_0$.

CCP 2011 - II - Exercice 1 Solution

1/ La matrice nulle est dans $C(A)$. Si M et N sont dans $C(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(M + \lambda N)A = MA + \lambda NA = AM + \lambda AN = A(M + \lambda N),$$

donc $M + \lambda N \in C(A)$. Ainsi $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

2/ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On cherche un premier vecteur e'_1 tel que $u(e'_1) = 3e'_1$. On exprime cette relation dans la base canonique, ce qui donne $AX = 3X$. Après calculs, on choisit $e'_1 = (1,1,1)$. De même, $e'_2 = (4,3,4)$ vérifie $u(e'_2) = 2e'_2$. On cherche enfin un dernier vecteur e'_3 tel que $u(e'_3) = 2e'_3 + e'_2$. On résout le système associé, et on obtient par exemple $e'_3 = (2,3,3)$. On note

$$P = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

On vérifie que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base en calculant son déterminant dans la base canonique, c'est-à-dire $\det P = -1$. Ainsi la famille est bien une base et P est une matrice inversible qui vérifie $P^{-1}AP = T$.

3/ On peut y aller brutalement avec une matrice inconnue à 9 coefficients et faire les calculs. On peut être un peu plus subtil en exploitant quelques résultats d'algèbre linéaire. Soit $\tilde{u}$ l'endomorphisme canoniquement associé à T. On a $\chi_{\tilde{u}} = -(X-3)(X-2)^2$ annulateur de $\tilde{u}$. Le théorème de décomposition des noyaux donne $E = \ker(u - 3\text{Id}) \oplus \ker(u - 2\text{Id})^2$. On vérifie rapidement, avec les calculs précédents que $\ker(\tilde{u} - 3\text{Id}) = \text{Vect}(e_1)$, que e_2 et e_3 sont dans $\ker(\tilde{u} - 2\text{Id})^2$ qui est de dimension 2 (ou (e_1, e_2, e_3) est la base canonique). Ainsi $\text{Vect}(e_2, e_3) = \ker(\tilde{u} - 2\text{Id})^2$. Soit v commutant avec $\tilde{u}$ canoniquement associé à une matrice M commutant avec T. Alors v commute avec tout polynôme en $\tilde{u}$. On sait que les espaces $\ker(\tilde{u} - 3\text{Id})$ et $\ker(\tilde{u} - 2\text{Id})^2$ sont stables par v. On en déduit que M est diagonale par blocs avec un premier bloc de taille 1, un second de taille 2. On peut même exploiter le fait que $\ker(\tilde{u} - 2\text{Id}) = \text{Vect}(e_2)$ est stable par v. Tout cela donne M sous la forme

$$M = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & c\\0 & 0 & d\end{pmatrix}$$

Réciproquement, une telle matrice commute avec T si, et seulement si, $b = d$ (en faisant les calculs). Ainsi $M \in C(T)$ si, et seulement si, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & c\\0 & 0 & b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

L'espace $C(T)$ est de dimension 3.

4/ L'application est linéaire - c'est donc un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$ - et injective. On en déduit que c'est un automorphisme de $M_3(\mathbb{R})$ (dimension finie). On en déduit que $C(A)$ est de dimension 3 puisque $M \in C(A)$ si, et seulement si $MA = AM$, ce qui est équivalent à $MPTP^{-1} = PTP^{-1}M$ ou $(P^{-1}MP)T = T(P^{-1}MP)$, c'est-à-dire que $P^{-1}MP$ est dans le commutant de T.

5/ a) Puisque 2 et 3 sont valeurs propres de A, ces réels sont racines de tout polynôme annulateur de A. Si A admet un polynôme annulateur de degré 2, celui-ci serait donc scindé à racines simples et A serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas (l'espace $E_2(A)$ est de dimension 1 et pas 2).

b) On vérifie que (I_3, A, A^2) est une famille libre puisque A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré au plus 2 (on peut aussi le faire avec (I_3, T, T^2) et utiliser l'automorphisme précédent). Puisque ce sont des éléments de $C(A)$ et par dimension, on en déduit que $C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

c) Tout polynôme en A commute avec A. Réciproquement tout élément qui commute avec A est un polynôme en A. On en déduit le résultat (de plus tout polynôme en A peut se réécrire comme un polynôme de degré au plus 2 en A - par exemple en effectuant la division euclidienne de ce polynôme par le polynôme caractéristique de A). Le résultat n'est pas valable en général (par exemple avec I_3 : tout polynôme de I_3 reste un multiple de I_3, alors que $C(I_3) = M_3(\mathbb{R})$).